УДК 512.544.44+512.543.22+512.552.16+512.552.4 MSC: 20E36, 20E10, 17A30, 17A36

ИНВАРИАНТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО АВТОМОРФИЗМОВ И ТОЖДЕСТВА

Антон А. Клячко[♭] Наталья Ю. Макаренко[♯♮] Юлия Б. Мельникова[♭] Евгений И. Хухро[♯]

[♭] *Мех-мат факультет Московского государственного университета, Москва 119991, Ленинские горы, МГУ.*

[♯] *Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск 630090, проспект ак. Коптюга 4.*

[♮] *Université de Haute Alsace (UHA)*

klyachko@mech.math.msu.su makarenk@math.nsc.ru yuliamel@mail.ru khukhro@yahoo.co.uk

Если внешнее (полилинейное) коммутаторное тождество выполняется в большой подгруппе некоторой группы, то оно выполняется также в некоторой большой характеристической подгруппе. Аналогичные утверждения справедливы для алгебр и их идеалов или подпространств. Варьируя значение слова «большой», мы получаем много интересных фактов. Для произвольных (неполилинейных) тождеств аналогичные утверждения, вообще говоря, неверны. В качестве приложения полученных результатов мы получаем неулучшаемую оценку на ступень почти разрешимости расширений почти разрешимых групп при помощи почти разрешимых.

0. Введение

В работе [KhM07a] показано, что каждая группа, почти удовлетворяющая внешнему коммутаторному тождеству, содержит характеристическую подгруппу конечного индекса, удовлетворяющую этому тождеству. Аналогичный результат был получен в [KhM08] для идеалов в произвольных алгебрах (роль индекса в этом случае играет коразмерность). Ещё один похожий результат можно найти в [KhM07b]: если конечная p-группа G содержит нормальную нильпотентную ступени t подгруппу N, то она содержит также характеристическую нильпотентную той же ступени подгруппу H, коранг которой ограничен некоторой функцией от коранга подгруппы N и числа t. В работе [КлМ09] было найдено новое, гораздо более короткое доказательство теоремы об индексе и получена более хорошая оценка индекса характеристической подгруппы.

В этой статье мы обобщаем рассуждение из [КлМ09] на широкий класс алгебраических систем, заменяя свойство конечности индекса некоторым абстрактным свойством «малости», индекс при этом заменяется на некоторую абстрактную «коразмерность». Общая теорема, которую мы доказываем в параграфе 3, включает в себя все результаты, перечисленные выше, как частные случаи. Более того, имеется много новых приложений. Например, полученная теорема охватывает случай конечных p-групп с нормальной подгруппой ограниченного коранга, удовлетворяющей произвольному внешнему коммутаторному тождеству (а не только тождеству нильпотентности, как в [KhM07b]).

С другой стороны, мы показываем, что оригинальные рассуждения из работ [KhM07a], [KhM07b] и [KhM08] дают несколько больше. А именно, в любой группе число подгрупп конечного индекса, являющихся максимальными (по включению) среди всех нормальных подгрупп, удовлетворяющих данному внешнему коммутаторному тождеству, конечно. Это означает, в частности, что характеристическую подгруппу конечного индекса можно найти внутри любой подгруппы конечного индекса, максимальной среди всех нормальных подгрупп с данным тождеством. Аналогичные более сильные результаты справедливы для алгебр над полями.

Для полноты картины мы приведём более ранние известные нам результаты на эту тему. Пусть G — группа и N — её подгруппа конечного индекса. Тогда

- внутри N найдётся нормальная в G подгруппа конечного индекса (делящего $|G:N|!$);
- если группа G конечно порождена, то внутри N найдётся вполне характеристическая (и даже вербальная) в G подгруппа конечного индекса;
- если подгруппа N абелева, то в G найдётся характеристическая абелева подгруппа конечного индекса.

Эти факты хорошо известны и их можно найти в учебниках по теории групп (см., например, [КаМ82]). Отметим ещё, что в работе [БеК03] было доказано, что из наличия t-ступенно разрешимой подгруппы конечного индекса следует наличие характеристической разрешимой подгруппы конечного индекса ступени разрешимости не больше t^2. В работе [BrNa04] было показано, что всякая почти нильпотентная группа содержит характеристическую нильпотентную подгруппу конечного индекса.

В качестве приложения полученных результатов в пятом параграфе мы получаем неулучшаемую оценку на ступень почти разрешимости расширения почти разрешимой группы при помощи почти разрешимой, отвечая тем самым на вопрос Дж. Баттона.

Шестой параграф посвящён тождеству периодичности $x^p = 1$. Мы показываем, что для такого тождества аналог теоремы о характеристической подгруппе конечного индекса неверен (при больших простых p).

Работа первого автора была выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №08-01-00573.

Работа второго автора была выполнена при поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации, программа поддержки ведущих научных школ, грант НШ-344.2008.1.

1. Формулировка результатов

Теорема 1 [KhM07a], [КлМ09]. *Если группа G содержит нормальную подгруппу N конечного индекса, удовлетворяющую внешнему коммутаторному тождеству $w(x_1, \ldots, x_t) = 1$, то G содержит характеристическую, и даже инвариантную относительно всех сюръективных эндоморфизмов, подгруппу H, удовлетворяющую тому же тождеству, такую, что $\log_2 |G:H| \leqslant f^{t-1}(\log_2 |G:N|)$.*

Здесь и далее $f^k(x)$ означает k-ю итерацию функции $f(x) = x(x+1)$. Под *внешним* (или *полилинйным*) *коммутаторным тождеством* понимается тождество вида $[\ldots[x_1, \ldots, x_t]\ldots] = 1$, в котором каким-то осмысленным образом расставлены квадратные скобки, а все встречающиеся буквы $x_1, \ldots, x_t$ различны. Примерами таких тождеств могут служить разрешимость, нильпотентность, центральная метабелевость и т.п. Формальное определение выглядит так. Пусть $F(x_1, x_2, \ldots)$ — свободная группа счётного ранга. *Внешними коммутаторами веса 1* называют образующие x_i. *Внешним коммутатором веса* $t > 1$ называют каждое слово вида $w(x_1, \ldots, x_t) = [u(x_1, \ldots, x_r), v(x_{r+1}, \ldots, x_t)]$, где u и v — внешние коммутаторы веса r и $t-r$ соответственно. *Внешним коммутаторным тождеством* понимается тождество вида $w = 1$, где w — внешний коммутатор.

