УДК 512.543.72 + 512.544.33 MSC: 20F70, 20F34, 20F16

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ГРУППА БУТЫЛКИ КЛЕЙНА НЕ СИЛЬНО ВЕРБАЛЬНО ЗАМКНУТА, НО ОЧЕНЬ БЛИЗКА К ЭТОМУ ЗВАНИЮ

Антон А. Клячко
Механико-математический факультет Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ
klyachko@mech.math.msu.su

Согласно теореме Мажуги фундаментальная группа H любой поверхности, кроме, возможно, бутылки Клейна, является ретрактом всякой конечно порождённой группы, содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы. Оказывается, что бутылка Клейна действительно является исключением, но обладает очень близким свойством.

0. Введение

Подгруппа H группы G называется *вербально замкнутой* [MR14] (смотрите также [Rom12], [PX13], [Mazh17], [КлМа18], [KMM18], [Mazh18], [Bog18], [Bog19], [Маж19], [PT19]), если всякое уравнение вида

$$w(x, y, \ldots) = h, \quad \text{где } w \text{ — это элемент свободной группы } F(x, y, \ldots) \text{ и } h \in H,$$

имеющее решение в G, имеет решение в H. Если же каждая конечная система уравнений с коэффициентами из H

$$\{w_1(x, y, \ldots) = 1, \ldots, w_m(x, y, \ldots) = 1\}, \quad \text{где } w_i \in H * F(x, y, \ldots) \text{ (а } * \text{ — это свободное произведение),}$$

имеющая решение в G, имеет решение в H, то подгруппу H называют *алгебраически замкнутой* в G.

Алгебраическая замкнутость — это более сильное свойство, чем вербальная замкнутость, но во многих случаях эти свойства оказываются эквивалентными. Группу H называют *сильно вербально замкнутой* [Mazh18], если она алгебраически замкнута во всякой группе, содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы. Таким образом, вербальная замкнутость — это свойство подгруппы, а сильная вербальная замкнутость — это свойство абстрактной группы. Класс сильно вербально замкнутых групп довольно широк, смотрите упомянутые выше статьи. Например, в [Mazh18] доказывается, что

сильно вербально замкнуты фундаментальные группы всех связных поверхностей, кроме, быть может, бутылки Клейна.

Это интригующее единственное возможное исключение возникло так:
- почти все фундаментальные группы поверхностей «похожи на свободные группы», и для таких групп работает «индустриальный» метод доказательства сильной вербальной замкнутости, берущий своё начало в самой первой статье [MR14] на эту тему и основанный на использовании слов Ли [Lee02] или каких-то их аналогов;
- оставшиеся несколько групп
 либо абелевы, а все абелевы группы сильно вербально замкнуты (по очень простой причине [Mazh18]),
 либо это злополучная фундаментальная группа $K = \langle a, b \mid a^b = a^{-1} \rangle$ бутылки Клейна, которая и на свободную непохожа, и неабелева, и непонятно, что с ней делать.

В этой работе доказывается естественное дополнение теоремы Мажуги:

фундаментальная группа бутылки Клейна не сильно вербально замкнута.

Похожая ситуация сложилась в своё время с почти свободными группами: в работе [КлМа18] была доказана общая теорема с единственным возможным исключением:

сильно вербально замкнуты все недиэдральные почти свободные группы, не содержащие неединичных конечных нормальных подгрупп

(и условие отсутствия конечных нормальных подгрупп здесь нельзя убрать); а позже выяснилось [KMM18], что

бесконечная диэдральная группа тоже сильно вербально замкнута,

и это скромный результат оказался более трудным, чем упомянутая выше общая теорема, полученная в [КлМа18] «индустриальным» методом. Вообще, если читатель возьмёт какую-нибудь конкретную свою любимую неабелеву группу, далёкую от свободных (конечную, например), то выяснить, является ли она сильно вербально

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00591.

