УДК 512.543.52 + 512.543.72 MSC: 20E06, 20F06, 57M07, 20F12, 20F70

КВАЗИПЕРИОДИЧЕСКИЕ И СМЕШАННЫЕ КОММУТАТОРНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ГРУПП

Сергей В. Иванов[♭] Антон А. Клячко[♯]

[♭] *Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana, IL 61801, U.S.A.*
ivanov@illinois.edu

[♯] *Механико-математический факультет Московского государственного университета*
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ
klyachko@mech.math.msu.su

В свободной группе, как известно, никакой неединичный коммутатор не является истинной степенью. Мы доказываем одну общую теорему, из которой вытекает несколько любопытных фактов, например, следующее усиление упомянутого выше утверждения: *если в свободной группе неединичный коммутатор разложить в произведение нескольких сопряжённых между собой элементов, то все эти элементы обязательно окажутся попарно разными.*

0. Введение

Хорошо известно, что в свободной группе неединичные коммутаторы не являются истинными степенями [Sch59]. Этот факт обобщался в разных направлениях, например, известно, что такой же результат остаётся верным в группах без кручения, удовлетворяющих (достаточно сильному) условию малого сокращения [FK12]. В свободных произведениях групп ситуация сложнее, но тоже полностью изучена [CCE91].

М. Каллер [Cull81] заметил, что в свободной группе $F(a,b)$ куб коммутатора $[a,b]$ является произведением двух коммутаторов: $[a,b]^3 = [a^{-1}ba, a^{-2}bab^{-1}][bab^{-1}, b^2]$. Более того, в работе [Cull81] показано, что $[a,b]^n$ раскладывается в произведение k коммутаторов, если $n \leqslant 2k-1$.

В работе [CCE91] доказано, что неединичное произведение двух коммутаторов в свободной группе не может быть более чем третьей степенью, то есть в свободной группе равенство $[x_1,y_1][x_2,y_2] = z^n$, где $n \geqslant 4$, влечёт, что $z = 1$.

Авторы [CCE91] высказали гипотезу, что оценка Каллера $n \leqslant 2k-1$ даёт для свободной группы максимальную степень n, которая может равняться неединичному произведению g коммутаторов. Другими словами, гипотеза Комерфорда, Комерфорда и Эдмундса говорит, что в свободной группе равенство $[x_1,y_1]\dots[x_k,y_k] = z^n$, где $n \geqslant 2k$, влечёт, что $z = 1$.

Эта гипотеза оказалась действительно верной. Теорема 3.3 работы [DH91] говорит, что в свободном произведении $A * B$ локально индикабельных групп равенство $[x_1,y_1]\dots[x_k,y_k] = z^n$, где $n \geqslant 2k$, влечёт, что z сопряжён с элементом одного из свободных сомножителей A или B.

Наша основная теорема показывает, в частности, что то же самое верно для свободных произведений произвольных групп без кручения (и даже для групп с кручением, если это кручение не слишком маленькое). Заметим, что в случае маленького кручения аналогичное утверждение перестаёт быть верным: в бесконечной диэдральной группе $\langle c\rangle_2 * \langle d\rangle_2$ все степени коммутатора $[c,d]$ являются коммутаторами.

Основная теорема. *Если в свободном произведении нескольких групп без кручения*

$$c_1\dots c_k d_1\dots d_l = e_1^{n_1}\dots e_m^{n_m},$$

где c_i являются коммутаторами,
d_i сопряжены элементам свободных сомножителей,
e_i сопряжены друг другу и не сопряжены элементам свободных сомножителей и
n_i — натуральные числа,

$$\text{то}\quad \sum (n_i - 1) \leqslant 2k + l - 2.$$

(*То же самое верно для свободных произведений групп с кручением, в которых порядки всех неединичных элементов больше чем $\sum n_i$.*)

Следствие. *Если в свободном произведении нескольких групп без кручения*

$$c_1\dots c_k d_1\dots d_l = e_1\dots e_m,$$

где c_i являются коммутаторами,
d_i сопряжены элементам свободных сомножителей, а
e_i сопряжены друг другу и не сопряжены элементам свободных сомножителей,
то в последовательности $(e_1,\dots,e_m)$ никакой элемент не встречается больше чем $2k+l-1$ раз.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №15-01-05823.

Этот текст довольно сильно отличается от английской версии (arXiv:1702.01379), но суть та же.

