УДК 512.567.5+512.544.44+512.543.22+512.544.33+512.544.27+512.55+519.171.1+519.173.2
MSC: 06B05, 08A35, 20E36, 20F12, 20F16, 20F18, 20F19, 20E10, 17A36, 17A30, 05C10, 05C63

БОЛЬШОЕ И СИММЕТРИЧНОЕ: ТЕОРЕМА МАКАРЕНКО–ХУХРО О ТОЖДЕСТВАХ — БЕЗ ТОЖДЕСТВ

Антон А. Клячко Мария В. Милентьева
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ
klyachko@mech.math.msu.su
mariamil@yandex.ru

Предлагается обобщение теоремы Макаренко–Хухро о больших характеристических подгруппах с тождеством. Из этой обобщённой теоремы выводятся новые результаты о группах, алгебрах и даже о графах и других структурах. Например, про группы мы получаем факт, в некотором смысле двойственный теореме Макаренко–Хухро. А про графы мы получаем аналог этой теоремы, в котором планарность играет роль полилинейного тождества. Мы отвечаем также на один вопрос Макаренко и Шумяцкого.

0. Введение

Следующая короткая теорема обобщила и усилила различные результаты, разбросанные по литературе (см, например, [БеК03], [BrNa04] и раздел 21.1.4 книги [КаМ82]).

Теорема Макаренко–Хухро [KhM07a]. *Если в группе G есть подгруппа конечного индекса, удовлетворяющая внешнему коммутаторному тождеству, то в группе G найдётся также характеристическая подгруппа конечного индекса, удовлетворяющая этому тождеству.*

Под *внешним* (или *полилинейным*) *коммутаторным тождеством* понимается тождество вида $[\dots[x_1,\dots,x_t]\dots]=1$, в котором каким-то осмысленным образом расставлены квадратные скобки, а все встречающиеся буквы $x_1,\dots,x_t$ различны. Примерами таких тождеств могут служить разрешимость, нильпотентность, центральная метабелевость и т.п. Формальное определение выглядит так. Пусть $F(x_1,x_2,\dots)$ — свободная группа счётного ранга. *Внешними коммутаторами веса 1* называют образующие x_i. *Внешним коммутатором веса* $t>1$ называют каждое слово вида $w(x_1,\dots,x_t)=[u(x_1,\dots,x_r),v(x_{r+1},\dots,x_t)]$, где u и v — внешние коммутаторы веса r и $t-r$ соответственно. *Внешним коммутаторным тождеством* понимается тождество вида $w=1$, где w — внешний коммутатор.

Теорема Макаренко–Хухро имеет различные приложения (см., например, [KhM07b], [KhKMM09], [AST13] и литературу, там цитируемую), она обобщалась и усиливалась в разных направлениях. В [КлМ09] было получено значительно более простое доказательство (по сравнению с оригинальным) и более хорошая оценка индекса характеристической подгруппы через индекс исходной подгруппы и степень тождества. В то же время, в работах [KhM07b] и [KhM08] были установлены некоторые факты (о группах и об алгебрах), похожие на теорему Макаренко–Хухро, но не вытекающие из неё.

В [KhKMM09] была предпринята попытка навести порядок, там было доказано очень общее утверждение о группах с операторами (в смысле [Higg56], см также [Кур62]), включающая в себя все известные результаты типа теоремы Макаренко–Хухро и несколько новых результатов такого вида. Однако позже были замечены некоторые факты, весьма похожие на теорему Макаренко–Хухро, но не вписывающиеся в общее утверждение из [KhKMM09]. Некоторые из этих фактов весьма изысканные [MSh12], а некоторые совсем простые (нетерпеливый читатель может заглянуть в последний параграф настоящей работы). В общем виде теоремы типа Макаренко–Хухро выглядят следующим образом.

«Теорема». *Если где-то есть что-то* (в классическом случае: в группе подгруппа) *большое* (конечного индекса) *и хорошее* (удовлетворяющая полилинейному тождеству), *то там есть и что-то большое, хорошее и симметричное* (инвариантное относительно всех автоморфизмов).

В этой статье мы делаем очередную попытку охватить всё. В параграфе 1 мы доказываем основную теорему, содержащую в качестве частных случаев все известные и несколько новых результатов, похожих на теорему Макаренко–Хухро (о группах, алгебрах, графах и других объектах). Основная идея состоит в том, что вместо полилинейных тождеств следует рассматривать «полилинейные свойства».

Один из новых результатов (параграф 2) показывает, что в теореме Макаренко–Хухро тождество, то есть тривиальность вербальной подгруппы, можно заменить на что-нибудь, похожее на тривиальность этой подгруппы. Например, верно, что *группа, содержащая подгруппу конечного индекса с аменабельным (или*

Работа первого автора была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №11-01-00945.

периодическим, или локально конечным...) 2014-м коммутантом, содержит характеристическую подгруппу конечного индекса с тем же свойством.

Другой результат (параграф 3) можно назвать теоремой, двойственной к теореме Макаренко–Хухро. Он показывает, например, что *для любой конечной нормальной подгруппы N произвольной группы G ограниченного периода найдётся характеристическая конечная подгруппа $H \triangleleft G$ такая, что спектр* (то есть множество всех порядков элементов) *факторгруппы G/H содержится в спектре факторгруппы G/N.*

Параграф 4 содержит аналогичные результаты для алгебр.

Ещё одно утверждение из параграфа 2 даёт утвердительный ответ на вопрос Макаренко и Шумяцкого о возможности усиления основной теоремы работы [MSh12].

В параграфе 5 мы показываем, что некоторые свойства графов ведут себя аналогично полилинейным коммутаторным тождествам из теоремы Макаренко–Хухро. Например, верно, что *если какой-то граф можно сделать планарным путём выбрасывания конечного числа рёбер, то это конечное множество рёбер можно выбрать инвариантным относительно всех автоморфизмов исходного графа.*

В последнем параграфе, в качестве награды добравшимся до конца читателям, мы приводим две элементарные (но нетривиальные) задачки для школьников на тему, которой посвящена эта статья.

Авторы благодарят анонимного рецензента и редактора за ценные замечания.

1. Основная теорема

Напомним, что *полурешёткой* называют частично упорядоченное множество $\mathcal{L}$, в котором каждое конечное подмножество $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}$ имеет точную верхнюю грань $\sup \mathcal{N} \in \mathcal{L}$. *Направленной полурешёткой* мы будем называть полурешётку, которая является направленным вниз частично упорядоченным множеством; это означает, что для любого конечного множества $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}$ найдётся элемент $\inf \mathcal{N} \in \mathcal{L}$ такой, что $\inf \mathcal{N} \leqslant N$ для любого $N \in \mathcal{N}$. Обращаем внимание, что в наших обозначениях sup — это точная верхняя грань, а inf — это к а к а я - т о нижняя грань; мы надеемся, что это не приведёт к путанице (смотрите ещё замечание после определения коразмерности, ниже). Полурешётку $\mathcal{L}$ называют *нётеровой*, если в ней все возрастающие цепочки обрываются, то есть не существует бесконечных цепочек вида $N_1 < N_2 < \ldots$, где $N_i \in \mathcal{L}$. Полурешётка $\mathcal{L}$ называется *решёткой*, если каждое конечное подмножество $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}$ имеет точную нижнюю грань, которую мы будем обозначать $\inf \mathcal{N}$ в этом случае.

Будем называть t-арное свойство (предикат) $\mathcal{P}$ на полурешётке $\mathcal{L}$ *(поли)монотонным*, если из справедливости свойства $\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_t)$, где $N_i \in \mathcal{L}$, следует, что верно и $\mathcal{P}(N'_1, \ldots, N'_t)$ для любых $N'_i \leqslant N_i$. Назовём свойство $\mathcal{P}$ *полилинейным*, если для любого i из справедливости свойств
$\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_{i-1}, N'_i, N_{i+1}, \ldots, N_t)$ и $\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_{i-1}, N''_i, N_{i+1}, \ldots, N_t)$
следует свойство $\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_{i-1}, \sup(N'_i, N''_i), N_{i+1}, \ldots, N_t)$.

Нам понадобятся также двойственные понятия. Предикат $\mathcal{P}$ на полурешётке $\mathcal{L}$ назовём *комонотонным*, если из справедливости свойства $\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_t)$, где $N_i \in \mathcal{L}$, следует, что верно и $\mathcal{P}(N'_1, \ldots, N'_t)$ для любых $N'_i \geqslant N_i$. Назовём предикат $\mathcal{P}$ *кополилинейным*, если для любого i из справедливости свойств
$\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_{i-1}, N'_i, N_{i+1}, \ldots, N_t)$ и $\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_{i-1}, N''_i, N_{i+1}, \ldots, N_t)$
следует свойство $\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_{i-1}, \inf(N'_i, N''_i), N_{i+1}, \ldots, N_t)$ для некоторой нижней грани $\inf(N'_i, N''_i)$ (мы будем использовать слово *колинейный*, если $t = 1$).