Замечание 1. Условие нормальности подгруппы N в теореме 1 не является существенным. Хорошо известно, что любая подгруппа N конечного индекса содержит нормальную подгруппу $\widetilde{N}$ конечного индекса, причём $|G:\widetilde{N}|$ не превосходит (и даже делит) $|G:N|!$ (см., например, [KaM82]). Поэтому утверждение теоремы 1 остаётся справедливым и без предположения о нормальности подгруппы N, но с худшей оценкой: $\log_2 |G:H| \leqslant f^{t-1}(\log_2 |G:N|!)$.

Замечание 2. Из теоремы $1'$ (см. ниже) следует, что в условиях теоремы 1 характеристическая (и даже инвариантная относительно всех сюръективных эндоморфизмов) подгруппа конечного индекса найдётся внутри любой подгруппы конечного индекса, максимальной по включению среди всех нормальных подгрупп, удовлетворяющих данному внешнему коммутаторному тождеству.

Замечание 3. Из теоремы 4 (см. ниже), частным случаем которой является теорема 1, следует, что группа G/H лежит в многообразии, порождённом группой G/N (и даже в формации, порождённой этой группой).

Теорема 2 (сравните [KhM08]). *Пусть G — алгебра над полем (возможно, неассоциативная). Если G содержит подпространство N конечной коразмерности, на котором выполнено полилинейное тождество $w(x_1, \ldots, x_t) = 0$, то G содержит инвариантное относительно всех сюръективных эндоморфизмов подпространство H, удовлетворяющее тому же тождеству, такое, что $\operatorname{codim} H \leqslant f^{t-1}(\operatorname{codim} N)$. Это подпространство H будет левым, правым или двусторонним идеалом, если подпространство N было левым, правым или двусторонним идеалом, соответственно.*

Замечание. Из теоремы $2'$ (см. ниже) следует, что в условиях теоремы 2 подпространство конечной коразмерности, инвариантное относительно всех сюръективных эндоморфизмов, найдётся внутри любого подпространства конечной коразмерности, максимального по включению среди всех подпространств, удовлетворяющих данному полилинейному тождеству. Аналогичный факт верен и для идеалов (левых, правых и двусторонних).

Теорема 3 (сравните [KhM07b]). *Если конечная p-группа G содержит нормальную подгруппу N, удовлетворяющую внешнему коммутаторному тождеству $w(x_1, \ldots, x_t) = 1$, то G содержит характеристическую подгруппу H, удовлетворяющую тому же тождеству, такую, что $\operatorname{rank} G/H \leqslant f^{t-1}(\operatorname{rank} G/N)$.*

Здесь $\operatorname{rank} G$ — это наименьшее натуральное число n такое, что всякая конечно порождённая подгруппа группы G порождается не более чем n элементами.

Теорема 4. *Если группа G содержит нормальную подгруппу N, удовлетворяющую внешнему коммутаторному тождеству $w(x_1, \ldots, x_t) = 1$, и такую, что G/N обладает свойством малости $\mathcal{P}$, то G содержит характеристическую, и даже инвариантную относительно всех сюръективных эндоморфизмов, подгруппу H, удовлетворяющую тому же тождеству, такую, что G/H обладает свойством $\mathcal{P}$.*

Под *свойством малости* в теореме 4 понимается любое абстрактное свойство групп $\mathcal{P}$, удовлетворяющее следующим условиям:
1) факторгруппа группы со свойством $\mathcal{P}$ также обладает этим свойством;
2) подпрямое произведение двух групп со свойством $\mathcal{P}$ также обладает этим свойством;
3) каждая группа со свойством $\mathcal{P}$ удовлетворяет условию максимальности для нормальных подгрупп.

Примерами таких свойств могут служить: условие максимальности, условие максимальности для нормальных подгрупп, полицикличность, конечность и т. п.

Теорема 1 была впервые доказана в статье [KhM07a], но с худшей оценкой для индекса. Более простое доказательство и приведённая выше оценка получены в [КлМ09]. Теорема 2 доказана в [KhM08] с худшей оценкой для коразмерности. Важный частный случай теоремы 3, соответствующий тождеству нильпотентности, доказан в [KhM07b]. Теорема 4 является новой. Все эти утверждения оказываются частными случаями одного общего факта о группах с мультиоператорами.

Методы работ [KhM07a], [KhM07b] и [KhM08] позволяют доказать, на самом деле, утверждения, более сильные, чем теоремы 1 и 2, но с худшими оценками.

Теорема 1′. *Пусть $w(x_1,\ldots,x_t)$ — внешний коммутатор. Тогда в любой группе число подгрупп конечного индекса, являющихся максимальными (по включению) среди всех нормальных подгрупп, удовлетворяющих тождеству $w(x_1,\ldots,x_t)=1$, конечно. Кроме того, число таких подгрупп индекса не больше n не превосходит*

$$2^{F^{t-1}(n)}, \quad \text{где } F^k(x) \text{ — это } k\text{-я итерация функции } F(x)=xn^{2^x}.$$

Замечание. Эта теорема содержит два не следующих друг из друга утверждения. С одной стороны, число максимальных среди нормальных подгрупп с тождеством $w(x_1,\ldots,x_t)=1$ индекса не больше n ограниченно некоторой явной функцией от n и t. Эта функция очень быстро растёт, но с другой стороны, общее число подгрупп конечного индекса, являющихся максимальными среди всех нормальных подгрупп с данным тождеством, конечно. Следующая теорема показывает, что аналогичная ситуация имеет место для подпространств (или идеалов) в алгебрах.