Похожий (но другой — ни более слабый, ни более сильный) результат был недавно получен в работе [Che16] с помощью техники, описанной в книге [Cal09] (Это следствие включает в себя недавний результат Чена [Che16].) Например, в свободной группе

- неединичный коммутатор часто можно разложить в произведение ста сопряжённых между собой элементов, но в таком случае все эти сто элементов должны быть разными;
- неединичное произведение двух коммутаторов часто можно разложить в произведение ста сопряжённых между собой элементов, но в таком случае среди этих ста элементов элементов, ни один не может встретиться больше трёх раз;
- ...

Другой пример: в свободном произведении $A * B$ групп без кручения

- неединичный элемент из A нельзя разложить в произведение нескольких сопряжённых между собой элементов, не лежащих в A;
- произведение ab неединичных элементов из A и из B часто можно разложить в произведение ста сопряжённых между собой элементов, но в таком случае все эти сто элементов обязаны быть разными;
- ...

Мы будем называть *двойным* или *смешанным родом* элемента w свободного произведения групп $A*B$ минимальное s такое, что w представляется в виде произведения k коммутаторов и l элементов подгрупп, сопряжённых сомножителям A и B, причём $2k + l = s$. Например,

- двойной род ноль имеет только единичный элемент группы $A * B$;
- двойной род один имеют только неединичные элементы подгрупп, сопряжённых сомножителям;
- двойной род два имеют только не сопряжённые элементам сомножителей элементы вида $[u, v]$, $a^u a^v$, $b^u b^v$ и $a^u b^v$ (где $a \in A$, $b \in B$, $u \in A * B \ni v$);

Степенностью или *квазипериодичностью* элемента $w \in A * B$ мы назовём максимальное s такое, что w раскладывается в произведение $e_1^{n_1} \dots e_m^{n_m}$, где все e_i сопряжены между собой и не сопряжены элементам сомножителей A и B, а $\sum(n_i - 1) = s$. Например, если $u, v \in A * B$ — сопряжённые элементы, не сопряжённые элементам свободных сомножителей, то

- элемент $u^4 v^2$ имеет степенность по крайней мере четыре;
- элемент $u^3 vuv$ имеет степенность по крайней мере три, поскольку он переписывается в виде $u^4 v^u v$.

Отметим ещё, что если в разложении $w = e_1^{n_1} \dots e_m^{n_m}$ в произведение сопряжённых элементов имеется p одинаковых сомножителей, то степенность элемента w не меньше $p - 1$, поскольку, пользуясь тождеством $uv = vu^v$, мы можем переставить сомножители, чтобы эти p одинаковых сомножителей шли подряд и образовывали p-ю степень.

Отсюда, в частности, вытекает, что если группа $A * B$ имеет кручение, то степенность единицы (а следовательно, и многих других элементов) бесконечна. Действительно, если, например, элемент $a \in A$ имеет порядок три, то

$$1 = [a, b][a, b]^{a^{-1}}[a, b]^{a^{-2}} \quad \text{и, следовательно, } 1 = \left([a, b][a, b]^{a^{-1}}[a, b]^{a^{-2}}\right)^{2017}$$

и мы получили разложение единицы в произведение сопряжённых элементов, в котором один из этих сопряжённых элементов ($[a, b]$, например) встречается сколь угодно много раз. В силу сделанного выше замечания это означает бесконечную степенность единицы. Основная теорема показывает, что в группах без кручения всё гораздо лучше:

> *если группа $A * B$ не имеет кручения, то степенность каждого элемента меньше бесконечности, а элементы свободных сомножителей вообще не раскладываются нетривиальным образом в произведения сопряжённых между собой элементов, не лежащих в сомножителях.*

Это означает, что степенность единицы равна нулю (поскольку для неё есть только пустое разложение), а степенность неединичных элементов сомножителей A и B можно считать минус бесконечностью (поскольку для них вообще нет никаких разложений).

Вообще, основную теорему можно переформулировать так:

> *степенность каждого элемента свободного произведения групп без кручения не превосходит двойного рода этого элемента минус два*

и улучшить эту оценку нельзя, как показывает упомянутый выше результат Каллера [Cull81] или даже более простое тождество $(ab)^n = a^n b^{a^{n-1}} b^{a^{n-2}} \dots b^a b$, из которого видно, что элемент $(ab)^n \in (A * B) \setminus (A \cup B)$ имеет степенность (по крайней мере) $n - 1$ и двойной род (не больше) $n + 1$.