Будем говорить, что полугруппа эндоморфизмов $\Phi \subseteq \operatorname{End} \mathcal{L}$ полурешётки $\mathcal{L}$ *сохраняет свойство $\mathcal{P}$* (или свойство $\mathcal{P}$ *Φ-инвариантно*), если из $\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_t)$ следует $\mathcal{P}(\varphi(N_1), \ldots, \varphi(N_t))$ для любых $N_i \in \mathcal{L}$ и $\varphi \in \Phi$. Например, свойство $\mathcal{R}(X, Y, Z) = \Big(X = \sup(Y, Z)\Big)$ является $(\operatorname{End} \mathcal{L})$-инвариантным по определению *эндоморфизмов полурешётки*. Элемент N полурешётки назовём *Φ-инвариантным*, если $\varphi(N) \leqslant N$ для всех $\varphi \in \Phi$ (это, в частности, означает, что $\varphi(N) = N$ для всех $\varphi \in \Phi$, если полугруппа Φ является подгруппой в $\operatorname{Aut} \mathcal{L}$).

Следующее утверждение представляет собой естественное обобщение леммы из работы [КлМ09] (в которой речь идёт о решётке нормальных подгрупп в группе, а в качестве свойства фигурирует полилинейное коммутаторное тождество) и леммы 1 из [KhKMM09] (в которой речь идёт о решётке подгрупп в мультиоператорных группах).

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{M}$ — направленная полурешётка с наибольшим элементом $\sup \mathcal{M}$, $\mathcal{P}$ — монотонное полилинейное t-арное свойство на $\mathcal{M}$, m — натуральное число и $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ — некоторое конечное подмножество в $\mathcal{M}$ такое, что*

$$\mathcal{P}(\underbrace{N, N, \ldots, N}_{m \text{ раз}}, \sup \mathcal{M}, \sup \mathcal{M}, \ldots, \sup \mathcal{M}) \quad \textit{верно для всех } N \in \mathcal{N}.$$

Тогда верно и

$$\mathcal{P}(\underbrace{\widehat{N}, \widehat{N}, \ldots, \widehat{N}}_{m-1 \text{ раз}}, \widehat{G}, \widehat{G}, \ldots, \widehat{G}), \quad \textit{где } \widehat{N} = \inf \mathcal{N} \textit{ и } \widehat{G} = \sup \mathcal{N}.$$

Доказательство. Так как $\mathcal{P}$ монотонно, а $\widehat{G} \leqslant \sup \mathcal{M}$ и $\widehat{N} \leqslant N$ для всех $N \in \mathcal{N}$, мы имеем

$$\mathcal{P}(\underbrace{\widehat{N}, \widehat{N}, \ldots, \widehat{N}}_{m-1 \text{ раз}}, N, \widehat{G}, \ldots, \widehat{G}) \quad \text{верно для всех } N \in \mathcal{N}.$$

Теперь из полилинейности (точнее, из линейности по m-му аргументу) следует доказываемое утверждение.

Пусть $\mathcal{L}$ — нётерова направленная полурешётка и $\Phi \subseteq \operatorname{End} \mathcal{L}$ — некоторая полугруппа её эндоморфизмов. Функцию $\operatorname{codim}\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ назовем *(обобщённой) Φ-коразмерностью*, если она обладает следующими свойствами:

1) $\operatorname{codim} N_1 \leqslant \operatorname{codim} N_2$, если $N_1 \geqslant N_2$;
2) $\operatorname{codim} \varphi(N) \leqslant \operatorname{codim} N$ для любых $N \in \mathcal{L}$ и $\varphi \in \Phi$;
3) $\operatorname{codim}\ \inf(N_1, N_2) \leqslant \operatorname{codim} N_1 + \operatorname{codim} N_2$ для любых $N_1, N_2 \in \mathcal{L}$ и некоторой нижней грани $\inf(N_1, N_2)$;
4) в любом семействе $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}$ найдется $r \leqslant \max\limits_{N \in \mathcal{N}} \operatorname{codim} N + 1$ элементов $N_1, \ldots, N_r$ таких, что

$$\sup \mathcal{N} = \sup(N_1, \ldots, N_r).$$

Это определение коразмерности является естественным обобщением соответствующего понятия из работы [KhKMM09] (в которой речь идёт о решётке нормальных подгрупп в мультиоператорной группе). Если на некоторой полурешётке определена коразмерность, то символом $\inf$ мы всегда будем обозначать нижнюю грань, удовлетворяющую условию 3).

Основная теорема. *Пусть $\mathcal{L}$ — нётерова направленная полурешётка, $\Phi \subseteq \operatorname{End} \mathcal{L}$ — некоторая полугруппа её эндоморфизмов и $\mathcal{P}$ — полимонотонный полилинейный t-арный Φ-инвариантный предикат на $\mathcal{L}$. Тогда, если существует элемент $N \in \mathcal{L}$ со свойством $\mathcal{P}(N, \ldots, N)$, то существует элемент $H \in \mathcal{L}$ такой, что*

1) *элемент H обладает тем же свойством: $\mathcal{P}(H, \ldots, H)$;*
2) *элемент H Φ-инвариантен;*
3) *если $\varphi(N) \leqslant J$ для любого $\varphi \in \Phi$ и некоторого $J \in \mathcal{L}$, то $H \leqslant J$;*
4) *если $\mathcal{L}$ — решётка (то есть каждое конечное множество имеет точную нижнюю грань) и Φ состоит из эндоморфизмов решётки (то есть из отображений, коммутирующих с операциями взятия точной нижней грани конечных множеств), то H содержится в подрешётке, порождённой множеством $\{\varphi(N)\ ;\ \varphi \in \Phi\}$;*
5) *если $\operatorname{codim}\colon \mathcal{L} \to \mathbb{R}$ — обобщенная Φ-коразмерность, то $\operatorname{codim} H \leqslant f^{t-1}(\operatorname{codim} N)$, где $f^k(x)$ означает k-ю итерацию функции $f(x) = x(x+1)$.*

Доказательство. В силу нётеровости полурешётка $\mathcal{L}$ содержит элемент $G_1 = \sup\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi(N)$, причём

$$G_1 = \sup(\varphi'_0(N), \ldots, \varphi'_{p_1}(N)) \quad \text{для некоторых эндоморфизмов } \varphi'_i \in \Phi.$$

Элемент G_1 Φ-инвариантен: $\varphi(G_1) = \sup(\varphi\varphi'_0(N), \ldots, \varphi\varphi'_{p_1}(N)) \leqslant \sup\limits_{\varphi \in \Phi} \varphi(N) = G_1$. При этом $G_1 \leqslant J$ (если J такой, как в пункте 3) теоремы), а если на $\mathcal{L}$ задана коразмерность, то

$$p_1 \leqslant l_0 \overset{\text{опр}}{=} \operatorname{codim} N \quad \text{по свойству 4) коразмерности.}$$

Положим теперь $N_1 = \inf(\varphi'_0(N), \ldots, \varphi'_{p_1}(N))$. По свойствам 2) и 3) коразмерности codim мы имеем

$$l_1 \overset{\text{опр}}{=} \operatorname{codim} N_1 \leqslant (p_1+1) \operatorname{codim} N = (p_1+1) l_0 \leqslant (l_0+1) l_0 = f(l_0).$$

Согласно лемме 1 (применённой к полурешётке $\mathcal{M} = \mathcal{L}$) выполняется свойство

$$\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_1, G_1).$$

Аналогичным образом выберем элементы

$$G_2 = \sup_{\varphi \in \Phi} \varphi(N_1) = \sup(\varphi''_0(N_1), \ldots, \varphi''_{p_2}(N_1)) \ \text{ и } \ N_2 = \inf(\varphi''_0(N_1), \ldots, \varphi''_{p_2}(N_1)), \quad \text{где } \varphi''_i \in \Phi.$$

При этом

$$G_2 \leqslant G_1 \leqslant J \quad \left(\text{так как } N_1 \leqslant \varphi'_0(N), \text{ значит, } G_2 = \sup_{\varphi \in \Phi} \varphi(N_1) \leqslant \sup_{\varphi \in \Phi} \varphi\varphi'_0(N) \leqslant \sup_{\varphi \in \Phi} \varphi(N) = G_1\right) \quad \text{и}$$

$$p_2 \leqslant \operatorname{codim} N_1 = l_1 \leqslant f(l_0) \quad (\text{по свойствам 2) и 4) коразмерности } \operatorname{codim}).$$