Теорема 2′. *Пусть $w(x_1,\ldots,x_t)$ — полилинейный элемент свободной (неассоциативной) алгебры над полем F. Тогда в любой алгебре над F пересечение всех идеалов конечной коразмерности, являющихся максимальными (по включению) среди всех идеалов, на которых выполнено тождество $w(x_1,\ldots,x_t)=0$, имеет конечную коразмерность. Кроме того, пересечение таких идеалов коразмерности не больше n имеет коразмерность не больше, чем некоторая величина, зависящая только от n и t. Под словом идеал здесь можно понимать левый, правый, двусторонний идеал, либо просто подпространство (нуль-сторонний идеал).*

Теорема 1 позволяет дать максимально точный ответ на вопрос Дж. О. Баттона ([But08], проблема 3) о расширениях почти разрешимых групп при помощи почти разрешимых.

Теорема 5. *Расширение почти разрешимой ступени s группы при помощи почти разрешимой ступени t группы является почти разрешимой группой ступени не больше $t+s+1$.*

В параграфе 5 мы докажем эту теорему, а также приведём простой пример, показывающий, что полученную оценку нельзя улучшить.

Следующее утверждение показывает, что ни теорема 1, ни другие варианты теоремы 4 не могут быть распространены на произвольные тождества.

Теорема 6. *Для любого достаточно большого простого числа p существует группа G периода p^2, содержащая подгруппу конечного индекса периода p, но не содержащая характеристических подгрупп конечного индекса периода p. Более того, никакая факторгруппа группы G по характеристической подгруппе периода p не удовлетворяет ни условию максимальности для нормальных подгрупп, ни условию минимальности для нормальных подгрупп и, следовательно, не обладает никаким свойством малости.*

2. Группы с мультиоператорами

Напомним, что согласно [Кур62], *Ω-группой* называют группу $(G,+)$ (необязательно коммутативную) с заданной на ней системой операций Ω. Каждая операция $f\in\Omega$ представляет собой отображение $f: G^{n_f}\to G$ из конечной декартовой степени группы G в G, удовлетворяющее условию $f(0,\ldots,0)=0$.

Примеры:

1. Группы представляют собой Ω-группы с пустым набором операций Ω.
2. Кольца представляют собой Ω-группы с коммутативным сложением и набором операций Ω, состоящим из одной бинарной операции (умножения), удовлетворяющей условию дистрибутивности.
3. Алгебры над фиксированным полем F можно рассматривать, как Ω-группы с коммутативным сложением и набором операций Ω, состоящим из одной бинарной операции (умножения) и $|F|$ унарных операций (умножения на скаляры), удовлетворяющих известным условиям.

Пусть $\mathcal{V}$ — некоторое многообразие Ω-групп, $w(x_1,\ldots,x_t)$ элемент свободной (в многообразии $\mathcal{V}$) алгебры $F_{\mathcal{V}}(x_1,\ldots,x_t)$. Для нормальных подгрупп (по сложению) $A_1,\ldots,A_t$ Ω-группы $G\in\mathcal{V}$ определим $w(A_1,\ldots,A_t)$ как нормальную подгруппу, порождённую всеми элементами вида $w(a_1,\ldots,a_t)$, где $a_i\in A_i$.

Элемент $w(x_1,\ldots,x_t)\in F_{\mathcal{V}}(x_1,\ldots,x_t)$ назовём *полилинейным*, если

$$w(A_1,\ldots,A_i+A_i',\ldots,A_t)=w(A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_t)+w(A_1,\ldots,A_i',\ldots,A_t)$$

для всех $i=1,\ldots,t$ и любых нормальных подгрупп $A_1,\ldots,A_i,A_i',\ldots,A_t$ любой Ω-группы многообразия $\mathcal{V}$.

Полилинейными элементами свободной группы являются внешние коммутаторы, а полилинейными элементами свободной алгебры над полем являются полилинейные (в обычном смысле) выражения.

Пусть $\mathcal{C}$ — некоторый класс нормальных подгрупп Ω-группы G, обладающий следующими свойствами:

1) $\mathcal{C}$ замкнут относительно образов при сюръективных эндоморфизмах Ω-группы G, конечных сумм и конечных пересечений;
2) в любом подсемействе $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}$ класса $\mathcal{C}$ найдётся такое конечное подсемейство $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{N}$, что

$$\sum_{N \in \mathcal{N}} N = \sum_{N \in \mathcal{F}} N.$$

В этом случае мы будем говорить, что $\mathcal{C}$ является *классом больших нормальных подгрупп*. Функцию $\overline{\operatorname{codim}} : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ назовём (*обобщённой*) *коразмерностью*, если она обладает следующими свойствами:

0) $\overline{\operatorname{codim}}\, N_1 \leqslant \overline{\operatorname{codim}}\, N_2$, если $N_1 \supseteq N_2$;
1) $\overline{\operatorname{codim}}\, \varphi(N) \leqslant \overline{\operatorname{codim}}\, N$ для каждой подгруппы $N \in \mathcal{C}$ и каждого сюръективного эндоморфизма Ω-группы G;
2) $\overline{\operatorname{codim}}\, (N_1 \cap N_2) \leqslant \overline{\operatorname{codim}}\, N_1 + \overline{\operatorname{codim}}\, N_2$ для всех подгрупп $N_1, N_2 \in \mathcal{C}$;
3) в любом семействе $\mathcal{N}$ подгрупп из класса $\mathcal{C}$ найдётся $r \leqslant \max\limits_{N \in \mathcal{N}} \overline{\operatorname{codim}}\, N + 1$ подгрупп $N_1, \ldots, N_r$ таких, что

$$\sum_{N \in \mathcal{N}} N = \sum_{i=1}^{r} N_i.$$

Если G — алгебра над полем, а класс $\mathcal{C}$ состоит из всех подпространств или всех идеалов (односторонних или двусторонних) конечной коразмерности, то в качестве обобщённой коразмерности можно взять обычную коразмерность.