замкнутой, окажется непросто (скорее всего): и доказать сильную вербальную замкнутость трудно, и опровергнуть трудно (на самом деле, даже просто привести пример не сильно вербально замкнутой группы не очень просто [КлМа18]).

Фундаментальная группа $K = \langle a, b \mid a^b = a^{-1} \rangle$ бутылки Клейна, конечно же, очень похожа на бесконечную диэдральную группу $D_\infty = \langle a, b \mid a^b = a^{-1},\ b^2 = 1 \rangle$. Нам удаётся этим воспользоваться и, оперевшись на результаты работы [КММ18], показать, что группа K, хоть и не является сильно вербально замкнутой, обладает очень близким свойством.

Алгебраическая замкнутость может быть охарактеризована на структурном языке, если группа H *нётерова по уравнениям* (то есть любая система уравнений над H от конечного числа неизвестных эквивалентна своей конечной подсистеме), а именно, алгебраическая замкнутость в этом случае эквивалентна «локальной ретрактности» [КММ18]:

> *нётерова по уравнениям подгруппа H группы G алгебраически замкнута в G тогда и только тогда, когда H является ретрактом* (то есть образом эндоморфизма ρ такого, что $\rho \circ \rho = \rho$) *каждой конечно порождённой над H подгруппы группы G* (то есть подгруппы вида $\langle H \cup X \rangle$, где множество $X \subseteq G$ конечно).

Фундаментальные группы всех поверхностей линейны [New85], а все линейные группы нётеровы по уравнениям [BMR99].

Таким образом, наш основной (и единственный) результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема. *Фундаментальная группа K бутылки Клейна* (в отличие от всех остальных групп поверхностей) *может быть вложена в некоторую конечно порождённую группу G в качестве вербально замкнутой подгруппы, не являющейся ретрактом. Однако всякая такая группа G обязана иметь подгруппу индекса два, содержащую K в качестве своего ретракта.*

В следующем параграфе мы приводим пример, доказывающий первую часть теоремы (то есть отсутствие сильной вербальной замкнутости группы K). Параграф 2 содержит вспомогательные леммы. А в последнем параграфе мы доказываем второе утверждение теоремы (то есть обещанное в названии статьи «но...»).

Автор выражает глубокую признательность Веронике Мирошниченко, вместе с которой мы долго занимались этой задачей, казавшейся временами безнадёжной. Благодарю также Андрея Мажугу за прочтение черновика этого текста.

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если x и y — элементы некоторой группы, то x^y обозначает $y^{-1}xy$, Коммутатор $[x, y]$ мы понимаем как $x^{-1}y^{-1}xy$. Если X — подмножество некоторой группы, то $\langle X \rangle$, $\langle\langle X \rangle\rangle$ и $C_H(X)$ означают, соответственно, подгруппу, порождённую множеством X, нормальное замыкание множества X и централизатор множества X в H (где H — некоторая подгруппа). Циклическую группу порядка k, порождённую элементом x, мы обозначаем символом $\langle x \rangle_k$. Свободную группу с базисом $x_1, \ldots, x_n$ мы обозначаем $F(x_1, \ldots, x_n)$.

1. Пример

Пусть $V_4 = \{1, d_1, d_2, d_3\}$ — четверная группа Клейна (то есть нециклическая группа порядка четыре). Рассмотрим полупрямое произведение

$$G = \Big(V_4 \times \langle b \rangle_\infty\Big) \leftthreetimes \Big(\langle a_1 \rangle_\infty \times \langle a_2 \rangle_\infty \times \langle a_3 \rangle_\infty\Big), \quad \text{где действие такое: } a_i^b = a_i^{-1},\ a_i^{d_i} = a_i,\ a_i^{d_j} = a_i^{-1} \text{ при всех } i \neq j.$$

Утверждение. *Подгруппа $K = \langle a, b \rangle \subset G$, где $a = a_1a_2a_3$,* (*изоморфная фундаментальной группе бутылки Клейна*) *вербально замкнута в G, но не является ретрактом.*

Доказательство. Подгруппа K не ретракт, поскольку при гипотетической ретракции $G \to K$ элементы d_i, будучи элементами конечного порядка, обязаны перейти в единицу (поскольку в K нет кручения); а тогда соотношения $a_i^{d_j} = a_i^{-1}$ покажут, что образы элементов a_i тоже имеют конечный порядок, и, следовательно, равны единице; стало быть, образ элемента $a = a_1a_2a_3 \in K$ тоже равен единице, что противоречит неподвижности элементов подгруппы K при ретракции.