Понятно, что элемент G_2 Φ-инвариантен (по тем же причинам, что G_1) и справедливы оценки

$$\operatorname{codim} G_2 \leqslant \operatorname{codim} \varphi_0'' N_1 \leqslant \operatorname{codim} N_1 = l_1 \leqslant f(l_0) \quad \text{и} \quad l_2 \overset{\text{опр}}{=} \operatorname{codim} N_2 \leqslant (p_2+1)\operatorname{codim} N_1 = (p_2+1)l_1 \leqslant f(l_1) \leqslant f(f(l_0)).$$

Снова по лемме 1 (применённой к полурешётке $\mathcal{M} = \{X \in \mathcal{L} \mid X \leqslant G_1\}$) получаем

$$\mathcal{P}(N_2, \ldots, N_2, G_2, G_2).$$

Продолжая в том же духе, на t-ом шаге получим Φ-инвариантный элемент

$$G_t = \sup_{\varphi \in \Phi} \varphi(N_{t-1}) = \sup(\varphi_0^{(t)}(N_{t-1}), \ldots, \varphi_{p_t}^{(t)}(N_{t-1})) \text{ и элемент } N_t = \inf(\varphi_0^{(t)}(N_{t-1}), \ldots, \varphi_{p_t}^{(t)}(N_{t-1})), \text{ где } \varphi_i^{(t)} \in \Phi.$$

При этом выполняются свойство $\mathcal{P}(G_t, \ldots, G_t)$ и неравенства

$$G_t \leqslant J, \qquad \operatorname{codim} G_t \leqslant \operatorname{codim} N_{t-1} = l_{t-1} \leqslant f(l_{t-2}) \leqslant f(f(l_{t-3})) \leqslant \ldots \leqslant f^{t-1}(l_0).$$

Таким образом, элемент $H = G_t$ является искомым и теорема доказана. (Утверждение 4 очевидно из построения).

Следующее утверждение позволяет строить новые полилинейные свойства из известных полилинейных свойств.

Лемма о композиции. *Пусть на некоторой решётке имеется полилинейный монотонный предикат $\mathcal{Q}(M_1, \ldots, M_k)$ и набор предикатов $\mathcal{R} = \left\{\mathcal{R}_i \begin{pmatrix} X_1, \ldots, X_l \\ Y \end{pmatrix}\right\}$, которые по первой строке (то есть при любой фиксированной второй строке) являются полилинейными и монотонными, а по второй строке (то есть при любой фиксированной первой строке) — колинейными и комонотонными. Тогда предикат*

$$\mathcal{Q} \circ \mathcal{R}(N_1, \ldots, N_{kl}) = \left(\exists M_1, \ldots, M_k \quad \mathcal{Q}(M_1, \ldots, M_k) \text{ и для } i \in \{1, \ldots, k\} \;\; \mathcal{R}_i \begin{pmatrix} N_{(i-1)l+1}, \ldots, N_{li} \\ M_i \end{pmatrix}\right),$$

называемый композицией предикатов $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{R}$, является полилинейным и монотонным.

Доказательство. Проверим монотонность, например, по первому аргументу. Если $N_1' \leqslant N_1$ и свойство $\mathcal{Q} \circ \mathcal{R}(N_1, \ldots, N_{kl})$ выполнено (с некоторыми M_i из определения композиции), то свойство $\mathcal{Q} \circ \mathcal{R}(N_1', \ldots, N_{kl})$, разумеется, тоже выполнено (с теми же самыми M_i) в силу монотонности $\mathcal{R}_1$ относительно первой строки.

Проверим полилинейность, например, опять по первому аргументу. Пусть свойства $\mathcal{Q} \circ \mathcal{R}(N_1', N_2, \ldots, N_{kl})$ и $\mathcal{Q} \circ \mathcal{R}(N_1'', N_2, \ldots, N_{kl})$ выполняются, то есть выполнены свойства

$$\mathcal{R}_1 \begin{pmatrix} N_1', N_2, \ldots, N_l \\ M_1' \end{pmatrix}, \; \mathcal{R}_2 \begin{pmatrix} N_{l+1}, \ldots, N_{2l} \\ M_2' \end{pmatrix}, \ldots, \qquad \mathcal{Q}(M_1', \ldots, M_k'),$$
$$\mathcal{R}_1 \begin{pmatrix} N_1'', N_2, \ldots, N_l \\ M_1'' \end{pmatrix}, \; \mathcal{R}_2 \begin{pmatrix} N_{l+1}, \ldots, N_{2l} \\ M_2'' \end{pmatrix}, \ldots \quad \text{и} \quad \mathcal{Q}(M_1'', \ldots, M_k'')$$

для некоторых $M_1', \ldots, M_k', M_1'', \ldots, M_k''$. Мы утверждаем, что тогда выполнены свойства

$$\mathcal{R}_1 \begin{pmatrix} \sup(N_1', N_1''), N_2, \ldots, N_l \\ \sup(M_1', M_1'') \end{pmatrix}, \; \mathcal{R}_2 \begin{pmatrix} N_{l+1}, \ldots, N_{2l} \\ \inf(M_2', M_2'') \end{pmatrix}, \ldots, \quad \text{и} \quad \mathcal{Q}(\sup(M_1', M_1''), \inf(M_2', M_2''), \ldots, \inf(M_k', M_k'')),$$

(то есть свойство $\mathcal{Q} \circ \mathcal{R}(\sup(N_1', N_1''), N_2, \ldots, N_k)$ выполнено, а в качестве $M_1, \ldots, M_k$ достаточно взять $\sup(M_1', M_1'')$, $\inf(M_2', M_2'')$,…, $\inf(M_k', M_k'')$, соответственно). Действительно,

- первое свойство ($\mathcal{R}_1(\ldots)$) выполнено в силу линейности предиката $\mathcal{R}_1$ по первому элементу первой строки и комонотонности по второй строке;
- второе свойство ($\mathcal{R}_2(\ldots)$) выполнено в силу колинейности предиката $\mathcal{R}_2$ по второй строке;
- …
- а последнее свойство ($\mathcal{Q}(\ldots)$) выполнено в силу линейности предиката $\mathcal{Q}$ по первому аргументу и монотонности по остальным аргументам.

Лемма доказана.

Оставшаяся часть работы посвящена применением основной теоремы для групп, алгебр, графов и других структур. В качестве полугруппы Φ в этой работе будет всегда рассматриваться какая-нибудь естественная подгруппа группы $\operatorname{Aut} \mathcal{L}$.

2. Решётка больших нормальных подгрупп

Напомним, что абстрактный класс групп $\mathcal{K}$ называют *радикальным* (или *классом Фиттинга*), если он замкнут относительно нормальных подгрупп и конечных произведений нормальных подгрупп, то есть

1) всякая нормальная подгруппа группы из $\mathcal{K}$ лежит в $\mathcal{K}$;
2) группа, раскладывающаяся в произведение двух нормальных подгрупп, лежащих в $\mathcal{K}$, также лежит в $\mathcal{K}$.

Корадикальным классом (или *формацией*) называют абстрактный класс групп $\mathcal{K}$, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений, то есть такой, что:

1$'$) факторгруппа группы из $\mathcal{K}$ лежит в $\mathcal{K}$;
2$'$) подпрямое произведение двух групп, лежащих в $\mathcal{K}$, также лежит в $\mathcal{K}$.

Подробнее о радикальных и корадикальных классах можно прочитать, например, в книге [Шем78].

Следующие классы групп являются *радикальными формациям*, то есть они и радикальны, и корадикальны:

- конечные группы;
- конечные p-группы;
- локально конечные группы (радикальность вытекает из теоремы О. Ю. Шмидта: *расширение локально конечной группы при помощи локально конечной локально конечно*, см. [КаМ82]);
- периодические группы;
- нётеровы группы;
- артиновы группы;
- нильпотентные группы (радикальность имеет место по теореме Фиттинга, см. [КаМ82]);
- локально нильпотентные группы (радикальность имеет место по теореме Плоткина, см. [КаМ82]);
- разрешимые группы;
- почти разрешимые группы;
- локально полициклические группы (радикальность имеет место по теореме 18.1.2 из [КаМ82]);
- группы, удовлетворяющие нетривиальному тождеству;
- группы, не содержит неабелевых свободных подгрупп;
- аменабельные (дискретные) группы;
- ...

Кроме того, корадикальными классами являются все многообразия групп, класс всех бинарно конечных групп, группы с условием максимальности (или минимальности) для нормальных подгрупп и другие классы.

