УДК 512.543.72+512.543.73+512.544.33+512.543.56 MSC: 20F70, 20F16, 20E22, 20E10

УРАВНЕНИЯ НАД РАЗРЕШИМЫМИ ГРУППАМИ

Антон А. Клячко♭♯ Михаил А. Михеенко♭♯ Виталий А. Романьков♮×

♭ *Механико-математический факультет Московского государственного университета Москва 119991, Ленинские горы, МГУ.*

♯ *Московский центр фундаментальной и прикладной математики.*

♮ *Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН, Омск 644043, ул. Певцова, 13.*

× *Омский государственный университет им. Ф. М. Достоевского, Омск 644077, проспект Мира, 55-а.*

klyachko@mech.math.msu.su *mamikheenko@mail.ru* *romankov48@mail.ru*

Не всякое невырожденное уравнение над метабелевой группой имеет решение в большей метабелевой группе. Однако наличие в разрешимой группе субнормального ряда с абелевыми факторами без кручения гарантирует существование такого решения в некоторой большей группе с субнормальным рядом такой же длины с абелевыми факторами без кручения (и даже для систем уравнений имеет место аналогичный факт).

0. Введение

Систему уравнений $\{w_i = 1 \mid i \in I\}$ с коэффициентами из группы G, где w_i — слова в алфавите $G \sqcup X^{\pm 1}$, а X — некоторое множество (*множество неизвестных*), называют *разрешимой над* группой G, если существуют группа $\widetilde{G}$, содержащая G в качестве подгруппы, и ретракция свободного произведения $\widetilde{G} * F(X)$ на $\widetilde{G}$, содержащая все элементы w_i в своём ядре (здесь и далее $F(X)$ — это свободная группа с базисом X). Если *группу решений* $\widetilde{G}$ можно выбрать из какого-то класса $\mathcal{K}$, то говорят, что система *разрешима в классе* $\mathcal{K}$.

Исследованию разрешимости уравнений над группами посвящено множество работ: смотрите, например, [GR62], [Le62], [B80], [Ly80], [How81], [Б84], [EH91], [How91], [K93], [КП95], [FeR96], [K97], [K99], [CG00], [EdJu00], [IK00], [Juhá03], [K06], [P08] [БК12], [KL12], [KT17], [Ro17], [BE18], [ABA21], [EH21], [NT22], [KM22] и литературу, там цитируемую; смотрите также обзоры [Ro12], [HPP79] и книгу [ЛШ80].

Система уравнений (возможно, бесконечная и, возможно, с бесконечным числом неизвестных) над группой называется *невырожденной*, если строки, составленные из сумм показателей степеней вхождения неизвестных в каждое уравнение, линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Если же эти строки линейно независимы над полем $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ из p элементов для каждого простого p, то систему уравнений мы называем *унимодулярной*. В частности, одно уравнение с одним неизвестным

- невырождено, если сумма показателей степеней вхождения неизвестного в это уравнение ненулевая;
- и унимодулярно, если эта сумма равна ± 1.

Вообще говоря, унимодулярные уравнения ведут себя лучше, чем произвольные невырожденные: например, в [K93] (смотрите также [FeR96]) показано, что

всякое унимодулярное уравнение над группой без кручения разрешимо над ней,

а верно ли аналогичное утверждение для произвольных невырожденных уравнений — неизвестно.

Для нильпотентных групп всё просто: теорема Шмелькина [Ш67] говорит (в частности), что

*любая конечная невырожденная система уравнений над нильпотентной группой G без кручения имеет решение (причём единственное) в некоторой нильпотентной группе $\widetilde{G} \supseteq G$ той же ступени, а именно, в пополнении группы G (если же система унимодулярна, то условие отсутствия кручения можно убрать, и единственное решение будет уже в самой группе G).**)

Работа первых двух авторов выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00075.

Работа третьего автора выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-21-00745.