Осталось показать, что подгруппа K вербально замкнута в G, то есть произвольное уравнение вида

$$w(x, y, \ldots) = h, \quad \text{где } h \in K \text{ и } w(x, y, \ldots) \text{ — элемент свободной группы } F(x, y, \ldots),$$

разрешимое в G, разрешимо в K. Любое такое уравнение можно, как известно, путём замены переменных преобразовать к виду

$$x^m u(x, y, \ldots) = h, \quad \text{где } h \in K \text{ и } u(x, y, \ldots) \text{ — элемент коммутанта свободной группы } F(x, y, \ldots). \tag{1}$$

Предположим, что уравнение (1) имеет некоторое решение $(\widetilde{x},\widetilde{y},\ldots)$ в группе G. Поскольку все d_i равноправны, можно считать, что

$$\widetilde{x}=d_1^{\varepsilon}b^la_1^{k_1}a_2^{k_2}a_3^{k_3},\quad \text{где } \varepsilon,l,k_i\in\mathbb{Z}. \tag{2}$$

У нас есть гомоморфизм *взятие первой координаты*:

$$f\colon G\to D_\infty=\langle b'\rangle_2\leftthreetimes\langle a'\rangle_\infty\,,\quad \text{где } f(a_1)=a',\quad f(a_2)=f(a_3)=f(d_1)=1,\quad f(b)=f(d_2)=f(d_3)=b',$$

и естественный гомоморфизм *степень*:

$$\deg\colon G\to\mathbb{Z},\quad \text{где } \deg(a_i)=\deg(d_i)=0,\quad \deg(b)=1,$$

Применив эти гомоморфизмы к имеющемуся у нас равенству $\widetilde{x}^mu(\widetilde{x},\widetilde{y},\ldots)=h$, мы получим

$$f\Big(\widetilde{x}^mu(\widetilde{x},\widetilde{y},\ldots)\Big)=f(\widetilde{x})^mu(f(\widetilde{x}),f(\widetilde{y}),\ldots)=f(h),\quad \text{и}\quad \deg\Big(\widetilde{x}^mu(\widetilde{x},\widetilde{y},\ldots)\Big)=m\cdot\deg(\widetilde{x})=\deg(h). \tag{3}$$

Теперь рассмотрим элементы $\widehat{x},\widehat{y},\ldots\in K$, получающиеся из элементов $\widetilde{x},\widetilde{y},\ldots\in G$ заменами

$$a_1\mapsto a=a_1a_2a_3,\quad a_2\mapsto 1,\quad a_3\mapsto 1,\quad d_1\mapsto 1,\quad d_2\mapsto b,\quad d_3\mapsto b\quad (\text{и } b\mapsto b), \tag{4}$$

которые сохраняют первую координату любого элемента.

Например, элемент $\widetilde{x}$, заданный выражением (2), превратится в

$$\widehat{x}=b^la^{k_1}=b^la_1^{k_1}a_2^{k_1}a_3^{k_1}. \tag{5}$$

Утверждается, что набор $(\widehat{x},\widehat{y},\ldots)$ есть решение уравнения (1) в K. Действительно,