Теорема о больших подгруппах. *Пусть N — нормальная подгруппа группы G и факторгруппа G/N удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп. Тогда G содержит характеристические подгруппы $H_1, H_2, \ldots$ такие, что*

1) *факторгруппы G/H_t лежат в корадикальном классе (формации) $\mathcal{F}$, порождённом группой G/N; более того подгруппы H_t содержатся в решётке подгрупп группы G, порождённой образами N при всевозможных автоморфизмах группы G;*
2) *для любого полилинейного коммутаторного слова w степени $k \leqslant t$ группа $w(H_t, \ldots, H_t)$ содержится в радикальном классе $\mathcal{R}_w$, порождённом группой $w(N, \ldots, N)$;*
3) *если при этом* codim *— обобщённая коразмерность, определённая на решётке подгрупп, факторгруппы по которым лежат в $\mathcal{F}$, то* $\mathsf{codim}\, H_t \leqslant f^{t-1}(\mathsf{codim}\, N)$, *где $f^k(x)$ означает k-ю итерацию функции $f(x) = x(x+1)$.*

Доказательство. Пусть $K_1, \ldots, K_t$ — нормальные подгруппы группы G и $w(x_1, \ldots, x_t)$ — внешний коммутатор. Тогда

а) подгруппа $w(K_1, \ldots, K_t) \overset{\text{опр}}{=} \langle w(h_1, \ldots, h_t) : h_i \in K_i \rangle$ нормальна в группе G;
б) $w(K_1, \ldots, K_t) = [u(K_1, \ldots, K_r), v(K_{r+1}, \ldots, K_t)]$, если $w(x_1, \ldots, x_t) = [u(x_1, \ldots, x_r), v(x_{r+1}, \ldots, x_t)]$;
в) $w(K_1, \ldots, K_{i-1}, \prod\limits_{N \in \mathcal{N}} N, K_{i+1}, \ldots, K_t) = \prod\limits_{N \in \mathcal{N}} w(K_1, \ldots, K_{i-1}, N, K_{i+1}, \ldots, K_t)$ для произвольного семейства $\mathcal{N}$ нормальных подгрупп группы G.

Эти факты хорошо известны и легко доказываются по индукции.

Осталось применить основную теорему, взяв в качестве $\mathcal{L}$ решётку нормальных подгрупп группы G, порождённую образами N при всевозможных автоморфизмах группы G (эта решётка нётерова, и даже вся формация $\mathcal{F}$ состоит из групп, нётеровых по нормальным подгруппам). В качестве Φ следует взять группу автоморфизмов группы G, а в качестве $\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_t)$ — следующее свойство:

для каждого полилинейного коммутаторного слова w степени не больше t группа $w(N_1, \ldots, N_k)$ содержится в $\mathcal{R}_w$.

Монотонность свойства $\mathcal{P}$ вытекает из замкнутости радикального класса относительно нормальных подгрупп, а полилинейность — из замкнутости радикального класса относительно произведений нормальных подгрупп и свойства в) внешних коммутаторов. Теорема доказана.

Теорема о больших подгруппах обобщает теорему Макаренко–Хухро в трёх направлениях:

- конечность индексов подгрупп N и H, то есть конечность факторгрупп G/N и G/H, заменяется на принадлежность этих факторгрупп любой формации с условием максимальности для нормальных подгрупп,

понятие индекса (точнее логарифма индекса) при этом заменяется на абстрактное понятие коразмерности; это обобщение не является новым, оно было впервые получено в [KhKMM09];
- тождество (то есть единичность вербальной подгруппы) заменяется на принадлежность этой вербальной подгруппы произвольному радикальному классу; например, наша теорема показывает, что *группа, содержащая подгруппу конечного индекса с периодическим сотым коммутантом, содержит характеристическую подгруппу конечного индекса с тем же свойством*;
- наконец, вместо одного полилинейного слова w рассматриваются сразу все полилинейные слова, что даёт значительный выигрыш в оценке, если, например, мы хотим построить характеристическую подгруппу конечного индекса, в которой выполняются все полилинейные тождества степени не выше чем сто, выполненные в данной подгруппе конечного индекса (этого можно добиться многократным применением теоремы Макаренко–Хухро, но оценка индекса станет очень плохой).

Следующие простые факты позволяют применить лемму о композиции, обобщить теорему Макаренко–Хухро ещё в одном направлении и ответить на вопрос Макаренко и Шумяцкого.

Лемма о факторгруппах. *Каждое из следующих двух свойств, $\mathcal{A}(N,M)$ и $\mathcal{B}(N,M)$, пар нормальных подгрупп произвольной группы G может быть записано в виде $\mathcal{R}\begin{pmatrix} N,\dots,N \\ M \end{pmatrix}$, где предикат $\mathcal{R}$ на решётке нормальных подгрупп является по первой строке монотонным и полилинейным, а по второй строке — комонотонным и колинейным:*

$$\mathcal{A}(N,M) = \Big(N/(N\cap M) \text{ удовлетворяет (фиксированному) внешнему коммутаторному тождеству } w=1\Big),$$

$$\mathcal{B}(N,M) = \Big(N/(N\cap M) \text{ принадлежит (фиксированной) радикальной формации } \mathcal{F}\Big).$$

Доказательство. Для свойства $\mathcal{A}$ предикат

$$\mathcal{R}\begin{pmatrix} N_1,\dots,N_t \\ M \end{pmatrix} = \Big(w(N_1,\dots,N_t)\subseteq M\Big)$$

очевидно удовлетворяет всем условиям.

А для свойства $\mathcal{B}$ в качестве $\mathcal{R}$ можно взять само свойство $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{R}\begin{pmatrix} N_1 \\ M \end{pmatrix} = \mathcal{B}(N_1,M).$$

Линейность и монотонность по первой строке вытекают из радикальности класса $\mathcal{F}$, а колинейность и комонотонность по второй строке вытекают из корадикальности класса $\mathcal{F}$.

Лемма о расширениях. *Пусть $\mathcal{Q}(M_1,\dots,M_l)$ — монотонный полилинейный предикат на решётке нормальных подгрупп группы G, w — внешнее коммутаторное слово степени d и $\mathcal{F}$ — радикальная формация. Тогда каждое из следующих двух свойств, $\mathcal{C}(N)$ и $\mathcal{D}(N)$, нормальных подгрупп группы G может быть записано в виде $\mathcal{P}(N,\dots,N)$, где предикат $\mathcal{P}(N_1,\dots,N_t)$ на решётке нормальных подгрупп является монотонным и полилинейным, причём $t=ld$ для свойства $\mathcal{C}$ и $t=l$ для свойства $\mathcal{D}$:*

$$\mathcal{C}(N) = \Big(\exists M\lhd G \quad M\subseteq N,\ \mathcal{Q}(M,\dots,M) \ \text{ и } N/M \text{ удовлетворяет тождеству } w=1\Big),$$

$$\mathcal{D}(N) = \Big(\exists M\lhd G \quad M\subseteq N,\ \mathcal{Q}(M,\dots,M) \ \text{ и } N/M\in\mathcal{F}\Big).$$

Доказательство. Ясно, что свойство $\mathcal{C}(N)$ можно переписать в эквивалентном виде

$$\mathcal{C}(N) = \big(\exists M\lhd G \quad \mathcal{A}(N,M) \text{ и } \mathcal{Q}(M,\dots,M)\big), \qquad \text{где } \mathcal{A} \text{ из леммы о факторгруппах.}$$

Теперь заметим, что последняя формула эквивалентна такой:

$$\mathcal{C}(N) = \Big(\exists M_1,\dots,M_l\lhd G \quad \mathcal{A}(N,M_1),\ \dots,\ \mathcal{A}(N,M_l) \text{ и } \mathcal{Q}(M_1,\dots,M_l)\Big).$$

Чтобы в этом убедиться (в неочевидную сторону) достаточно положить $M=\bigcap M_i$ и вспомнить, что многообразие групп, заданных тождеством $w=1$, замкнуто относительно подпрямых произведений, а свойство $\mathcal{Q}$ монотонно. В силу леммы о факторгруппах мы можем это свойство переписать в виде

$$\mathcal{C}(N) = \left(\exists M_1,\dots,M_l\lhd G \quad \mathcal{R}\begin{pmatrix} N,\dots,N \\ M_1 \end{pmatrix},\ \dots,\ \mathcal{R}\begin{pmatrix} N,\dots,N \\ M_l \end{pmatrix} \quad \text{и } \mathcal{Q}(M_1,\dots,M_l)\right),$$

где предикат $\mathcal{R}$ на решётке нормальных подгрупп является по первой строке монотонным и полилинейным, а по второй строке — комонотонным и колинейным.

Ссылка на лемму о композиции завершает доказательство. Для свойства $\mathcal{D}$ рассуждения полностью аналогичны.

Следующее утверждение доказано в работе [MSh12] для случая, когда группа G локально конечна, а каждый класс $\mathcal{K}_i$ является классом всех локально нильпотентных групп.