Наше доказательство основано на использовании леммы о столкновениях [Kl93] (см. также [FeR96]), которая имеет несколько приложений к теории групп (см., например, [CG95], [FeR96], [Kl97], [FeR98], [CG00], [CR01], [FoR05], [Кл05], [Кл06a], [Кл06b], [Кл07], [Kl09], [Le09], [KlL12], [FK12]).

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, а x и y — элементы некоторой группы, то x^y, x^{ky} и x^{-y} обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^k y$ и $y^{-1}x^{-1}y$, соответственно. Символ g^G

обозначает класс сопряжённости элемента g группы G. Коммутатор $[x,y]$ мы понимаем как $x^{-1}y^{-1}xy$. Эйлерову характеристику компактной поверхности S мы обозначаем $\chi(S)$. Буквы $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначают множества вещественных, целых и натуральных (целых положительных) чисел, соответственно.

1. Диаграммы Хауи

Пусть имеется замкнутая ориентированная поверхность S (возможно несвязная) и карта на S, то есть (неориентированный) граф, который вложен в поверхность S и разбивает её на односвязные области, называемые *гранями* или *клетками*). Такую карту мы называем *диаграммой* над свободным произведением $A*B$, если
- граф двудольный, то есть вершины разделены на два класса: A-вершины и B-вершины и каждое ребро соединяет A-вершину с B-вершиной;
- углы при A-вершинах помечены элементами группы A, а углы при B-вершинах помечены элементами группы B;
- некоторые вершины выделены и называются *внешними*, остальные вершины называются *внутренним*;
- метка каждой внутренней A-вершины равна единице в группе A, а метка каждой внутренней B-вершины равна единице в группе B, где под *меткой вершины* понимается произведение меток углов при этой вершине, перечисленных по часовой стрелке.

Подобные диаграммы рассматривались в [How83], [How90], [Kl93], [Le09] и многих других работах, но наши определения слегка отличаются.

Метка грани такой диаграммы определяется естественным образом как произведение меток всех углов этой грани против часовой стрелки. Метка грани представляет собой элемент свободного произведения $A*B$, определённый с точностью до сопряжённости.

Например, на рисунке 1 изображена карта на торе (который нарисован в виде прямоугольника с отождествлёнными противоположными сторонами), содержащая две вершины, три ребра, одну грань и шесть углов с метками $a \in A$ и $b \in B$. Если вершины внутренние, то a^3 должно быть равно единице в группе A, а b^3 должно быть равно единице в группе B. Метка грани здесь равна $(ab)^3$. Эта диаграмма показывает, что куб произведения двух элементов порядка три всегда является коммутатором.

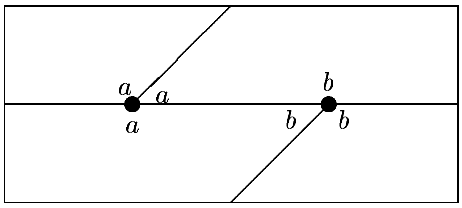

Рис. 1

Мы называем карту *несократимой* если у неё нет углов с единичными метками. *Двойным родом* карты мы называем сумму удвоенного рода поверхности*) и числа внешних вершин. Другими словами, для карты

$$\text{двойной род} \;=\; 2-(\text{число граней})+(\text{число рёбер})-(\text{число внутренних вершин}).$$

Связь между двойным родом элемента свободного произведения и двойным родом диаграммы состоит в том, что

двойной род циклически несократимого элемента $u\in(A*B)\setminus(A\cup B)$ равен минимальному двойному роду несократимой диаграммы над $A*B$, состоящей из одной клетки с меткой u.

Нам понадобится чуть более сильный факт.

Лемма о геометрическом смысле двойного рода. *Если в свободном произведении $G=A*B$ классы сопряжённости $u_1^G,\dots,u_m^G$ не пересекаются со свободным сомножителям A и B, то минимальный двойной род элемента произведения $u_1^Gu_2^G\dots u_m^G$ этих классов совпадает с минимальным двойным родом несократимой диаграммы, состоящей из m клеток с метками $u_1,\dots,u_m$.*

Доказательство. Докажем, что минимальный двойной род диаграммы не превосходит минимального двойного рода элемента. Противоположное неравенство мы использовать не будем, поэтому его доказательство мы оставляем читателям в качестве упражнения

Во-первых заметим, что легко построить с о к р а т и м у ю диаграмму нужного двойного рода, метки m клеток которой равны $u_1,\dots,u_m$, а метки оставшихся клеток равны единице, причём эта диаграмма будет связной (то есть поверхность будет связной).