Если G — группа, а класс $\mathcal{C}$ состоит из всех нормальных подгрупп конечного индекса, то в качестве коразмерности можно взять двоичный логарифм индекса. Если же класс $\mathcal{C}$ состоит из всех нормальных подгрупп, индекс которых есть степень фиксированного простого числа p, то в качестве коразмерности подгруппы N можно взять ранг факторгруппы G/N (свойство 3 при этом будет выполнено в силу теоремы Бернсайда о базисе).

Класс всех нормальных подгрупп, факторгруппа по которым обладает каким-то фиксированным свойством малости $\mathcal{P}$, также является классом больших подгрупп. Но коразмерность в этом случае, вообще говоря, не определена.

3. Основная теорема

В доказательстве основной теоремы мы следуем рассуждению из работы [КлМ09], обобщая его на случай групп с мультиоператорами.

Лемма 1. *Пусть $w(x_1, \ldots, x_t)$ — полилинейный элемент свободной Ω-группы в некотором многообразии $\mathcal{V}$, m — натуральное число, $G \in \mathcal{V}$ — Ω-группа и $\mathcal{N}$ — некоторое конечное семейство её нормальных подгрупп таких, что*

$$w(\underbrace{N, N, \ldots, N}_{m \text{ раз}}, G, G, \ldots, G) = 0 \quad \text{для всех } N \in \mathcal{N}.$$

Тогда

$$w(\underbrace{\widehat{N}, \widehat{N}, \ldots, \widehat{N}}_{m-1 \text{ раз}}, \widehat{G}, \widehat{G}, \ldots, \widehat{G}) = 0, \quad \text{где } \widehat{N} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N \text{ и } \widehat{G} = \sum_{N \in \mathcal{N}} N.$$

Доказательство.

$$w(\underbrace{\widehat{N}, \widehat{N}, \ldots, \widehat{N}}_{m-1 \text{ раз}}, \widehat{G}, \widehat{G}, \ldots, \widehat{G}) = w(\underbrace{\widehat{N}, \widehat{N}, \ldots, \widehat{N}}_{m-1 \text{ раз}}, \sum_{N \in \mathcal{N}} N, \widehat{G}, \ldots, \widehat{G}) = \sum_{N \in \mathcal{N}} w(\underbrace{\widehat{N}, \widehat{N}, \ldots, \widehat{N}}_{m-1 \text{ раз}}, N, \widehat{G}, \ldots, \widehat{G}).$$

Но $\widehat{N} \subseteq N$ и $\widehat{G} \subseteq G$, поэтому каждое слагаемое последней суммы содержится в нормальной подгруппе

$$w(\underbrace{N, N, \ldots, N}_{m \text{ раз}}, G, G, \ldots, G), \qquad \text{которая тривиальна по условию.}$$

В качестве следствия мы получаем нашу основную теорему.

Основная теорема. *Пусть G — Ω-группа, лежащая в многообразии $\mathcal{V}$, $\mathcal{C}$ — некоторый класс её больших нормальных подгрупп, $w(x_1,\ldots,x_t) \in F_{\mathcal{V}}(x_1,\ldots,x_t)$ — полилинейный элемент, $N \in \mathcal{C}$ и $w(N,\ldots,N) = 0$. Тогда в G найдётся инвариантная относительно всех сюръективных эндоморфизмов нормальная подгруппа $H \in \mathcal{C}$, удовлетворяющая тому же тождеству $w(H,\ldots,H) = 0$. При этом, если $\overline{\operatorname{codim}}\colon\mathcal{C} \to \mathbb{R}$ — обобщённая коразмерность, то*

$$\overline{\operatorname{codim}}\, H \leqslant f^{t-1}(\overline{\operatorname{codim}}\, N),$$

где $f^k(x)$ означает k-ю итерацию функции $f(x) = x(x+1)$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{Ends} G$ — полугруппа всех сюръективных эндоморфизмов Ω-группы G. Рассмотрим нормальную подгруппу $G_1 = \sum\limits_{\varphi\in\operatorname{Ends} G} \varphi(N)$. Эта подгруппа инвариантна относительно сюръективных эндоморфизмов, является большой (то есть содержится в $\mathcal{C}$) и $\overline{\operatorname{codim}}\, G_1 \leqslant \overline{\operatorname{codim}}\, N$ (если $\overline{\operatorname{codim}}$ определена). Ясно также, что G_1 является суммой конечного числа образов подгруппы N (поскольку N большая), причём, это конечное число не превосходит $\overline{\operatorname{codim}}\, N + 1$ (по определению коразмерности). Таким образом,

$$G_1 = \sum_{k=0}^{p_1} \varphi'_k(N), \quad \text{где } \varphi'_k \in \operatorname{Ends} G \text{ и } p_1 \leqslant l_0 \overset{\text{опр}}{=} \overline{\operatorname{codim}}\, N.$$

Теперь рассмотрим нормальную подгруппу $N_1 = \bigcap\limits_{k=0}^{p_1} \varphi'_k(N)$. Ясно, что эта подгруппа также большая. По свойствам 1) и 2) коразмерности $\overline{\operatorname{codim}}$ имеем

$$l_1 \overset{\text{опр}}{=} \overline{\operatorname{codim}}\, N_1 \leqslant (p_1+1)\overline{\operatorname{codim}}\, N = (p_1+1)l_0 \leqslant (l_0+1)l_0 = f(l_0).$$

Согласно лемме 1

$$w(N_1,\ldots,N_1,G_1) = 0.$$

Аналогичным образом построим большие нормальные подгруппы

$$G_2 = \sum_{\varphi\in\operatorname{Ends} G} \varphi(N_1) = \sum_{k=0}^{p_2} \varphi''_k(N_1) \quad \text{и} \quad N_2 = \bigcap_{k=0}^{p_2} \varphi''_k(N_1), \quad \text{где } \varphi''_k \in \operatorname{Ends} G \text{ и } p_2 \leqslant \overline{\operatorname{codim}}\, N_1 = l_1 \leqslant f(l_0).$$