Теорема о рядах. *Пусть группа G содержит подгруппу N конечного индекса, обладающую нормальным в G рядом*

$$\{1\} = A_0 \subseteq \ldots \subseteq A_n = N,$$

в котором каждый фактор A_i/A_{i-1} либо удовлетворяет полилинейному коммутаторному тождеству $w_i = 1$ веса t_i, либо лежит в радикальном классе $\mathcal{K}_i$, причём все эти классы, кроме быть может $\mathcal{K}_1$, являются одновременно корадикальными. Тогда G содержит характеристическую подгруппу конечного индекса с тем же свойством (то есть с рядом такой же длины, каждый фактор которого удовлетворяет тому же тождеству или лежит в том же классе, что соответствующий фактор исходного ряда), причём $\log_2|G:H| \leqslant f^{t-1}(\log_2|G:N|)$, где $f^k(x)$ — это k-ая итерация функции $f(x) = x(x+1)$ и $t = \prod t_i$.

Доказательство. Лемма о расширениях и очевидная индукция показывают, что наличие у нормальной подгруппы N такого нормального ряда записывается в виде $\mathcal{P}(N,\ldots,N)$, где $\mathcal{P}$ — некоторый полилинейный монотонный предикат от t аргументов на решётке нормальных подгрупп группы G. Осталось сослаться на основную теорему.

Отметим, что для случая, когда группа G локально конечна, а каждый класс $\mathcal{K}_i$ является классом всех локально нильпотентных групп, в работе [MSh12] доказано несколько более сильное утверждение: в группе G найдётся характеристическая подгруппа конечного индекса, обладающая характеристическим рядом с указанным свойством. В общем случае, такое усиление невозможно, как показывает следующий пример, принадлежащий Иву Корнулье.

Пример [Corn13]. *Существует группа, обладающая нормальной абелевой подгруппой счётного индекса, но не имеющая абелевых характеристических подгрупп счётного индекса.*
Возьмём счётномерное векторное пространство V с базисом $\{e_q\}$, где $q \in \mathbb{Q}$, над конечным полем K и рассмотрим группу G «унитреугольных» операторов, то есть таких операторов g в V, что $ge_q - e_q \in \langle\{e_r : r < q\}\rangle$. В группе G рассмотрим подгруппу H, состоящую из матриц A, обладающих тем свойством, что для любого вещественного числа r лишь конечное число их ненулевых элементов a_{pq} таковы, что $p \neq q$ и либо $p > r$, либо $q < r$. Тогда группа H обладает абелевой нормальной подгруппой счётного индекса, состоящей из матриц A, у которых все ненулевые недиагональные элементы a_{pq} таковы, что либо $p < 0$, либо $q > 0$. А нетривиальных характеристических абелевых подгрупп группа H не имеет. Действительно, если $1 \neq h \in N \triangleleft H$, то коммутатор c элемента h и любой трансвекции снова лежит в N и имеет лишь конечное число ненулевых недиагональных элементов и, следовательно, c лежит в конечномерной унитреугольной группе $\mathbf{UT}_n(K)$, которая является нильпотентной и, значит, любая её нетривиальная нормальная подгруппа нетривиально пересекается с центром (который состоит из трансвекций). Таким образом, любая нетривиальная нормальная подгруппа группы H содержит трансвекции. Осталось заметить, что все трансвекции переводятся друг в друга автоморфизмами группы H, то есть нетривиальная характеристическая подгруппа группы H обязана содержать все трансвекции и, значит, не может быть абелевой.

3. Решётка маленьких подгрупп. «Котеорема Макаренко–Хухро»

Рассмотрим произвольную универсальную позитивную замкнутую формулу первого порядка в групповом языке, например,

$$(\forall x)(\forall y)\ \Big(\big(x^3 = y^3\ \wedge\ (xy)^4 = (yx)^4\big)\ \ \vee\ \ (xy)^{2014} = 1\ \ \vee\ \ [x,y]^5 = 1\Big).$$

Каждая такая формула определяет класс групп, состоящий из групп, в которых выполняется данная формула. Например, формула $(\forall x)\ (x^2 = 1\ \vee\ x^3 = 1)$ выполняется в симметрической группе порядка шесть, но не выполняется в абелевой группе порядка шесть.

Следующая теорему можно рассматривать как двойственную к теореме Макаренко–Хухро.

Теорема о конечных подгруппах. *Если в группе G есть конечная нормальная подгруппа, в факторгруппе по которой выполняется некоторая универсальная позитивная замкнутая формула, то в группе G есть характеристическая конечная подгруппа с тем же свойством.*

Мы будем доказывать более общее утверждение, похожее на теорему о больших подгруппах. Рассмотрим свойство $\mathcal{D}(N)$ нормальной подгруппы N группы G, имеющее вид

$$(\forall x)(\forall y)\ldots\left(\mathcal{S}(x,y,\ldots) \Longrightarrow \bigvee_{i=1}^{t}(G/N, xN, yN, \ldots) \in \mathcal{F}_i\right), \qquad (*)$$

где $\mathcal{S}$ — любое $(\operatorname{Aut} G)$-инвариантное свойство наборов элементов группы G и $\mathcal{F}_i$ — произвольные формации групп с отмеченными элементами.

Формация групп с отмеченными элементами — это класс наборов $(H, h_1, h_2, \ldots)$, где H — группа и $h_i \in H$, замкнутый относительно гомоморфных образов и подпрямых произведений (которые определяются естественным образом). Примером такой формации может служить класс аменабельных групп с двумя выделенными элементами, коммутатор которых лежит в центре.

Свойства вида $(*)$ нормальных подгрупп мы называем *t-дизъюнктными*.

Теорема о маленьких подгруппах. *Если радикальный класс, порождённый нормальной подгруппой N группы G, состоит из групп с условием минимальности для нормальных подгрупп, то G содержит характеристические подгруппы $H_1, H_2, \ldots$ такие, что*

1) *H_t лежат в радикальном классе $\mathcal{R}$, порождённом группой N; более того, подгруппы H_t содержатся в решётке подгрупп группы G, порождённой автоморфными образами подгруппы N;*
2) *факторгруппа G/H_t удовлетворяет всем t-дизъюнктным свойствам, которым удовлетворяет факторгруппа G/N;*
3) *если при этом* codim *— обобщённая коразмерность* (которую логичнее называть размерностью в данном случае), *определённая на решётке двойственной к решётке подгрупп, лежащих в $\mathcal{R}$, то* $\operatorname{codim} H_t \leqslant f^{t-1}(\operatorname{codim} N)$, *где $f^k(x)$ означает k-ю итерацию функции $f(x) = x(x+1)$.*

Доказательство. Каждое t-дизъюнктное свойство $\mathcal{D}(N)$ можно переписать в виде $\mathcal{D}(N) = \mathcal{P}_\mathcal{D}(N, \ldots, N)$, где $\mathcal{P}_\mathcal{D}(N_1, \ldots, N_t)$ представляет собой следующее свойство набора нормальных подгрупп:

$$(\forall x)(\forall y)\ldots\left(\mathcal{S}(x, y, \ldots) \Longrightarrow \bigvee_{i=1}^{t} (G/N_i, xN_i, yN_i, \ldots) \in \mathcal{F}_i\right).$$

Теперь всё вытекает из основной теоремы. В качестве решётки $\mathcal{L}$ следует взять решётку подгрупп группы G, порождённую образами подгруппы N при всевозможных автоморфизмах группы G, но порядок на этой решётке надо рассматривать противоположный естественному:

$$A \leqslant B, \quad \text{если} \quad A \supseteq B.$$

Эта решётка нётерова, так как состоит из нормальных подгрупп в G, артиновых по нормальным подгруппам. В качестве Φ надо взять группу автоморфизмов группы G, а в качестве свойства $\mathcal{P}$ следует взять конъюнкцию всех свойств $\mathcal{P}_\mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ пробегает все t-дизъюнктные свойства, выполненные в N.

Монотонность свойства $\mathcal{P}$ очевидным образом вытекает из замкнутости формаций относительно факторгрупп, а полилинейность — из замкнутости формаций относительно подпрямых произведений. Проверим, например, линейность по первому аргументу. Надо доказать, что свойство $\mathcal{P}_\mathcal{D}(N_1' \cap N_1'', N_2, \ldots)$ выполнено, если известно, что выполнены свойства $\mathcal{P}_\mathcal{D}(N_1', N_2, \ldots)$ и $\mathcal{P}_\mathcal{D}(N_1'', N_2, \ldots)$. Это значит, что нам известно, что для любого набора элементов $g, h, \ldots \in G$, обладающего свойством $\mathcal{S}$,

- либо $(G/N_i,\, gN_i,\, hN_i, \ldots) \in \mathcal{F}_i$ при некотором $i \geqslant 2$,
- либо формация $\mathcal{F}_1$ содержит две группы с отмеченными элементами:
  $(G/N_1',\, gN_1',\, hN_1', \ldots)$ и $(G/N_1'',\, gN_1'',\, hN_1'', \ldots)$,
  а значит, и их подпрямое произведение $(G/(N_1' \cap N_1''),\, g(N_1' \cap N_1''),\, h(N_1' \cap N_1''), \ldots)$.