*) Под *родом* необязательно связной замкнутой поверхности мы всегда понимаем $\frac{1}{2}(2-\chi)$, где χ — эйлерова характеристика поверхности.

Действительно, можно поступить, например, следующим образом. Пусть элемент минимального двойного рода из произведения классов сопряжённости имеет вид

$$w = u_1^{g_1} \dots u_m^{g_m} = [v_1, w_1] \dots [v_k, w_k] f_1 \dots f_l, \quad \text{где} \quad u_i, g_i v_i, w_i, f_i \in A * B,$$

причём f_i сопряжены элементам сомножителей и $2k + l$ — это двойной род элемента w. Нарисуем на плоскости большую окружность, поставим на ней много вершин и поставим в качестве меток углов (внутри круга и против часовой стрелки) буквы слова

$$u_m^{-g_m} \dots u_1^{-g_1} [v_1, w_1] \dots [v_k, w_k] f_1 \dots f_l,$$

в котором мы не производим никаких сокращений и, более того, между словами u_i^{-1}, $g_i^{\pm 1}$, $v_i^{\pm 1}$, $w_i^{\pm 1}$, f_i мы ставим несколько дополнительных вершин, углам при которых (внутри круга) приписываем метки $1 \in A$ и $1 \in B$, заботясь о том, чтобы граф получился двудольный (то есть, чтобы углы с метками из A чередовались с углами с метками из B). Таким образом мы получили грань Γ, метка которой равна единице (в $A * B$). Теперь для каждого u_i выберем A-вершину с единичной меткой перед началом слова u_i^{-1} и B-вершину с единичной меткой после конца u_i^{-1} и соединим дополнительным ребром на плоскости вне клетки Γ. Отождествим теперь отрезки с метками v_i и v_i^{-1}, а также w_i и w_i^{-1} и получим карту на связной ориентированной поверхности рода k. Правда не все углы имеют метки. Более точно, у нас есть вершины степени три и два. Каждый угол при вершине степени три либо имеет метку один, либо не имеет пока метки, а у каждой вершины степени два либо оба угла имеют метки (причём эти метки взаимно обратны), либо один из углов имеет метку, а второй не имеет. Дорасставим теперь метки естественным образом:

- у всех углов при вершинах степени три поставим единичные метки;
- у вершин степени два, отвечающим серединам слов f_i припишем единичные метки углам, которые меток не имели; и объявим эти вершины внешними;
- с остальными вершинами степени два поступим так: если один из углов при такой вершине имеет метку c, то второму углу припишем метку c^{-1}.

Понятно, что мы получили диаграмму на связной ориентированной поверхности рода k с l внешними вершинами; m клеток этой диаграммы имеют метки $u_1, \dots, u_m$, а остальные клетки имеют единичные метки.

Теперь будем делать эту диаграмму несократимой. Связность при наших преобразованиях может нарушиться, но мы будем заботиться о том, чтобы каждая компонента связности содержала хоть одну клетку с неединичной меткой.

Пусть имеется два смежных ребра α и β, исходящих из вершины x и угол между этими рёбрами имеет единичную метку. Пусть ребро α соединяет вершины x и y, а ребро β соединяет x и z. Заметим, что $y \neq x \neq z$, поскольку наш граф двудольный. Возможны три случая.

Случай 1: $y \neq z$. В этом случае мы просто «схлопнем» рёбра α и β, вершины y и z при этом склеятся, а метки соответствующих углов при этих вершинах мы перемножим (рис. 2).