Ясно, что подгруппа G_2 инвариантна относительно всех сюръективных эндоморфизмов Ω-группы G. При этом

$$\overline{\operatorname{codim}}\, G_2 \leqslant \overline{\operatorname{codim}}\, N_1 = l_1 \leqslant f(l_0) \text{ и } l_2 \overset{\text{опр}}{=} \overline{\operatorname{codim}}\, N_2 \leqslant (p_2+1)\overline{\operatorname{codim}}\, N_1 = (p_2+1)l_1 \leqslant f(l_1) \leqslant f(f(l_0)).$$

Согласно лемме 1

$$w(N_2,\ldots,N_2,G_2,G_2) = 0.$$

Продолжая действовать в том же духе, на t-ом шаге мы получим в G инвариантную относительно сюръективных эндоморфизмов большую нормальную подгруппу

$$G_t = \sum_{\varphi\in\operatorname{Ends} G} \varphi(N_{t-1}) = \sum_{k=0}^{p_t} \varphi^{(t)}_k(N_{t-1}), \quad \text{где } \varphi^{(t)}_k \in \operatorname{Ends} G.$$

При этом

$$w(G_t,\ldots,G_t) = 0 \quad \text{и} \quad \overline{\operatorname{codim}}\, G_t \leqslant \overline{\operatorname{codim}}\, N_{t-1} = l_{t-1} \leqslant f(l_{t-2}) \leqslant f(f(l_{t-3})) \leqslant \ldots \leqslant f^{t-1}(l_0).$$

Таким образом, подгруппа $H = G_t$ является искомой и теорема доказана.

Теоремы 1 – 4 являются частными случаями основной теоремы:

Теорема 1:	$\mathcal{V} = \{\text{группы}\}$,	$\mathcal{C} = \{\text{нормальные подгруппы конечного индекса}\}$,	$\overline{\operatorname{codim}}\, N = \log_2 \lvert G\colon N\rvert$;
Теорема 2:	$\mathcal{V} = \{\text{алгебры}\}$,	$\mathcal{C} = \left\{\begin{matrix}\text{подпространства или идеалы}\\ \text{конечной коразмерности}\end{matrix}\right\}$,	$\overline{\operatorname{codim}} = \operatorname{codim}$;
Теорема 3:	$\mathcal{V} = \{\text{группы}\}$,	$\mathcal{C} = \{N \lhd G\ ;\ G/N \text{ — } p\text{-группа}\}$,	$\overline{\operatorname{codim}}\, N = \operatorname{rank} G/N$;
Теорема 4:	$\mathcal{V} = \{\text{группы}\}$,	$\mathcal{C} = \{N \lhd G\ ;\ G/N \text{ обладает свойством } \mathcal{P}\}$,	$\overline{\operatorname{codim}}$ не определена.

4. Доказательство теорем $1'$ и $2'$

Теорема $1'$ немедленно вытекает из следующего утверждения.*)

Утверждение 1. *Предположим, что группа G содержит достаточно много нормальных подгрупп $N_1, \ldots, N_m$ индекса n, удовлетворяющих внешнему коммутаторному тождеству $w(x_1, \ldots, x_t) = 1$ (где m — достаточно большое число, зависящее только от n и t). Если*

$$\bigcap N_j \neq \bigcap_{j \neq k} N_j \quad \text{для всех } k = 1, \ldots, m,$$

то в группе G найдётся нормальная подгруппа X, удовлетворяющая тому же тождеству и строго содержащая одну из подгрупп N_j (и, следовательно, имеющая индекс строго меньший n).

Доказательство. Это утверждение фактически было доказано в [KhM07a]. Подгруппа X, построенная при доказательстве утверждения 1 статьи [KhM07a] на самом деле содержит одну из подгрупп N_j.

Теорема $2'$ аналогичным образом немедленно вытекает из следующего утверждения, доказанного в работе [KhM08].*)

Утверждение 2 ([KhM08], утверждение 3). *Пусть $N_1, \ldots, N_m$ — идеалы алгебры A над полем K и $f(x_1, \ldots, x_c) \in K\langle x_1, \ldots, x_c\rangle$ — полилинейный многочлен. Предположим, что*
(a) *каждый идеал N_i удовлетворяет тождеству $f = 0$ и $\dim A/N_i \leqslant r$;*
(b) $\bigcap N_j \neq \bigcap\limits_{j \neq k} N_j$ *для всех $k = 1, \ldots, m$.*
Если $m \geqslant s(r, c)$ для некоторого (r, c)-ограниченного числа $s(r, c)$, то существует $k \in \{1, \ldots, m\}$ такое, что идеал $N_k + \bigcap\limits_{j \neq k} N_j$ удовлетворяет тождеству $f = 0$.

Для удобства читателей мы приведём здесь независимое и более простое доказательство теоремы $1'$.

Доказательство теоремы $1'$. Пусть $\mathcal{N}$ — некоторое множество подгрупп конечного индекса группы G, являющихся максимальными по включению среди всех нормальных подгрупп, удовлетворяющих внешнему коммутаторному тождеству $w(x_1, \ldots, x_t) = 1$. Будем доказывать, что множество $\mathcal{N}$ конечно.

Если семейство $\mathcal{N}$ пусто, то доказывать нечего, в противном случае рассмотрим подгруппу $G_0 \in \mathcal{N}$. Эта подгруппа удовлетворяет тождеству

$$w_\sigma(G_0, \ldots, G_0) = 1 \quad \text{для всех } \sigma \in S_t. \tag{0}$$

Здесь и далее под $w_\sigma(x_1, \ldots, x_t)$, где σ — перестановка степени t, понимается $w(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(t)})$.