Это означает, что свойство $\mathcal{P}_\mathcal{D}(N_1' \cap N_1'', N_2, \ldots)$ выполнено и теорема доказана.

Теорема о конечных подгруппах получается из теоремы о маленьких подгруппах, если в качестве каждой из формаций $\mathcal{F}_i$ взять класс всех групп, выделенные элементы которых удовлетворяют какой-то системе уравнений (зависящей от i). Мы ограничимся одним конкретным примером.

Теорема о спектре. *Для любой конечной нормальной подгруппы N группы G ограниченного периода найдётся характеристическая конечная подгруппа H такая, что спектр* (то есть множество всех порядков элементов) *факторгруппы G/H содержится в спектре факторгруппы G/N.*

Доказательство. Достаточно применить теорему о конечных подгруппах к формуле $\forall x \bigvee_{i=1}^{t} (x^{n_i} = 1)$, где $\{n_1, \ldots, n_t\}$ — это спектр группы G/N.

Порядок характеристической подгруппы H явно оценивается через порядок подгруппы N и мощность спектра факторгруппы G/N (поскольку логарифм порядка подгруппы — это естественный пример коразмерности на решётке конечных нормальных подгрупп). Слово «конечная» (оба раза) в теореме о спектре можно заменить на «артинова» или, например, «черниковская» и т.п. Слово «спектр» (оба раза) можно заменить, например, на «спектр коммутанта», для этого надо в качестве свойства $\mathcal{S}(x)$ написать, что x лежит в коммутанте.

В заключение мы приведём пример, показывающий, что теорему о конечных подгруппах нельзя распространить на произвольные позитивные (неуниверсальные) формулы первого порядка.

Пример. В группе $G = \langle a \rangle_2 \times B$, где B — абелева делимая группа, содержащая бесконечное число элементов порядка два (например, $B = (\mathbb{Z}_{2^\infty})^\infty$), есть очевидная конечная нормальная подгруппа $N = \langle a \rangle_2$, в факторгруппе по которой любой элемент является квадратом (то есть выполнена формула $\forall x\ \exists y\ x = y^2$), но нет характеристической конечной подгруппы с таким свойством. Действительно, понятно, что такая характеристическая подгруппа H не может содержаться в B. Возьмём элемент $(a, b) \in H$ и рассмотрим его образы при автоморфизмах, которые элементы из B оставляют на месте, а a переводят в (a, x), где x — произвольный элемент порядка два из B. Эти образы (a, bx) образуют бесконечное подмножество в H.

4. Решётки идеалов и подпространств

Под *алгеброй* в этом параграфе понимается необязательно ассоциативная алгебра над произвольным полем. *Характеристическим* подпространством в алгебре мы называем подпространство, инвариантное относительно всех автоморфизмов этой алгебры.

Теорема о больших подпространствах. *Пусть N — подпространство алгебры G и*
- *либо N имеет конечную коразмерность,*
- *либо N левый идеал и фактормодуль G/N нётеров,*
- *либо N двусторонний идеал и факторалгебра G/N удовлетворяет условию максимальности для двусторонних идеалов.*

Тогда G содержит характеристические подпространства $H_1, H_2, \dots$ такие, что
1) *подпространства H_t содержатся в решётке подпространств алгебры G, порождённой образами N при всевозможных автоморфизмах алгебры G; в частности, подпространства H_t являются идеалами (односторонними или двусторонними), если N является идеалом, и факторалгебра (фактормодуль) G/H_t лежат в формации $\mathcal{F}$, порождённой алгеброй (модулем) G/N;*
2) *для любого полилинейного элемента $w(x_1, \dots, x_n)$ свободной (неассоциативной) алгебры, имеющего степень $n \leqslant t$, множество $w(H_t, \dots, H_t)$ содержится в линейной оболочке конечного числа образов множества $w(N, \dots, N)$ при автоморфизмах алгебры G;*
3) *Если при этом* codim *— это либо обычная коразмерность (подпространства в G), либо обобщённая коразмерность, определённая на решётке идеалов, факторалгебры (фактормодули) по которым лежат в $\mathcal{F}$, то* $\mathsf{codim}\, H_t \leqslant f^{t-1}(\mathsf{codim}\, N)$, *где $f^k(x)$ означает k-ю итерацию функции $f(x) = x(x+1)$.*

Доказательство почти дословно повторяет доказательство теоремы о больших подгруппах; надо только сделать очевидные замены (слово «группа» заменять на «алгебра» и так далее).

Подобным же образом можно сформулировать и доказать аналог теоремы о маленьких подгруппах. Мы ограничимся формулировкой аналога теоремы о конечных подгруппах.

Теорема о конечномерных идеалах. *Если в алгебре G есть конечномерный двусторонний идеал, в факторалгебре по которому выполняется некоторая фиксированная универсальная позитивная замкнутая формула первого порядка (в языке алгебр над данным полем), то в алгебре G есть характеристический конечномерный двусторонний идеал с тем же свойством.*

5. Решётка конечных подграфов

Слово *граф* в этом параграфе можно понимать в любом разумном смысле: все утверждения верны и для ориентированных графов, и для неориентированных; кратные рёбра и петли можно допускать, а можно и запрещать; можно считать вершины и/или рёбра раскрашенными. В теореме о запрещённых подграфах и в теореме о локальной вложимости можно даже понимать слово «граф» как гиперграф. Все эти вариации не влияют на доказательства, если конечно автоморфизмы графа понимать в соответствующем смысле.

Теорема о запрещённых подграфах. *Пусть $\{\Gamma_1, \dots, \Gamma_l\}$ — конечный набор конечных графов, называемых запрещёнными и рассматриваемых с точностью до изоморфизма, и G — некоторый граф. Если из графа G можно удалить конечное множество ребер $\overline{N}$ таким образом, что $G \setminus \overline{N}$ не содержит запрещённых подграфов, то из G можно удалить конечное инвариантное относительно всех автоморфизмов графа G множество ребер $\overline{H}$ с тем же свойством: $G \setminus \overline{H}$ не содержит запрещённых подграфов. При этом $|\overline{H}| \leqslant f^{t-1}(|\overline{N}|)$, где $f^k(x)$ означает k-ю итерацию функции $f(x) = x(x+1)$, а t — максимальное (по i) число рёбер в Γ_i. Кроме того, если $\overline{H} \neq \varnothing$, то $\overline{H} \cap \overline{N} \neq \varnothing$.*

Доказательство. Достаточно применить основную теорему к решётке, элементы которой суть коконечные подмножества множества рёбер графа G. Ясно, что эта решётка нётерова, а функция

$$\mathsf{codim}\,(X) \overset{\text{опр}}{=} \text{число рёбер графа } G \setminus X$$

удовлетворяет всем условиям из определения коразмерности. В качестве полугруппы Φ следует взять группу автоморфизмов графа G, а в качестве $\mathcal{P}(N_1, \dots, N_t)$ можно взять следующее свойство:

в G не существует запрещённого подграфа, у которого первое ребро лежит в N_1, второе ребро лежит в N_2,...

Мы имеем в виду, что мы каким-то образом занумеровали рёбра каждого запрещённого графа. Ясно, что свойство $\mathcal{P}$ монотонно:

$$\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_t) \Longrightarrow \mathcal{P}(N'_1, \ldots, N'_t), \quad \text{если } N'_i \subseteq N_i.$$

Полилинейность тоже очевидна:

$$\big(\mathcal{P}(N'_1, N_2 \ldots, N_t) \wedge \mathcal{P}(N''_1, N_2 \ldots, N_t)\big) \Longrightarrow \mathcal{P}(N'_1 \cup N''_1, N_2 \ldots, N_t).$$

Осталось применить основную теорему и заметить, что свойство $\mathcal{P}(N, \ldots, N)$ означает в точности отсутствие запрещённых подграфов в N.

То что $\overline{H} = G \setminus H$ пересекается с $\overline{N} = G \setminus N$ следует из того, что согласно основной теореме H содержится в подрешётке, порождённой всеми образами множества N при автоморфизмах графа G. В частности, $H \supseteq \bigcap\limits_{\varphi \in \operatorname{Aut} G} \varphi(N)$, то есть $\overline{H} \subseteq \bigcup\limits_{\varphi \in \operatorname{Aut} G} \varphi(\overline{N})$. Следовательно, если $\overline{H} \neq \varnothing$, то $\overline{H} \cap \varphi(\overline{N}) \neq \varnothing$ для некоторого $\varphi \in \operatorname{Aut} G$. В силу инвариантности $\overline{H}$ это означает, что $\overline{H} \cap \overline{N} \neq \varnothing$, что и требовалось. Теорема доказана.