Для разрешимых групп ситуация оказывается сложнее: в параграфе 1 мы приводим примеры, показывающие (в частности), что

> *существует унимодулярное уравнение с одним неизвестным над метабелевой группой (которую можно выбрать конечной или, наоборот, не имеющей кручения), не разрешимое ни в какой большей метабелевой группе.*

(Пример из [Ro17] на эту тему является ошибочным.)

В 1981 году Хауи предложил следующее обобщение известной гипотезы Кервера–Лауденбаха.

Гипотеза Хауи [How81]. *Всякая невырожденная система уравнений над любой группой разрешима над ней.*

Верно ли это, неизвестно, но имеется очень много частичных результатов на эту тему (смотрите ссылки выше). Класс групп $\mathcal{K}$ мы предлагаем называть *классом Хауи*, если всякая невырожденная система уравнений над каждой группой из класса $\mathcal{K}$ имеет решение в некоторой большей группе из $\mathcal{K}$.

Квазимногообразие, порождённое классом Хауи, также является классом Хауи (смотрите параграф 2). Поэтому нас, главным образом, будут интересовать *квазимногообразия Хауи* (то есть классы Хауи, являющиеся квазимногообразиями). Примерами таких квазимногообразий могут служить

- многообразие всех абелевых групп, а также квазимногообразие всех абелевых групп без кручения (лёгкие упражнения);
- квазимногообразие, порождённое всеми конечными группами ([GR62] + теорема Мальцева о локальной финитной аппроксимируемости линейных групп [Ma40]).

Примеры из параграфа 1, о которых шла речь выше, показывают, что класс всех метабелевых групп не является классом Хауи. Однако в параграфе 3 мы доказываем следующую основную теорему.

Основная теорема. *Класс, состоящий из всевозможных расширений групп из квазимногообразия Хауи при помощи абелевых групп без кручения, также является квазимногообразием Хауи.*

В частности, поскольку абелевы группы образуют квазимногообразие Хауи, очевидной индукцией мы получаем следующий факт об интересующих нас разрешимых группах:

> *для каждого натурального n класс групп G, обладающих субнормальным рядом $G = G_1 \triangleright \ldots \triangleright G_{n+1} = \{1\}$, у которого все факторы G_i/G_{i+1} абелевы, причём все, за исключением, быть может, последнего, без кручения, является квазимногообразием Хауи, то есть всякая невырожденная система уравнений над группой из этого класса имеет решение в некоторой большей группе из этого же класса.*

(И если мы здесь вычеркнем слова «за исключением, быть может, последнего», то тоже получится верный факт; чтобы в этом убедиться, можно начать с простейшего наблюдения: *тривиальное квазимногообразие $\{\{1\}\}$ является классом Хауи*, и воспользоваться аналогичной индукцией.) Отметим однако, что минимальная длина субнормального ряда с абелевыми факторами без кручения может быть больше, чем ступень разрешимости; смотрите параграф 1.

Авторы благодарят А. И. Будкина и А. В. Худякова за ценные замечания. Мы признательны анонимному рецензенту за комментарии, позволившие нам улучшить текст. Первые два автора благодарят также фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

---

*) Отметим в этой связи ещё теорему Кузьмина [Ку74] (смотрите также [Ку06]): *конечно порождённая метабелева группа G аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда всякое унимодулярное уравнение с одним неизвестным над G имеет в G не более одного решения* (и то же самое верно для конечно порождённых групп, у которых какой-то член нижнего центрального ряда абелев [Ку78]).

1. Обескураживающие примеры

Лемма 1. *Если x и y — такие элементы метабелевой группы, что y^6 и $u = xx^{-y}x^{y^2}$ содержатся в коммутанте, то $uu^y u^{-y^3} u^{-y^4} = 1$.*
(Здесь и далее мы используем стандартные сокращения:
$g^h \overset{\text{опр}}{=} h^{-1}gh$, $\quad g^{-h} \overset{\text{опр}}{=} h^{-1}g^{-1}h$, $\quad g^{2023h} \overset{\text{опр}}{=} h^{-1}g^{2023}h, \ldots$)