- с первой координатой всё хорошо: $f\Big(\widehat{x}^mu(\widehat{x},\widehat{y},\ldots)\Big)=f(\widehat{x})^mu(f(\widehat{x}),f(\widehat{y}),\ldots)\overset{(4)}{=}f(\widetilde{x})^mu(f(\widetilde{x}),f(\widetilde{y}),\ldots)\overset{(3)}{=}f(h)$ (где из (4) и (3) вытекают соответствующие равенства);
- и со степенью всё хорошо: $\deg\Big(\widehat{x}^mu(\widehat{x},\widehat{y},\ldots)\Big)=m\cdot\deg(\widehat{x})\overset{(5)}{=}ml\overset{(2)}{=}m\cdot\deg(\widetilde{x})\overset{(3)}{=}\deg(h)$,

Остаётся заметить, что элемент группы $K\subset G$ однозначно определяется своей первой координатой и степенью. Таким образом, $\widehat{x}^mu(\widehat{x},\widehat{y},\ldots)=h$, мы нашли решение уравнения (1) в K, и это завершает доказательство.

2. Две леммы о факторизации

Лемма о факторизации по вербальным подгруппам ([РХ13], лемма 1.1). *Если $V(G)$ — вербальная подгруппа группы G, а H — вербально замкнутая подгруппа группы G, то $H\cap V(G)=V(H)$ (то есть вербальная подгруппа группы H, соответствующая тому же многообразию) и образ $H/V(H)\subseteq G/V(G)$ подгруппы H при естественном гомоморфизме $G\to G/V(G)$ вербально замкнут в $G/V(G)$.*

Лемма о диэдральной факторгруппе. *Если фундаментальная группа $K=\langle a,b\mid a^b=a^{-1}\rangle$ бутылки Клейна содержится в некоторой группе G в качестве вербально замкнутой подгруппы, то*

1) $\langle\langle b^2\rangle\rangle\cap K=\langle b^2\rangle$, *где $\langle\langle b^2\rangle\rangle$ — это нормальное замыкание элемента b^2 в G;*
2) *подгруппа $D_\infty=K/\langle b^2\rangle\subseteq G/\langle\langle b^2\rangle\rangle$ вербально замкнута в $G/\langle\langle b^2\rangle\rangle$.*

Доказательство. Можно считать, что группа G удовлетворяет тождеству $[x^2,y^2]=1$, (поскольку это тождество выполнено в K, и, следовательно, по лемме о факторизации по вербальным подгруппам можно факторизовать G по соответствующей вербальной подгруппе).

А для групп с таким тождеством, как и для всех метабелевых групп, утверждение 1) — это общий факт:

> *если A — нормальная абелева подгруппа группы G, и факторгруппа G/A тоже абелева, то пересечение $C_A(X)$ подгруппы A с централизатором любого подмножества $X\subseteq G$ нормально в G.*

Действительно, $\big(C_A(X)\big)^g=C_A(X^g)\supseteq C_A(XA)=C_A(X)$.

Чтобы вывести отсюда утверждение 1), достаточно положить $A=\big\langle\{g^2\mid g\in G\}\big\rangle$ и $X=K$; при этом мы получаем даже больше, чем 1):

подгруппы $\langle\langle b^2\rangle\rangle$ и K коммутируют в G .

Теперь докажем 2). Пусть уравнение

$$w(x,y,\ldots)=h\,\langle\langle b^2\rangle\rangle\,,\quad \text{где } h\in K \text{ и } w(x,y,\ldots)\in F(x,y,\ldots), \tag{$*$}$$