Подгруппа G_0 имеет конечный индекс. Следовательно, семейство подгрупп $\{NG_0 \mid N \in \mathcal{N}\}$ конечно и совпадает с семейством $\{NG_0 \mid N \in \mathcal{N}_1\}$, где $\mathcal{N}_1$ — некоторое конечное подсемейство семейства $\mathcal{N}$. Подгруппа

$$G_1 = G_0 \cap \bigcap_{N \in \mathcal{N}_1} N$$

имеет конечный индекс и удовлетворяет равенству

$$w_\sigma(G_1, \ldots, G_1, NG_0) = 1 \quad \text{для всех } \sigma \in S_t \quad \text{и всех } N \in \mathcal{N}. \tag{1}$$

В самом деле, по выбору семейства $\mathcal{N}_1$ всякое произведение NG_0, где $N \in \mathcal{N}$, совпадает с произведением N_1G_0 для некоторой группы $N_1 \in \mathcal{N}_1$ и $N_1 \supseteq G_1 \subseteq G_0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} w_\sigma(G_1, \ldots, G_1, NG_0) = w_\sigma(G_1, \ldots, G_1, N_1G_0) =& w_\sigma(G_1, \ldots, G_1, N_1) w_\sigma(G_1, \ldots, G_1, G_0) \subseteq \\ \subseteq& w_\sigma(N_1, \ldots, N_1, N_1) w_\sigma(G_0, \ldots, G_0, G_0) = 1. \end{aligned}$$

Подгруппа G_1 имеет конечный индекс. Следовательно, семейство подгрупп $\{NG_1 \mid N \in \mathcal{N}\}$ конечно и совпадает с семейством $\{NG_1 \mid N \in \mathcal{N}_2\}$, где $\mathcal{N}_2$ — некоторое конечное подсемейство семейства $\mathcal{N}$. Подгруппа

$$G_2 = G_1 \cap \bigcap_{N \in \mathcal{N}_2} N$$

*) Точнее, из утверждения 1 вытекает утверждение теоремы $1'$, относящееся к подгруппам ограниченного индекса. Конечность общего числа максимальных нормальных подгрупп конечного индекса с данным тождеством следует из доказательства этого утверждения. Аналогичная ситуация имеет место с утверждением 2 и теоремой $2'$.

имеет конечный индекс и удовлетворяет равенству

$$w_\sigma(G_2,\ldots,G_2,NG_1,NG_1)=1 \quad \text{для всех } \sigma\in S_t \quad \text{и всех } N\in\mathcal{N}. \tag{2}$$

В самом деле, по выбору семейства $\mathcal{N}_2$ всякое произведение NG_1, где $N\in\mathcal{N}$, совпадает с произведением N_2G_1 для некоторой группы $N_2\in\mathcal{N}_2$ и $N_2\supseteq G_2\subseteq G_1\subseteq G_0$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&w_\sigma(G_2,\ldots,G_2,NG_1,NG_1)=w_\sigma(G_2,\ldots,G_2,N_2G_1,N_2G_1)=\\
=&w_\sigma(G_2,\ldots,G_2,N_2,N_2)w_\sigma(G_2,\ldots,G_2,N_2,G_1)w_\sigma(G_2,\ldots,G_2,G_1,N_2)w_\sigma(G_2,\ldots,G_2,G_1,G_1)\subseteq\\
\subseteq&w_\sigma(N_2,\ldots,N_2,N_2,N_2)w_\sigma(G_1,\ldots,G_1,N_2,G_1)w_\sigma(G_1,\ldots,G_1,G_1,N_2)w_\sigma(G_0,\ldots,G_0,G_0,G_0).
\end{aligned}$$

Первый сомножитель полученного произведения тривиален в силу того, что в группе N_2 выполнено тождество $w=1$. Второй и третий сомножители тривиальны в силу равенства (1). Четвёртый сомножитель тривиален в силу равенства (0).

Продолжая в том же духе, в конце концов мы получим такую подгруппу конечного индекса G_{t-1}, что

$$w_\sigma(NG_{t-1},\ldots,NG_{t-1})=1 \quad \text{для всех } \sigma\in S_t \quad \text{и всех } N\in\mathcal{N}. \tag{t}$$

В силу максимальности всех подгрупп N, это означает, что $G_{t-1}\subseteq N$ для всех $N\in\mathcal{N}$, то есть $G_{t-1}\subseteq\bigcap\limits_{N\in\mathcal{N}}N$ и, следовательно, это пересечение имеет конечный индекс. Конечность индекса такого пересечения влечёт, в свою очередь, конечность семейства $\mathcal{N}$, что и требовалось доказать.

Чтобы получить оценки, достаточно заметить, что если все подгруппы семейства $\mathcal{N}$ имеют индекс не больше n, то

$$|G:G_k|\leqslant|G:G_{k-1}|n^{|\mathcal{N}_k|}, \quad \text{а} \quad |\mathcal{N}_k|\leqslant 2^{|G:G_{k-1}|} \text{ (это очень грубая оценка).}$$

Значит,

$$|G:G_k|\leqslant|G:G_{k-1}|\cdot n^{2^{|G:G_{k-1}|}}, \quad \text{то есть} \quad |G:G_{t-1}|\leqslant F^{t-1}(n) \quad \text{и} \quad |\mathcal{N}|\leqslant 2^{F^{t-1}(n)},$$

где $F^k(x)$ — это k-я итерация функции $F(x)=xn^{2^x}$.

5. Расширения почти разрешимых групп при помощи почти разрешимых

В этом параграфе мы докажем теорему 5, то есть получим оценку на ступень почти разрешимости группы G, которая содержит нормальную почти разрешимою ступени s подгруппу A такую, что факторгруппа G/A почти разрешима ступени t. От второго «почти» легко избавиться. Действительно, заменяя группу G на её подгруппу конечного индекса (прообраз разрешимой подгруппы конечного индекса в факторгруппе G/A), мы можем считать, что факторгруппа G/A разрешима ступени t.