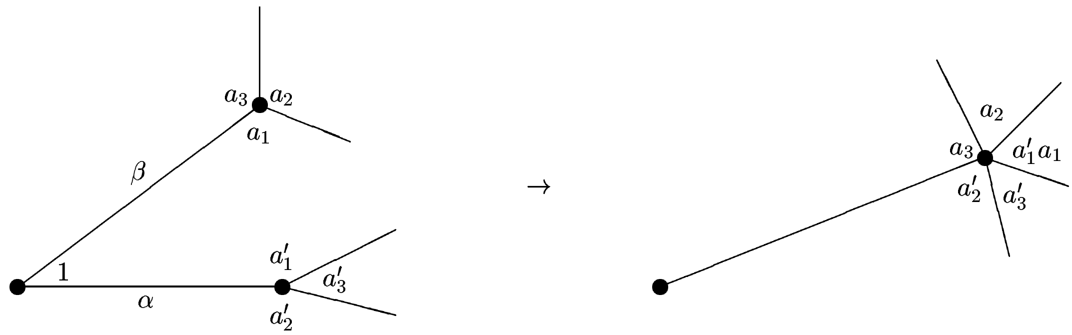

Рис. 2

Случай 2: $y = z$, но $\alpha \neq \beta$. В этом случае мы разрежем поверхность по циклу состоящему из рёбер α и β и получим (возможно несвязную) поверхность с двумя дырами (то есть с краем, состоящим из двух окружностей). На одной дыре есть две вершины x' и y', которые соединены рёбрами α' и β', а на другой дыре есть две вершины x'' и y'', которые соединены рёбрами α'' и β'', причём из вершины x'' других рёбер не исходит.

Если обе получившиеся компоненты содержат клетки с неединичной меткой (или если разрезание не привело к образованию новых компонент связности), то схлопнем рёбра α' и β', а также α'' и β''. Вершины y' и y'' объявим внешними, вершину x' оставим в том же статусе, который был у вершины x, а вершину x'' (которая имеет степени один, и единственный угол при ней имеет единичную метку) объявим внутренней (рис. 3).

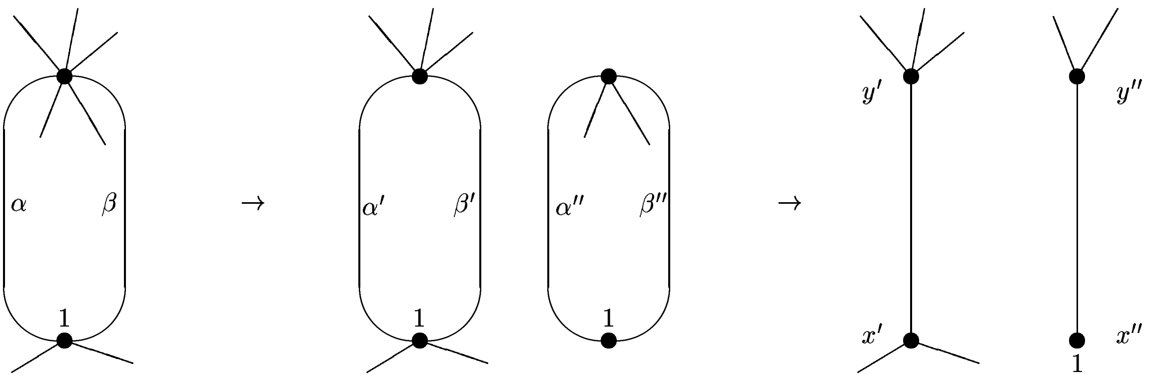

Рис. 3

Двойной род диаграммы может при этом только уменьшиться. Действительно,

$$\textit{двойной род диаграммы} \;=\; 2-\chi(S)+(\textit{число внешних вершин}).$$

При разрезании мы увеличили количество рёбер на два и увеличили количество вершин на два (то есть не изменили эйлерову характеристику). При схлопывании двух пар рёбер мы уменьшили количество рёбер на два (то есть увеличили эйлерову характеристику на два). При объявлении двух вершин внешними мы увеличили двойной род на два или на один (в зависимости от того, была ли вершина y внешней). В итоге двойной род не вырос.

Если же в результате разрезания образовалась компонента, все клетки которой имеют единичные метки, то мы удалим эту компонент. На оставшейся компоненте остались рёбра $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, соединяющие вершины $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ (где $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ — это α', β', x' и y' или α'', β'', x'' и y'' в зависимости от того, какую компоненту мы удалили). Схлопнем рёбра $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, вершину $\widetilde{x}$ оставим в том же статусе, который был у x, а с вершиной $\widetilde{y}$ поступим следующим образом: если удалённая компонента была диском без внешних вершин, то оставим $\widetilde{y}$ в том же статусе, какой был у y (вершины $\widetilde{y}$ и y имеют одинаковые метки в этом случае); если же удалённая компонента не была диском или содержала внешние вершины, то мы объявим вершину $\widetilde{y}$ внешней).