разрешимо в $G/\langle\langle b^2\rangle\rangle$. Мы хотим показать, что оно разрешимо в $D_\infty = K/\langle b^2\rangle \subseteq G/\langle\langle b^2\rangle\rangle$.
Случай 1: $h=1$. В этом случае уравнение $(*)$ имеет тривиальное решение $(1,1,\ldots)$ в D_∞.
Случай 2: $h=b$. В этом случае один из неизвестных (скажем, x) должен входить в w в нечётной степени (суммарно), поскольку иначе из разрешимости в $G/\langle\langle b^2\rangle\rangle$ уравнения $(*)$ мы получим, что элемент b является произведением квадратов в группе G, что противоречит вербальной замкнутости подгруппы K (так как в K элемент b не раскладывается в произведение квадратов, очевидно, даже по модулю $\langle a\rangle$). А уравнение с нечётной степенью вхождения переменной x имеет в D_∞ очевидное решение: $x=b,\ y=1,\ z=1,\ldots$.
Случай 3: $h=ba^k$. Этот случай немедленно сводится к предыдущему, поскольку у диэдральной группы есть автоморфизм, переводящий ba^k в b.
Случай 4 (последний случай по модулю $\langle b^2\rangle$)**:** $h=a^k$, где $k\neq 0$. Пусть $\left(\widetilde{x}\langle\langle b^2\rangle\rangle,\ \widetilde{y}\langle\langle b^2\rangle\rangle,\ldots\right)$ — решение уравнения $(*)$ в $G/\langle\langle b^2\rangle\rangle$. Тогда уравнение

$$[t,\left(w(x,y,\ldots)\right)^2]=[b,h^2]=a^{4k}\quad (\text{где } t \text{ — новый неизвестный})$$

имеет в G решение $(\widetilde{t}=b,\ \widetilde{x},\ \widetilde{y},\ldots)$, поскольку $\langle\langle b^2\rangle\rangle$ коммутирует с K, как выше было замечено. В силу вербальной замкнутости K в G последнее уравнение имеет в K некоторое решение, то есть

$$[\widehat{t},\left(w(\widehat{x},\widehat{y},\ldots)\right)^2]=a^{4k}\quad \text{для некоторых } \widehat{t},\widehat{x},\widehat{y},\ldots\in K. \qquad (**)$$

Из этого равенства немедленно вытекает, что

а) $\widehat{t}\in b\langle a,b^2\rangle$ (поскольку все остальные элементы группы K коммутируют с квадратами); мы можем считать, что $\widehat{t}=b$, так как и a, и b^2 коммутируют со всеми квадратами и не влияют на коммутатор $(**)$;
б) $\left(w(\widehat{x},\widehat{y},\ldots)\right)^2\in\langle b^2\rangle\cup\langle a^2,b^4\rangle$, поскольку только такие элементы являются квадратами в K;
в) $\left(w(\widehat{x},\widehat{y},\ldots)\right)^2\in a^{2k}\langle b^4\rangle$, поскольку только у таких элементов из $\langle b^2\rangle\cup\langle a^2,b^4\rangle$ коммутатор с $\widehat{t}=b$ даёт a^{4k};
г) $w(\widehat{x},\widehat{y},\ldots)\in a^k\langle b^2\rangle$, поскольку из элементов смежного класса $a^{2k}\langle b^4\rangle$ квадратный корень извлекается однозначно в группе K.

Мы нашли решение $(\widehat{x}\langle b^2\rangle,\widehat{y}\langle b^2\rangle,\ldots)$ уравнения $(*)$ в $D_\infty=K/\langle b^2\rangle$, и это завершает доказательство.

3. Доказательство второго утверждения теоремы

Предположим, что фундаментальная группа K бутылки Клейна является вербально замкнутой подгруппой некоторой конечно порождённой группы G. Мы должны построить ретракцию на K из подгруппы индекса не больше двух (в G), содержащей K.

В группе G есть две нормальные подгруппы:

$$N_1=G' \text{ — коммутант и } N_2=\langle\langle b^2\rangle\rangle \text{ — нормальное замыкание элемента } b^2.$$

При факторизации по ним подгруппа K превращается в

$$K/K'=\langle a\rangle_2\times\langle b\rangle_\infty\subseteq G/N_1 \text{ и } K/\langle b^2\rangle=D_\infty\subseteq G/N_2$$

(по лемме о факторизации по вербальным подгруппам и по лемме о диэдральной факторгруппе), причём эти образы группы K в G/N_i остаются вербально замкнутыми в G/N_i (по тем же леммам). Следовательно, K/K' и $K/\langle b^2\rangle$ являются ретрактами групп G/N_i, поскольку и всякая абелева группа [Mazh18], и бесконечная диэдральная группа [KMM18] сильно вербально замкнуты.