Эту теорему можно значительно усилить, если не заботиться об оценке числа выбрасываемых рёбер. Скажем, что граф X ***локально вложим*** в граф Y, если любой конечный подграф графа X изоморфен некоторому подграфу графа Y.

Теорема о локальной вложимости. *Для любого графа G и любого конечного множества $\overline{N}$ его рёбер найдётся конечное множество рёбер $\overline{H}$, инвариантное относительно всех автоморфизмов графа G и такое, что граф $H = G \setminus \overline{H}$ локально вложим в граф $N = G \setminus \overline{N}$.*

Доказательство. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ — все конечные графы, не вложимые в N. Нам надо показать, что

все подграфы графа G, изоморфные Γ_i, можно разрушить путём удаления из G конечного $(\operatorname{Aut} G)$-инвариантного множества рёбер $\overline{H}$; если известно, что эти подграфы можно разрушить путём удаления из G какого-то конечного множества рёбер $\overline{M}$.

Доказывать это утверждение мы будем индукцией по $|\overline{M}|$. Вначале $\overline{M} = \overline{N}$.

По теореме о запрещённых подграфах для каждого натурального n существует конечное множество рёбер $\overline{H}_n$ графа G такое, что

1) $\overline{H}_n$ инвариантно относительно всех автоморфизмов графа G;
2) графы $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ не вложимы в $H_n = G \setminus \overline{H}_n$;
3) $\overline{H}_n \cap \overline{M} \neq \varnothing$, если $\overline{H}_n \neq \varnothing$.

Если все множества $\overline{H}_n$ пусты, то доказывать нечего. Если же найдётся непустое множество $\overline{H}_k$, то рассмотрим граф $G' = H_k = G \setminus \overline{H}_k$. В этом графе есть конечное множество рёбер $\overline{M}' = \overline{M} \setminus (\overline{M} \cap \overline{H}_k)$ такое, что в $G' \setminus \overline{M}'$ не вложим ни один из Γ_i.

При этом $|M'| < |M|$ по свойству 3) множества $\overline{H}_k$. Значит, по предположению индукции в G' содержится конечное инвариантное множество рёбер $\overline{H}'$ такое, что ни один из графов Γ_i не вложим в $G' \setminus \overline{H}' = G \setminus (\overline{H}_k \cup \overline{H}')$, что и требовалось, так как $\overline{H}_k \cup \overline{H}'$ — это инвариантное множество. Действительно, $\overline{H}_k$ по определению инвариантно относительно всех автоморфизмов графа G, а $\overline{H}'$ инвариантно относительно $\operatorname{Aut} G'$, и, тем более, относительно $\operatorname{Aut} G$, поскольку G' — это $(\operatorname{Aut} G)$-инвариантный подграф в G. Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим неориентированный граф G, гомеоморфный прямой, и граф N, получающийся из G удалением одного ребра. Ясно, что из G нельзя удалить конечное инвариантное относительно всех автоморфизмов множество рёбер так, чтобы получившийся граф H был вложим в N (поскольку группа автоморфизмов графа G действует транзитивно на рёбрах). Этот пример показывает, что в теореме нельзя заменить локальную вложимость на вложимость. (А для локальной вложимости H в N в этом простейшем случае достаточно взять $H = G$, то есть удалить пустое множество рёбер.)

Теорема о планарности. *Если граф можно сделать планарным путём удаления конечного числа рёбер, то его можно сделать планарным путём удаления конечного множества рёбер, инвариантного относительно всех автоморфизмов графа.*

Доказательство. По теореме Куратовского–Эрдёша–Вагнера [Wag67] граф планарен тогда и только тогда, когда

- число его рёбер не превосходит континуума;
- число его вершин степени большей чем два счётно (или конечно);
- он не содержит подграфов гомеоморфных полному графу на пяти вершинах K_5 или полному двудольному графу с тремя вершинами в каждой доле $K_{3,3}$ (рис. 1), то есть подграфов, которые получаются из K_5 или $K_{3,3}$ при помощи разбиения ребер.

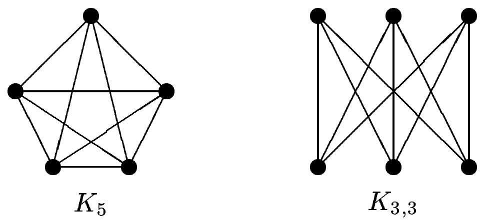

Рис. 1

На первые два свойства удаление или добавление конечного числа рёбер не влияет, а третье свойство переносится с графа на все графы, локально вложимые в него. Поэтому утверждение немедленно вытекает из теоремы о локальной вложимости.

Следующее утверждение показывает, что в теореме о планарности не может быть никакой оценки мощности инвариантного выбрасываемого множества рёбер.

Утверждение. *Для каждого натурального n существует конечный граф G_n, который становится планарным после удаления пяти рёбер, но который нельзя сделать планарным путём удаления инвариантного множества, состоящего менее чем из n рёбер.*

Доказательство. Возьмём граф K_5 и разобьём каждое ребро одного из циклов длины пять в этом графе на n частей. Склеим теперь n копий получившегося графа вдоль этого цикла длины $5n$ с поворотом (рис. 2).

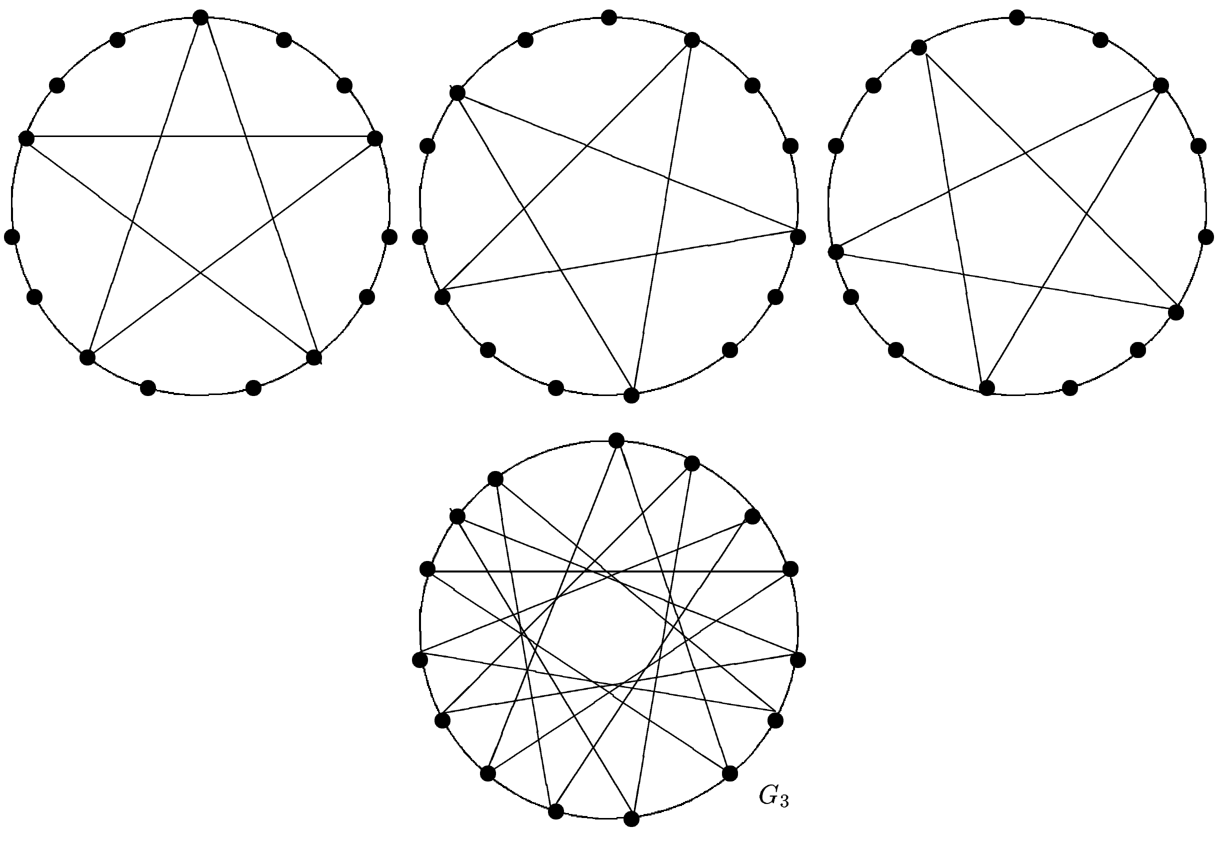

Рис. 2

Полученный граф G_n становится планарным после удаления пяти рёбер — каждого n-го ребра на упомянутом цикле длины $5n$ (рис. 3). Однако удаление маленького инвариантного множества рёбер не сделает этот граф планарным, поскольку среди автоморфизмов графа G_n есть поворот на одно ребро вдоль нашего цикла длины $5n$ и, следовательно, орбита каждого ребра состоит не менее чем из n элементов. Поэтому инвариантное множество рёбер, содержащее меньше чем n элементов, обязано быть пустым. Осталось заметить, что сам граф G_n непланарен, так как он содержит подграф, гомеоморфный K_5.