Понятно, что двойной род при этом не увеличится, а в случае, когда удалённая компонента была диском без внешних вершин (и все её клетки имели единичную метку), метка вершины $\widetilde{y}$ равна метки вершины y.

Случай 3: $\alpha=\beta$ (то есть вершина x имеет степень один). Заметим, что в этом случае степень вершины y больше единицы, поскольку в противном случае α было бы единственным ребром в своей компоненте поверхности, эта компонента была бы сферой и метка единственной грани была бы элементом свободного сомножителя A или B, что невозможно, поскольку каждая компонента содержит грань с неединичной меткой, а u_i не сопряжены элементам сомножителей по условию.

Таким образом, вершина y имеет степень больше чем один и мы можем просто удалить вершину x и ребро α, а метки двух углов при вершине y перемножить (рис. 4). Ясно, что двойной род при этом не увеличится и доказательство закончено.

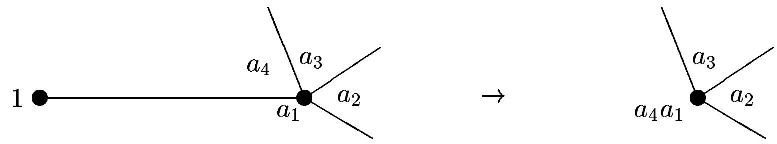

Рис. 4

2. Движения

Этот параграф почти дословно повторяет соответствующий параграф из работы [FK12] и состоит из определений и утверждений, которые мы позаимствовали из [Кл05] (слегка упростив их применительно к интересующему нас случаю).

Пусть на замкнутой ориентированной поверхности S имеется карта M. *Автомобилем*, объезжающим грань D этой карты, называют сохраняющее ориентацию накрытие границы ∂D грани D ориентированной окружностью R (*окружностью времени*).

Говоря по-простому, автомобиль объезжает границу своей грани против часовой стрелки (внутренность грани остается слева от автомобиля), не разворачиваясь и не останавливаясь. При этом движение периодично.

Если число автомобилей, оказавшихся в момент времени t в точке p одномерного остова поверхности S, равно кратности этой точки, то мы говорим, что в точке p в момент t происходит *полное столкновение*. При этом точка p называется *точкой полного столкновения*. Точки полного столкновения, лежащие на ребрах, мы называем просто *точками столкновения*.

Кратным движением периода T на карте M называется набор автомобилей $\alpha_{D,j}\colon R \to \partial D$, где $j = 1, \ldots, d_D$, такой что

1) $d_D \geqslant 1$ (то есть каждую грань объезжает по крайней мере один автомобиль);
2) $\alpha_{D,j}(t+T) = \alpha_{D,j+1}(t)$ для любого $t \in R$ и $j = \{1, \ldots, d_D\}$ (здесь индексы берутся по модулю d_D, а сложение точек окружности R производится естественным образом: $R = \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$);
3) существует такое разбиение каждой из окружностей ∂D на d_D дуг (с непересекающимися внутренностями), что на протяжении интервала времени $[0, T]$ каждый автомобиль $\alpha_{D,j}$ движется по j-й дуге.

Лемма о столкновениях [Кл05], [Kl97]. *Для любого кратного движения на карте на замкнутой ориентированной поверхности S число точек полного столкновения не меньше чем*

$$\chi(S) + \sum_D (d_D - 1), \quad \text{где сумма распространяются на все грани карты.}$$

В упомянутых работах эта лемма была сформулирована и доказана для связных поверхностей, но она остаётся верной и в несвязном случае по очевидным причинам — и левая, и правая часть неравенства аддитивна относительно несвязного объединения.

3. Доказательство основной теоремы

Сперва заметим, что теорему достаточно доказать для свободных произведений двух сомножителей $A * B$, поскольку свободное произведение произвольного числа групп $\ast H_i$ можно вложить в свободное произведение некоторых двух групп таким образом, что

1) множество порядков элементов в $A * B$ такое же как в $\ast H_i$;
2) элемент $w \in \ast H_i$ сопряжён в этой группе элементу одного из сомножителей H_i тогда и только тогда, когда он сопряжён в $A * B$ элементу одного из сомножителей A или B.