Доказательство. Элементы $u = xx^{-y}x^{y^2}$ и x равны по модулю коммутанта (в любой группе); поэтому x лежит в коммутанте. Теперь

$$uu^y u^{-y^3} u^{-y^4} = \left(xx^{-y}x^{y^2}\right)\left(xx^{-y}x^{y^2}\right)^y \left(xx^{-y}x^{y^2}\right)^{-y^3} \left(xx^{-y}x^{y^2}\right)^{-y^4} = xx^{-y^6} = 1.$$

Здесь мы воспользовались тем, что сопряжённые к x коммутируют (поскольку x лежит в коммутанте метабелевой группы), и элементарным (школьным) тождеством $(1 - y + y^2)(1 + y - y^3 - y^4) = 1 - y^6$. Это завершает доказательство.

Утверждение 1. *Существует метабелева группа G и унимодулярное уравнение $w(x) = 1$ над G, не имеющее решений ни в какой метабелевой группе $\widetilde{G} \supseteq G$. Более того, группу G можно выбрать*
  а) *конечной (порядка 42)*)*
  б) *или, напротив того, не имеющей кручения и такой, что всякая невырожденная система уравнений над G имеет решение в некоторой большей трёхступенно разрешимой группе.*

Доказательство. В силу леммы 1 унимодулярное уравнение $xx^{-a}x^{a^2} = c$ над метабелевой группой $G \ni a, c$ такой, что $a^6 = 1$ и c содержится в коммутанте группы G, не может иметь решений ни в какой большей метабелевой группе, если $cc^a c^{-a^3} c^{-a^4} \neq 1$. Естественный пример такой группы — это группа треугольных обратимых матриц 2×2 над групповым кольцом $\mathbb{Z}[y]/\big((y^6 - 1)\cdot\mathbb{Z}[y]\big)$ циклической группы порядка шесть:

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 1 & y-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a\right] \text{ и } cc^a c^{-a^3} c^{-a^4} = \begin{pmatrix} 1 & (y-1)(1+y-y^3-y^4) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 1.$$

(Коммутатор мы понимаем так: $[u, v] \overset{\text{опр}}{=} u^{-1}v^{-1}uv$.)

Чтобы построить группу порядка 42, достаточно сделать то же самое над полем $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ из семи элементов, которое является гомоморфным образом кольца $\mathbb{Z}[y]/\big((y^6 - 1)\cdot\mathbb{Z}[y]\big)$, $y \mapsto 5$ (пятёрка — это порождающий элемент мультипликативной группы этого поля):

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & v \end{pmatrix} \;\middle|\; u, v \in \mathbb{F}_7,\ v \neq 0 \right\},$$
$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 1 & 5-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a\right] \text{ и } cc^a c^{-a^3} c^{-a^4} = \begin{pmatrix} 1 & (5-1)(1+5-5^3-5^4) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 1.$$

Чтобы построить группу без кручения, можно слегка модифицировать первый пример:

$$G_1 = \left\{ 2^k \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & y^k \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathbb{Z}[y]/\big((y^6 - 1)\cdot\mathbb{Z}[y]\big),\ k \in \mathbb{Z} \right\},$$
$$a = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 1 & y-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a\right] \text{ и } cc^a c^{-a^3} c^{-a^4} = \begin{pmatrix} 1 & (y-1)(1+y-y^3-y^4) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq 1.$$

Понятно, что группа G_1 без кручения и a^6 лежит в её центре. Центральное произведение

$$G = G_1 \underset{a^6 = f}{\times} H, \quad \text{где} \quad H = \langle d, e, f \mid [d, e] = f,\ [d, f] = [e, f] = 1 \rangle,$$

*) 42 — это минимальный возможный порядок такого примера [M23].