Таким образом, мы получаем эпиморфизмы

$$\deg\colon G\to G/G'\to K/K'=\langle a\rangle_2\times\langle b\rangle_\infty\to\langle b\rangle_\infty\xrightarrow{\simeq}\mathbb{Z}\quad\text{и}\quad f\colon G\to G/\langle\langle b^2\rangle\rangle\to K/\langle b^2\rangle=D_\infty$$

такие, что $\deg(b)=1,\ f(b)=b\langle b^2\rangle,\ f(a)=a\langle b^2\rangle$. Из этих двух «псевдоретракций» мы строим гомоморфизм

$$\Phi\colon G\to\mathbb{Z}\times D_\infty,\quad g\mapsto\left(\deg(g),\ f(g)\right).$$

Ограничение φ гомоморфизма Φ на подгруппу K инъективно, а образ этого ограничения — это так называемое *расслоенное произведение*:

$$\varphi(K)=\Phi(K)=\left\{\left(i,\ b^ja^k\langle b^2\rangle\right)\ \middle|\ i\equiv j\pmod 2\right\}\text{ — подгруппа индекса два в } \mathbb{Z}\times D_\infty\ .$$

Поэтому подгруппа $\Phi^{-1}(\Phi(K))\subseteq G$ имеет индекс не больше двух в G и обладает ретракцией на K:

$$G\supseteq\Phi^{-1}(\Phi(K))\xrightarrow{\Phi}\Phi(K)\xrightarrow{\varphi^{-1}}K.$$

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[КлМа18] Ант. А. Клячко, А. М. Мажуга, Вербально замкнутые почти свободные подгруппы, Мат. сборник, 209:6 (2018), 75-82. См. также arXiv:1702.07761.

[Маж19] А. М. Мажуга, Свободные произведения групп сильно вербально замкнуты, Мат. сборник, 210:10 (2019), 122-160. См. также arXiv:1803.10634.

[РТ19] В. А. Романьков, Е. И. Тимошенко, О вербально замкнутых подгруппах свободных разрешимых групп, Вестник Омского университета, 24:1 (2019), 9-16. См. также arXiv:1906.11689.

[РХ13] В. А. Романьков, Н. Г. Хисамиев, Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп, Алгебра и логика, 52:4 (2013), 502-525.

[BMR99] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups I. Algebraic sets and ideal theory, J. Algebra, 219:1 (1999), 16-79.

[Bog18] O. Bogopolski, Equations in acylindrically hyperbolic groups and verbal closedness, arXiv:1805.08071.

[Bog19] O. Bogopolski, On finite systems of equations in acylindrically hyperbolic groups, arXiv:1903.10906.

[KMM18] A. A. Klyachko, A. M. Mazhuga, V. Yu. Miroshnichenko, Virtually free finite-normal-subgroup-free groups are strongly verbally closed, J. Algebra, 510 (2018), 319-330. См. также arXiv:1712.03406.

[Lee02] D. Lee, On certain C-test words for free groups, J. Algebra, 247:2 (2002), 509-540. См. также arXiv:math/0103108.

[Mazh17] A. M. Mazhuga, On free decompositions of verbally closed subgroups of free products of finite groups, J. Group Theory, 20:5 (2017), 971-986. См. также arXiv:1605.01766.

[Mazh18] A. M. Mazhuga, Strongly verbally closed groups, J. Algebra, 493 (2018), 171-184. См. также arXiv:1707.02464.

[MR14] A. Myasnikov, V. Roman'kov, Verbally closed subgroups of free groups, J. Group Theory, 17:1 (2014), 29-40. См. также arXiv:1201.0497.

[New85] M. Newman, A note on Fuchsian groups, Illinois J. Math., 29:4 (1985), 682-686.

[Rom12] V. A. Roman'kov, Equations over groups, Groups Complexity Cryptology, 4:2 (2012), 191-239.