Далее, по теореме 1 разрешимую ступени s подгруппу N конечного индекса в группе A можно считать характеристической в A и, следовательно, нормальной в G. Для доказательства теоремы осталось показать, что факторгруппа $H=G/N$ содержит разрешимую ступени не выше $t+1$ подгруппу конечного индекса. Но группа H представляет собой расширение конечной группы $K=A/N$ при помощи разрешимой ступени t группы G/A.

У конечной группы K имеется лишь конечное число автоморфизмов, следовательно, централизатор этой группы в H имеет в ней конечный индекс. Такими образом, переходя к подгруппе конечного индекса, мы можем считать, что K содержится в центре группы H. Но тогда факторгруппа H по её центру имеет ступень разрешимости t и, следовательно, сама H разрешима ступени не больше $t+1$, что и требовалось доказать.

Нетрудно сообразить, что оценка в теореме 5 не может быть улучшена. Действительно, рассмотрим, например, центральное произведение G (то есть прямое произведение со склеенными центрами) бесконечного числа копий группы кватернионов. Эта группа G является расширением своей конечной (центральной) подгруппы (порядка 2) при помощи элементарной абелевой 2-группы бесконечного ранга. Нетрудно проверить, что эта группа не имеет абелевых подгрупп конечного индекса. (Чтобы в этом убедиться, можно снова воспользоваться теоремой 1: если есть какая-то абелева подгруппа конечного индекса, то есть и характеристическая абелева подгруппа конечного индекса).

Таким образом, расширение конечной группы (то есть почти тривиальной группы, или почти разрешимой ступени ноль группы) при помощи абелевой группы не обязано быть почти абелевой группой. Этот пример можно слегка усовершенствовать и построить расширение почти абелевой группы при помощи абелевой группы, не являющееся почти метабелевой группой. Действительно, возьмём какое-нибудь точное комплексное представление $\varphi\colon G\to\mathbf{GL}(V)$ описанной выше группы G. В качестве φ можно взять, например, регулярное представление. Соответствующее полупрямое произведение $G_1=V\leftthreetimes G$ является расширением почти абелевой группы $A=V\leftthreetimes\{\pm1\}$ при помощи (элементарной) абелевой группы $G_1/A\simeq G/\{\pm1\}$. Пусть H — подгруппа конечного индекса в G_1. Покажем, что H не может быть метабелевой. Действительно, подгруппа H обязана содержать V (поскольку V, будучи комплексным векторным пространством, не имеет никаких собственных подгрупп конечного индекса). Факторгруппа $G_1/V \simeq G$ содержит подгруппу конечного индекса H/V. Следовательно, H/V — неабелева группа (как мы уже говорили, в G нет абелевых подгрупп конечного индекса). Значит, её коммутант $(H/V)'$ содержит нетривиальный элемент g порядка 2 и, стало быть, коммутант H' группы H содержит элемент $x = ug$ (для некоторого $u \in V$) и все элементы вида

$$[x, v] = xvx^{-1}(-v) = \varphi(g)v - v, \quad \text{где } v \in V.$$

Поскольку представление φ точное, пространство V содержит вектор v, не лежащий в ядре оператора $\varphi(g) - \mathrm{id}$, и, значит, H' содержит ненулевой вектор $w = \varphi(g)v - v$ такой, что $\varphi(g)w = v - \varphi(g)v = -w$. Тогда, $[x, w] = -2w \neq 0$, то есть группа H' неабелева, а группа H неметабелева, что и требовалось.

Аналогичным образом можно строить примеры высших ступеней.

6. Тождество Бернсайда

В этом параграфе мы докажем теорему 6, то есть построим группу, почти удовлетворяющую тождеству $x^p = 1$, но не имеющую больших характеристических подгрупп периода p. Чтобы построить группу G с нужным свойством, мы воспользуемся известной техникой работы с периодическими соотношениями, следуя книге [Оль89]. Аналогичные построения могут быть проведены и на основе книги [Адян75].

Рассмотрим бесконечный алфавит $X = \{a, x_1, x_2, \ldots\}$ и свободную группу $G(0) = F(X)$ с базисом X. Группы $G(i) = \langle X \mid R_i \rangle$, где $i \geqslant 1$, определяются по индукции следующим образом. Выберем множество P_i слов длины i в группе $F(X)$, обладающее следующими свойствами:

1) слова из множества P_i не сопряжены в группе $G(i-1)$ степеням слов меньшей длины;
2) различные слова из множества P_i не сопряжены в группе $G(i-1)$ друг другу и обратным друг к другу;
3) множество P_i максимально (по включению) среди всех множеств, удовлетворяющих условиям 1) и 2).

Слова из множества P_i называют *периодами ранга* i. Определим группу $G(i) = \langle X \mid R_i \rangle$, положив

$$R_0 = \varnothing \quad \text{и} \quad R_i = R_{i-1} \cup \{u^{n_u} = 1 \mid u \in P_i\} \text{ при } i \geqslant 1,$$

где n_u — некоторые натуральные числа (зависящие от u).

Ясно, что в группе

$$G = G(\infty) = \left\langle X \,\middle|\, \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \right\rangle$$

каждый неединичный элемент сопряжён со степенью некоторого периода (некоторого ранга). Известно, что если все числа n_u достаточно велики и нечётны, то порядок каждого периода u в группе $G(\infty)$ в точности равен n_u (см., например, [Оль89], теорема 26.4).

Выберем достаточно большое простое число p и положим

$$n_u = \begin{cases} p, & \text{если } \varphi(u) \notin \langle a \rangle \setminus \{1\}; \\ p^2, & \text{если } \varphi(u) \in \langle a \rangle \setminus \{1\}, \end{cases}$$

где $\varphi\colon F(X) \to \langle a \rangle_p \times \langle x_1 \rangle_p \times \langle x_2 \rangle_p \times \ldots$ — естественный гомоморфизм свободной группы на элементарную абелеву p-группу. При этом в группе $G = G(\infty)$ порядок каждого периода u будет p или p^2 в зависимости от значения $\varphi(u)$.