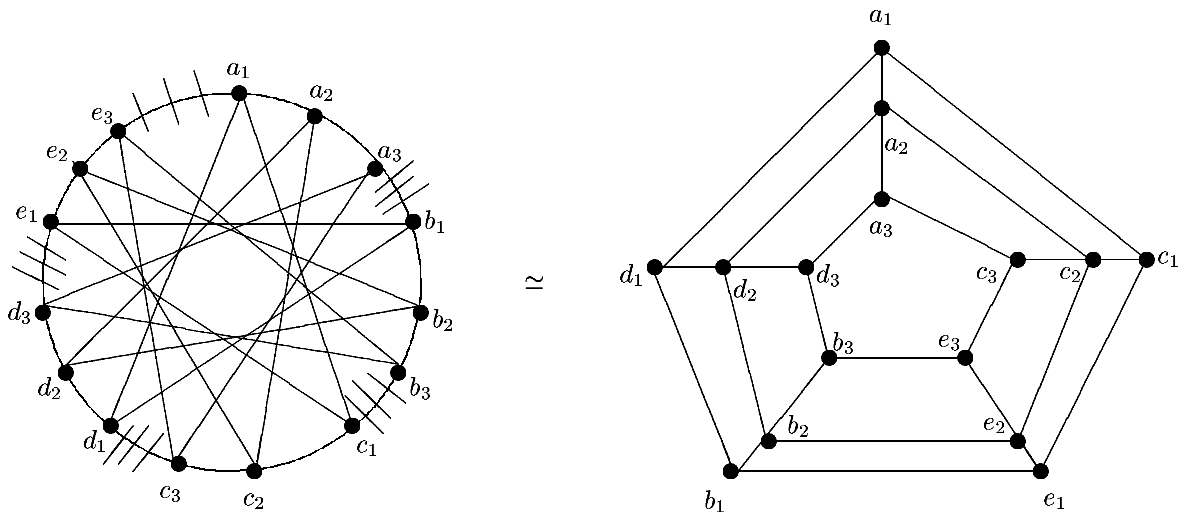

Рис. 3

В заключение отметим, что по крайней мере для счётных графов, верен аналог теоремы о планарности, в котором планарность заменяется на вложимость в любую фиксированную поверхность. Чтобы в этом убедиться достаточно вспомнить теорему Эрдёша, которая говорит, что счётный граф вкладывается в поверхность S тогда и только тогда, когда каждый его конечный подграф вкладывается в S.

6. Элементарная математика

Задача 1. *В трёхмерном евклидовом пространстве имеется некоторое множество точек X. Известно, что из этого множества можно удалить конечное множество точек так, что никакие 2014 из оставшихся точек не будут лежать на одной сфере. Покажите, что это конечное множество можно выбрать инвариантным относительно всех симметрий(=изометрий) множества X.*

Решение. Достаточно применить основную теорему, взяв в качестве решётки $\mathcal{L}$ решётку коконечных подмножеств множества X (она очевидно нётерова), в качестве Φ — группу симметрий множества X, а в качестве $\mathcal{P}$ следующий 2014-линейный Φ-инвариантный монотонный предикат:

$$\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_{2014}) = (\text{никакие точки } x_1 \in N_1, \ldots, x_{2014} \in N_{2014} \text{ не лежат на одной сфере}).$$

В данном случае имеется и естественная коразмерность: $\mathsf{codim}\,(X \setminus K) \overset{\text{опр}}{=} |K|$, что позволяет оценить мощность симметричного выкидываемого множества через мощность исходного множества K.

Задача 2. *Для полёта на Марс отобрали 10^{100} прекрасных во всех отношениях претендентов. Единственная проблема состоит в том, что они не очень уважительно друг к другу относятся. Но организаторы заметили, что если десять человек исключить, то получится работоспособный коллектив в том смысле, что среди любых пяти найдётся по крайней мере один, которого большинство (из этой пятёрки) уважает. Покажите, что из претендентов можно сформировать непустой работоспособный коллектив, исключив несколько человек справедливо, то есть так, что множество исключённых будет инвариантно относительно любой перестановки претендентов, сохраняющей отношение «уважает». (Разумеется, бинарное отношение «уважает» необязано быть ни транзитивным, ни симметричным, ни даже рефлексивным.)*

Решение. Достаточно применить основную теорему, взяв в качестве решётки $\mathcal{L}$ решётку всех подмножеств множества претендентов X (она очевидно нётерова), в качестве Φ — группу перестановок множества X, сохраняющих отношение «уважает», а в качестве $\mathcal{P}$ следующий пенталинейный Φ-инвариантный монотонный предикат:

$$\mathcal{P}(N_1, \ldots, N_5) = (\text{любые претенденты } x_1 \in N_1, \ldots, x_5 \in N_5 \text{ образуют работоспособную пятёрку}).$$

Имеется естественная коразмерность: $\mathsf{codim}\,(X \setminus K) \overset{\text{опр}}{=} |K|$, что позволяет оценить число справедливо исключаемых претендентов:

$$\mathsf{codim}\, H \leqslant f^{t-1}(\mathsf{codim}\, N) = f^{5-1}(10) < \frac{11}{10} \cdot \left(\frac{11}{10} \cdot \left(\frac{11}{10} \cdot \left(\frac{11}{10} \cdot 10^2 \right)^2 \right)^2 \right)^2 = \left(\frac{11}{10} \right)^{15} \cdot 10^{16} = 11^{15} \cdot 10 \ll 10^{100},$$

то есть оставшийся работоспособный коллектив будет непустым.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[БеК03] Беляев В.В., Кузуджуоглу М. Локально конечные едва транзитивные группы // Алгебра и Логика. 2003. Т.42. №3. С.261–270.

[КаМ82] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

[КлМ09] Клячко Ант. А., Мельникова Ю.Б. Короткое доказательство теоремы Макаренко–Хухро о больших характеристических подгруппах с тождеством // Мат. сборник, 2009, 200:5, 33–36. См. также arXiv:0805.2747 .

[Кур62] Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Физ.-мат. лит., 1962.

[Шем78] Шеметков Л.А. Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.

[AST13] A. Arikan, H. Smith, N. Trabelsi, On certain application of the Khukhro–Makarenko theorem, Glasgow Math. J. 55(2013), 275–283.

[BrNa04] Bruno B., Napolitani F. A note on nilpotent-by-Černikov groups // Glasgow Math. J. 2004. 46, 211-215.

[Corn13] Y. Cornulier (http://mathoverflow.net/users/14094/yves-cornulier), Large abelian characteristic subgroups in abelian-by-countable groups, URL (version: 2013-12-15): http://mathoverflow.net/q/151889

[Higg56] P. J. Higgins, Groups with multiple operators, Proc. London Math. Soc. (3) 6 (1956), 366-416.

[KhM07a] Khukhro E.I., Makarenko N.Yu. Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities // J. London Math. Soc. 2007. V.75. no.3, P.635–646.

[KhM07b] Khukhro E.I., Makarenko N.Yu. Characteristic nilpotent subgroups of bounded co-rank and automorphically-invariant ideals of bounded codimension in Lie algebras // Quart. J. Math. 2007. V.58. P.229–247.

[KhM08] Khukhro E.I., Makarenko N.Yu. Automorphically-invariant ideals satisfying multilinear identities, and group-theoretic applications // J. Algebra 2008. V.320. no.4. P.1723–1740.

[KhKMM09] E. I. Khukhro, Ant. A. Klyachko, N. Yu. Makarenko, and Yu. B. Melnikova Automorphism invariance and identities. Bull. London Math. Soc. (2009), 41(5): 804-816. См. также arXiv:0812.1359

[MSh12] N.Yu. Makarenko, P. Shumyatsky, Characteristic subgroups in locally finite groups, Journal of Algebra, (2012), 352:1, 354–360.

[Wag67] K. Wagner, Fastplättbare Graphen, J. Combinatorial Theory. (1967), 3, 326–365.