Из второго свойства вытекает, что степенность элемента w в группе $\ast H_i$ не превосходит его степенности в группе $A * B$, а двойной род элемента w в группе $\ast H_i$ не меньше его двойного рода в группе $A * B$. Поэтому достаточно доказать требуемое неравенство для группы $A * B$.

Чтобы обеспечить условия 1) и 2), достаточно положить $A = \ast \widetilde{H}_i$, где $\widetilde{H}_i$ — изоморфные копии групп H_i (с изоморфизмом $x \mapsto \widetilde{x}$), в качестве группы B взять любую группу без кручения достаточно большой мощности, а в качестве вложения $\ast H_i \to A * B$ взять отображение

$$H_i \ni h_i \mapsto \left(\widetilde{h}_i\right)^{b_i} \in A * B, \quad \text{где } b_i \in B \text{ — какие-нибудь фиксированные попарно разные элементы.}$$

Будем теперь доказывать теорему для свободного произведения двух групп. Рассмотрим «степенное разложение» произвольного элемент $w \in A * B$:

$$w = u^{n_1 g_1} u^{n_2 g_2} \ldots u^{n_m g_m}, \quad \text{где } u \in (A * B) \setminus (A \cup B) \text{ — циклически несократимый элемент, } g_i \in A * B \text{ и } n_i \in \mathbb{N},$$

причём $\sum(n_i - 1)$ равна степенности элемента w. По лемме о геометрическом смысле двойного рода мы получаем несократимую диаграмму, состоящую из m клеток с метками u^{n_1}, u^{n_2}, $\ldots$, u^{n_m}, и двойной род этой диаграммы совпадает с двойным родом элемента w.

Пусть слово u имеет вид $u = a_1 b_1 \ldots a_p b_p$, где $a_i \in A \setminus \{1\}$ и $b_i \in B \setminus \{1\}$. Организуем теперь движение на этой диаграмме следующим образом:

> клетку с меткой u^{n_i} объезжают n_i автомобилей с постоянной скоростью одно ребро в минуту; в нулевой момент времени все они находятся в (разных) углах с меткой b_p.

Ясно, что мы имеем дело с кратным периодическим движением с набором кратностей $n_1, \ldots, n_m$ и периодом $2p$. Посмотрим, где могут происходить полные столкновения.

Столкновения на рёбрах (то есть не в вершинах) происходить не могут, поскольку в каждый момент времени мы имеем одну из следующих конфигураций:

- либо все автомобили находятся в A-вершинах (это происходит в нечётные моменты времени),
- либо все автомобили находятся в B-вершинах (это происходит в чётные моменты времени),
- либо каждый автомобиль едет от A-вершины к B-вершине (это происходит в нецелые моменты времени, целая часть которых нечётна),
- либо каждый автомобиль едет от B-вершины к A-вершине (это происходит в нецелые моменты времени, целая часть которых чётна).

Таким образом никогда два автомобиля не едут по ребру навстречу друг другу, а значит они не могут столкнуться на ребре.

Полные столкновения во внутренних вершинах тоже происходить не могут, поскольку в каждый целый момент времени, все автомобили находятся в углах с одинаковыми метками: в чётный момент времени $2i$ все автомобили проезжают углы с меткой b_i (индексы по модулю p), а в нечётный момент времени $2i+1$ все автомобили проезжают углы с меткой a_i. Следовательно, при вершине полного столкновения все углы должны иметь одинаковую метку. Во внутренней вершине такого быть не может, поскольку по определению диаграммы произведение меток углов при такой вершине должна быть единицей, а группа не имеет кручения по условию (и $a_i \neq 1 \neq b_i$).

Отметим, что это единственное место, в котором мы используем отсутствие кручения. Поэтому всё останется справедливым, если условие отсутствия кручения заменить на отсутствие неединичных элементов порядка $\leqslant \sum n_i$. В этом случае полное столкновение во внутренней вершине не может произойти, поскольку количество автомобилей, участвующих в таком гипотетическом столкновении превосходит общее количество автомобилей.

Получается, что полные столкновения могут происходить лишь во внешних вершинах. Но по лемме о столкновениях полные столкновения должны произойти по крайней мере в $\chi(S)+\sum(n_i-1)$ различных точках. Следовательно,

$$\text{\textit{число внешних вершин}} \geqslant \chi(S)+\sum(n_i-1), \quad \text{то есть} \quad (\text{\textit{число внешних вершин}})-\chi(S) \geqslant \sum(n_i-1).$$

Левая часть последнего неравенства есть двойной род минус два, а правая часть равна степенности и доказательство закончено.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Кл05] Ант. А. Клячко, Гипотеза Кервера–Лауденбаха и копредставления простых групп, Алгебра и логика, 44:4 (2005), 399–437. См. также arXiv:math.GR/0409146

[Кл06a] Ант. А. Клячко, Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами, Мат. заметки, 79:3 (2006), 409–419. См. также arXiv:math.GR/0406382.