Лемма 2. *Если простое число p достаточно велико, то*

1) *группа G является периодической группой периода p^2;*
2) *гомоморфизм φ индуцирует гомоморфизм* (обозначаемый в дальнейшем той же буквой) *группы G на элементарную абелеву p-группу;*
3) *элемент g группы G имеет порядок p^2 тогда и только тогда, когда $\varphi(g) \in \langle a \rangle \setminus \{1\}$ (порядки остальных неединичных элементов равны p);*
4) *для каждого натурального i и каждого целого k отображение $f_{i,k}\colon X \to G$, переводящее букву x_i в $a^k x_i$ и оставляющее на месте остальные буквы алфавита X, продолжается до автоморфизма группы G.*

Доказательство. Первое утверждение немедленно вытекает из того, что (как мы уже говорили) каждый элемент сопряжён со степенью периода, а периоды имеют порядки p и p^2. Второе утверждение очевидным образом следует из того, что все определяющие соотношения имеют вид $u^p = 1$.

Чтобы доказать третье утверждение, рассмотрим произвольный элемент g группы G. Этот элемент сопряжён степени периода: $g = t^{-1}u^k t$. Если k делится на p, то из равенства $u^{p^2} = 1$ (верного для любого периода u) следует, что порядок элемента g либо p, либо 1. В то же время $\varphi(g) = \varphi(u^k) = 1$, то есть в данном случае доказываемое утверждение верно. Если же k не делится на p, то порядок элемента g совпадает с порядком периода u. С другой стороны, включение $\varphi(g) \in \langle a \rangle \setminus \{1\}$ равносильно включению $\varphi(u) \in \langle a \rangle \setminus \{1\}$ и утверждение следует из сделанного выше замечания о порядках периодов.

Докажем четвёртое утверждение. Заметим, что достаточно показать, что указанные отображения продолжаются до эндоморфизмов, поскольку если это так, то эндоморфизмы $f_{i,k}$ и $f_{i,-k}$ будут взаимно обратными.

Чтобы проверить, что отображение $f_{i,k}$ продолжается до эндоморфизма, достаточно показать, что определяющие соотношения при таком отображении букв перейдут в верные равенства в группе G. Рассмотрим произвольное определяющее соотношение $u^l = 1$, где l равно либо p, либо p^2 в зависимости от значения $\varphi(u)$. Но отображение $f_{i,k}$ индуцирует автоморфизм элементарной абелевой p-группы, оставляющий на месте каждый элемент подгруппы $\langle a \rangle$. Поэтому $\varphi(f_{i,k}(u)) \in \langle a \rangle \setminus \{1\}$ тогда и только тогда, когда $\varphi(u) \in \langle a \rangle \setminus \{1\}$. Следовательно, по пункту 3, элемент $f_{i,k}(u)$ имеет в группе G такой же порядок l, как и период u. Стало быть, отображения $f_{i,k}$, действительно, превращают определяющие соотношения в верные равенства и лемма доказана.

Доказательство теоремы 6. Построенная выше группа G содержит подгруппу $N = \langle x_1, x_2, \ldots \rangle \ker \varphi$ индекса p. Согласно утверждению 3 леммы 2, эта подгруппа удовлетворяет тождеству $x^p = 1$.

Рассмотрим теперь произвольную характеристическую подгруппу H группы G. Она остаётся инвариантной, в частности, при действии автоморфизмов $f_{i,k}$. Но автоморфизмы $f_{i,k}$ индуцируют автоморфизмы элементарной абелевой p-группы $E = \langle a \rangle_p \times \langle x_1 \rangle_p \times \langle x_2 \rangle_p \times \ldots$. Следовательно образ $\varphi(H)$ подгруппы H будет подгруппой группы E, инвариантной относительно всех автоморфизмов $f_{i,k}$. Однако всякая такая инвариантная подгруппа группы E, как нетрудно убедиться, либо тривиальна, либо содержит a. Значит, либо H содержится в $\ker \varphi$ (и, следовательно, факторгруппа G/H бесконечна и даже обладает бесконечными в обе стороны цепочками нормальных подгрупп), либо H содержит элемент порядка p^2 (по утверждению 3 леммы 2) и, следовательно, не удовлетворяет тождеству $x^p = 1$. Это завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Адян75] Адян С. И. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.

[БеК03] Беляев В.В., Кузуджуоглу М. Локально конечные едва транзитивные группы // Алгебра и Логика. 2003. Т.42. №3. С.261–270.

[КаМ82] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

[КлМ09] Клячко Ант. А., Мельникова Ю.Б. Короткое доказательство теоремы Макаренко–Хухро о больших характеристических подгруппах с тождеством // Мат. сборник (в печати). См. также arXiv:0805.2747 .

[Кур62] Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М.: Физ.-мат. лит., 1962.

[Оль89] Ольшанский А. Ю. Геометрия определяющих соотношений в группах. М.: Наука, 1989.

[BrNa04] Bruno B., Napolitani F. A note on nilpotent-by-Černikov groups // Glasgow Math. J. 2004. 46, 211-215.

[But08] Button J.O. Largeness of LERF and 1-relator groups // arXiv:0803.3805 , 2008.

[KhM07a] Khukhro E.I., Makarenko N.Yu. Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities // J. London Math. Soc. 2007. V.75. no.3. P.635–646.

[KhM07b] Khukhro E.I., Makarenko N.Yu. Characteristic nilpotent subgroups of bounded co-rank and automorphically-invariant ideals of bounded codimension in Lie algebras // Quart. J. Math. 2007. V.58. P.229–247.

[KhM08] Khukhro E.I., Makarenko N.Yu. Automorphically-invariant ideals satisfying multilinear identities, and group-theoretic applications // J. Algebra 2008. V.320. no.4. P.1723–1740.