УДК 512.544.44 + 512.543.22 + 512.544.33 MSC:20E36,20F12,20F16,20F18,20F19,20E10

# КОРОТКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ МАКАРЕНКО–ХУХРО О БОЛЬШИХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ПОДГРУППАХ С ТОЖДЕСТВОМ

Антон А. Клячко Юлия Б. Мельникова
*Механико-математический факультет*
*Московского государственного университета*
*Москва 119992, Ленинские горы, МГУ*
*klyachko@mech.math.msu.su*
*yuliamel@mail.ru*

*Посвящается А. Л. Шмелькину по случаю его 70-летия*

Предлагается короткое доказательство и некоторое усиление теоремы Макаренко–Хухро о том, что каждая группа, почти удовлетворяющая внешнему коммутаторному тождеству, содержит характеристическую подгруппу конечного индекса, удовлетворяющую этому тождеству. Мы получаем также оценку для индекса такой характеристической подгруппы.

*Ключевые слова*: характеристические подгруппы, внешние коммутаторные тождества.

Пусть $G$ — группа и $H$ — её подгруппа конечного индекса. В учебниках по теории групп (см., например, [KaM82]) можно обнаружить несколько простых фактов, позволяющих в этой ситуации найти в $G$ подгруппу конечного индекса, которая похожа на $H$, но лучше неё. В частности,
- внутри $H$ найдётся нормальная в $G$ подгруппа конечного индекса (делящего $|G:H|!$);
- если группа $G$ конечно порождена, то внутри $H$ найдётся вполне характеристическая (и даже вербальная) в $G$ подгруппа конечного индекса;
- если подгруппа $H$ абелева, то в $G$ найдётся характеристическая абелева подгруппа конечного индекса.

Последние утверждение было недавно существенно обобщено.

**Теорема Макаренко–Хухро** ([KhM07], см. также [MaX07]). *Если в группе $G$ есть подгруппа конечного индекса, удовлетворяющая внешнему* (*полилинейному*, в авторской терминологии) *коммутаторному тождеству, то в группе $G$ найдётся также характеристическая подгруппа конечного индекса, удовлетворяющая этому тождеству.*

Примерами внешних коммутаторных тождеств могут служить нильпотентность или разрешимость данной ступени. Общее определение выглядит так. Пусть $F(x_1, x_2, \dots)$ — свободная группа счётного ранга. ***Внешними коммутаторами веса 1*** называют образующие $x_i$. ***Внешним коммутатором веса*** $t > 1$ называют каждое слово вида $w(x_1, \dots, x_t) = [u(x_1, \dots, x_r), v(x_{r+1}, \dots, x_t)]$, где $u$ и $v$ — внешние коммутаторы веса $r$ и $t - r$ соответственно. Говоря неформально, внешний коммутатор веса $t$ представляет собой выражение $[x_1, x_2, \dots, x_t]$, в котором каким-то осмысленным образом расставлены квадратные скобки. ***Внешним коммутаторным тождеством веса*** $t$ называют тождество $w(x_1, \dots, x_t) = 1$, левая часть которого является внешним коммутатором веса $t$.

Приводимое ниже доказательство теоремы Макаренко–Хухро значительно проще и короче оригинального.

Пусть $H_1, \dots, H_t$ — нормальные подгруппы группы $G$ и $w(x_1, \dots, x_t)$ — внешний коммутатор. Тогда
1) подгруппа $w(H_1, \dots, H_t) \overset{\text{опр}}{=} \langle w(h_1, \dots, h_t) \ ; \ h_i \in H_i \rangle$ нормальна в группе $G$;
2) $w(G, \dots, G) = 1$ тогда и только тогда, когда группа $G$ удовлетворяет тождеству $w(x_1, \dots, x_t) = 1$;
3) $w(H_1, \dots, H_t) = [u(H_1, \dots, H_r), v(H_{r+1}, \dots, H_t)]$, если $w(x_1, \dots, x_t) = [u(x_1, \dots, x_r), v(x_{r+1}, \dots, x_t)]$;
4) $w(H_1, \dots, H_{i-1}, \prod\limits_{N \in \mathcal{N}} N, H_{i+1}, \dots, H_t) = \prod\limits_{N \in \mathcal{N}} w(H_1, \dots, H_{i-1}, N, H_{i+1}, \dots, H_t)$
   для произвольного семейства $\mathcal{N}$ нормальных подгрупп группы $G$.

Эти свойства почти очевидны и легко могут быть проверены по индукции.

**Лемма.** *Пусть $w(x_1, \dots, x_t)$ — внешний коммутатор, $m$ — натуральное число, $G$ — группа и $\mathcal{N}$ — некоторое семейство её нормальных подгрупп таких, что*

$$w(\underbrace{N, N, \dots, N}_{m \text{ раз}}, G, G, \dots, G) = 1 \quad \text{для всех } N \in \mathcal{N}.$$

*Тогда*

$$w(\underbrace{\widehat{N}, \widehat{N}, \dots, \widehat{N}}_{m-1 \text{ раз}}, \widehat{G}, \widehat{G}, \dots, \widehat{G}) = 1, \quad \text{где } \widehat{N} = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} N \text{ и } \widehat{G} = \prod_{N \in \mathcal{N}} N.$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №08-01-00573.