[Кл06b] Ант. А. Клячко, SQ-универсальность относительных копредставлений с одним соотношением, Мат. сборник, 197:10 (2006), 87–108. См. также arXiv:math.GR/0603468.

[Кл07] Ант. А. Клячко, Свободные подгруппы относительных копредставлений с одним соотношением, Алгебра и логика, 46:3 (2007), 290–298. См. также arXiv:math.GR/0510582.

[Cal09] Calegari, D. scl, MSJ Memoirs, 20. Mathematical Society of Japan, Tokyo (2009).

[Che16] L. Chen, Spectral gap of scl in free products, arXiv:1611.07936.

[CG95] A. Clifford and R.Z. Goldstein, Tesselations of S^2 and equations over torsion-free groups, Proc. Edinburgh Math. Soc., 38 (1995), 485–493.

[CG00] A. Clifford and R.Z. Goldstein, Equations with torsion-free coefficients, Proc. Edinburgh Math. Soc., 43 (2000), 295–307.

[CR01] M.M. Cohen and C. Rourke, The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups, Geometry & Topology, 5 (2001), 127–142. См. также arXiv:math.GR/0009101.

[CCE91] J. A. Comerford, L. P. Comerford and C. C. Edmunds, Powers as products of commutators, Comm. Algebra, 19 (1991), 675–684.

[CER94] L.P. Comerford, C.C. Edmunds, and G. Rosenberger, Commutators as powers in free products of groups, Proc. Amer. Math. Soc., 122 (1994), 47–52.

[Cull81] M. Culler, Using surfaces to solve equations in free groups, Topology, 20 (1981), 133–145.

[DH91] A. J. Duncan and J. Howie, The genus problem for one-relator products of locally indicable groups, Math. Z., 208 (1991), 225–237.

[FeR96] R. Fenn and C. Rourke, Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups, L'Enseignment Mathématique, 42 (1996), 49–74.

[FeR98] R. Fenn and C. Rourke Characterisation of a class of equations with solution over torsion-free groups, from "The Epstein Birthday Schrift", (I. Rivin, C. Rourke and C. Series, editors), Geometry and Topology Monographs., 1 (1998), 159–166.

[FK12] E. V. Frenkel and Ant. A. Klyachko, Commutators cannot be proper powers in metric small-cancellation torsion-free groups, arXiv:1210.7908.

[FoR05] M. Forester and C. Rourke, Diagrams and the second homotopy group, Comm. Anal. Geom., 13 (2005), 801–820. См. также arXiv:math.AT/0306088

[How83] J. Howie, The solution of length three equations over groups, Proc. Edinburgh Math. Soc., 26 (1983), 89–96.

[How90] Howie J. The quotient of a free product of groups by a single high-powered relator. II. Fourth powers, Proc. London Math. Soc., 61 (1990), 33–62.

[Kl93] Ant. A. Klyachko, A funny property of a sphere and equations over groups, Comm. Algebra, 21 (1993), 2555–2575.

[Kl97] Ant. A. Klyachko, Asphericity tests, Internat. J. Algebra Comp., 7 (1997), 415–431.

[Kl09] Ant. A. Klyachko, The structure of one-relator relative presentations and their centres, Journal of Group Theory, 12:6 (2009), 923–947. См. также arXiv:math.GR/0701308

[KlL12] Ant. A. Klyachko and D. E. Lurye, Relative hyperbolicity and similar properties of one-generator one-relator relative presentations with powered unimodular relator, J. Pure Appl. Algebra, 216:3 (2012), 524–534. См. также arXiv:1010.4220.

[Le09] Le Thi Giang, The relative hyperbolicity of one-relator relative presentations, Journal of Group Theory, 12:6 (2009), 949–959. См. также arXiv:0807.2487

[Sch59] M. P. Schützenberger, Sur l'equation $a^{2+n}=b^{2+m}c^{2+p}$ dans un groupe libre, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 248 (1959), 2435–2436.