**Доказательство.**
$$w(\underbrace{\widehat{N},\widehat{N},\ldots,\widehat{N}}_{m-1\text{ раз}},\widehat{G},\widehat{G},\ldots,\widehat{G})=w(\underbrace{\widehat{N},\widehat{N},\ldots,\widehat{N}}_{m-1\text{ раз}},\prod_{N\in\mathcal{N}}N,\widehat{G},\ldots,\widehat{G})=\prod_{N\in\mathcal{N}}w(\underbrace{\widehat{N},\widehat{N},\ldots,\widehat{N}}_{m-1\text{ раз}},N,\widehat{G},\ldots,\widehat{G}).$$
Но $\widehat{N}\subseteq N$ и $\widehat{G}\subseteq G$, поэтому каждый сомножитель последнего произведения содержится в группе
$$w(\underbrace{N,N,\ldots,N}_{m\text{ раз}},G,G,\ldots,G),\qquad\text{которая тривиальна по условию.}$$
В качестве следствия мы получаем усиленную версию теоремы Макаренко–Хухро с явной оценкой на индекс.

**Теорема.** *Если группа $G$ содержит подгруппу $N$ конечного индекса, удовлетворяющую внешнему коммутаторному тождеству $w(x_1,\ldots,x_t)=1$, то $G$ содержит характеристическую, и даже инвариантную относительно всех сюръективных эндоморфизмов, подгруппу $H$, удовлетворяющую тому же тождеству. Причём*
$$\log_2|G:H|\leqslant f^{t-1}(\log_2|G:N|),\quad\text{если подгруппа } N \text{ нормальна,}\tag{1}$$
*и, следовательно, $\log_2|G:H|\leqslant f^{t-1}(\log_2|G:N|!)$ в общем случае, где $f^k(x)$ означает $k$-ю итерацию функции $f(x)=x(x+1)$.*

**Доказательство.** Для простоты мы будем строить характеристическую подгруппу. Построение подгруппы, инвариантной относительно сюръективных эндоморфизмов, повторяет приводимые ниже рассуждения дословно, с заменой всех используемых автоморфизмов на сюръективные эндоморфизмы.

Рассмотрим подгруппу $G_1=\prod\limits_{\varphi\in\operatorname{Aut}G}\varphi(N)$. Эта подгруппа характеристична и $|G:G_1|\leqslant|G:N|$. Ясно также, что $G_1$ является произведением не более чем $\log_2|G:N|+1$ автоморфных образов группы $N$ (поскольку в цепочке $N\subseteq N\varphi_1(N)\subseteq N\varphi_1(N)\varphi_2(N)\subseteq\ldots$ не может быть больше $\log_2|G:N|+1$ различных подгрупп). Таким образом,
$$G_1=\prod_{k=0}^{p_1}\varphi'_k(N),\quad\text{где }\varphi'_k\in\operatorname{Aut}G\text{ и }p_1\leqslant l_0\overset{\text{опр}}{=}\log_2|G:N|.$$
Теперь рассмотрим подгруппу $N_1=\bigcap\limits_{k=0}^{p_1}\varphi'_k(N)$. Индекс пересечения подгрупп не превосходит произведения их индексов (см., например, [KaM82]), следовательно,
$$l_1\overset{\text{опр}}{=}\log_2|G:N_1|\leqslant\log_2(|G:N|^{p_1+1})=(p_1+1)l_0\leqslant(l_0+1)l_0=f(l_0).$$
Согласно лемме
$$w(N_1,\ldots,N_1,G_1)=1.$$
Аналогичным образом построим подгруппы
$$G_2=\prod_{\varphi\in\operatorname{Aut}G_1}\varphi(N_1)=\prod_{k=0}^{p_2}\varphi''_k(N_1)\quad\text{и}\quad N_2=\bigcap_{k=0}^{p_2}\varphi''_k(N_1),\quad\text{где }\varphi''_k\in\operatorname{Aut}G_1\text{ и }p_2\leqslant\log_2|G:N_1|=l_1\leqslant f(l_0).$$
Ясно, что подгруппа $G_2$ характеристична в $G$ (и даже в $G_1$). Причём,
$$\log_2|G:G_2|\leqslant\log_2|G:N_1|=l_1\leqslant f(l_0)\text{ и }l_2\overset{\text{опр}}{=}\log_2|G:N_2|\leqslant\log_2(|G:N_1|^{p_2+1})=(p_2+1)l_1\leqslant f(l_1)\leqslant f(f(l_0)).$$
Согласно лемме
$$w(N_2,\ldots,N_2,G_2,G_2)=1.$$
Продолжая действовать в том же духе, на $t$-ом шаге мы получим характеристическую в $G$ подгруппу
$$G_t=\prod_{\varphi\in\operatorname{Aut}G_{t-1}}\varphi(N_{t-1})=\prod_{k=0}^{p_t}\varphi_k^{(t)}(N_{t-1}),\quad\text{где }\varphi_k^{(t)}\in\operatorname{Aut}G_{t-1}.$$
Причём,
$$w(G_t,\ldots,G_t)=1\quad\text{и}\quad\log_2|G:G_t|\leqslant\log_2|G:N_{t-1}|=l_{t-1}\leqslant f(l_{t-2})\leqslant f(f(l_{t-3}))\leqslant\ldots\leqslant f^{t-1}(l_0).$$
Таким образом, подгруппа $H=G_t$ является искомой и теорема доказана.

**Замечание.** В работах [KhM07] и [MaX07] явная оценка не приводится, но отмечается, что она может быть получена из доказательства. По нашим подсчётам, оценка (1) лучше.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


[KaM82] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

[MaX07] Макаренко Н.Ю., Хухро Е.И. Большие характеристические подгруппы, удовлетворяющие полилинейным коммутаторным тождествам // ДАН. 2007. Т.412. №5. С.594–596.

[KhM07] Khukhro E.I., Makarenko N.Yu. Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities // J. London Math. Soc. 2007. V.75. no.3, P.635–646.