группы G_1 и группы Гейзенберга $H \simeq \mathbf{UT}_3(\mathbb{Z})$ удовлетворяет условиям леммы 1 и не содержит кручения (поскольку в группе Гейзенберга центр $\langle f \rangle$ *изолирован*, то есть, если $g^k \in \langle f \rangle$ для какого-то $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, то $g \in \langle f \rangle$). Более того, группа G обладает субнормальным рядом длины три

$$G \triangleright G_1 \triangleright \left\{ \begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; u \in \mathbb{Z}[\langle y \rangle_6] \right\} \triangleright \{1\},$$

факторы которого, очевидно, являются свободными абелевыми группами рангов два, один и шесть. Это завершает доказательство утверждения 1, поскольку в силу основной теоремы группы, обладающие субнормальным рядом длины три с абелевыми факторами без кручения, образуют класс Хауи.

(Заметим в скобках, что субнормального ряда длины два с абелевыми факторами без кручения в последнем примере не может быть, поскольку наличие такого ряда означало бы в силу основной теоремы разрешимость уравнения $xx^{-a}x^{a^2} = c$ в большей метабелевой группе; а это не так, как мы выяснили.)

2. Квазимногообразия и системы уравнений

Напомним, что *квазимногообразием* групп называют класс всех групп, в которых выполнен данный (конечный или бесконечный) набор *квазитождеств*, то есть высказываний вида

$$\forall x, y, \ldots \; v_1(x, y, \ldots) = 1 \,\&\ldots\&\, v_k(x, y, \ldots) = 1 \Longrightarrow w(x, y, \ldots) = 1,$$

где v_i и w — какие-то элементы свободной группы $F(x, y, \ldots)$. Например, квазимногообразие абелевых групп без кручения задаётся следующими квазитождествами (последнее из которых является фактически тождеством): $\forall x\; x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$, $\forall x\; x^3 = 1 \Longrightarrow x = 1$, $\ldots$, $\forall x, y\; 1 = 1 \Longrightarrow [x, y] = 1$. Другое (эквивалентное) определение понятия квазимногообразия читатель может найти ниже, в самом начале доказательства утверждения 2. Подробнее о квазимногообразиях можно прочитать в книгах [Бу02] и [Го99]; а мы напомним только, что

> *класс, состоящий из всевозможных расширений групп из одного квазимногообразия при помощи групп из другого квазимногообразия, всегда является квазимногообразием* [Ма67] (и называется *произведением* исходных квазимногообразий).

Поэтому для доказательства основной теоремы достаточно показать, что класс, о котором там идёт речь, является классом Хауи.

Утверждение 2. *Для любого квазимногообразия $\mathcal{Q}$ класс групп*

$$\mathbf{H}(\mathcal{Q}) = \left\{ G \in \mathcal{Q} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{всякая невырожденная система уравнений над } G \\ \text{имеет решение в некоторой большей группе из } \mathcal{Q} \end{array} \right\}$$

совпадает с классом

$$\mathbf{H}_{\text{fin}}(\mathcal{Q}) = \left\{ G \in \mathcal{Q} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{всякая конечная невырожденная система уравнений над } G \\ \text{имеет решение в некоторой большей группе из } \mathcal{Q} \end{array} \right\}$$

и является квазимногообразием.

Доказательство. По теореме Мальцева (см. [Ма70], теорема 5.11.4)

> *квазимногообразия групп — это то же самое, что непустые классы групп, замкнутые относительно перехода к подгруппам и фильтрованным произведениям.*

Напомним, что *фильтрованное* произведение $\left(\bigtimes G_i\right)/F$ групп G_i, где $i \in I$, относительно фильтра F на множестве I — это факторгруппа $\left(\bigtimes\limits_{i \in I} G_i\right) \Big/ \left\{ h \in \bigtimes\limits_{i \in I} G_i \;\middle|\; \{i \in I \mid h_i = 1\} \in F \right\}$.

Замкнутость классов $\mathbf{H}(\mathcal{Q})$ и $\mathbf{H}_{\text{fin}}(\mathcal{Q})$ относительно этих операций совершенно очевидна (в качестве группы решений системы уравнений над фильтрованным произведением можно взять фильтрованное (по тому же фильтру) произведение групп решений соответствующих систем над сомножителями).

Совпадение же классов $\mathbf{H}(\mathcal{Q})$ и $\mathbf{H}_{\text{fin}}(\mathcal{Q})$ является, по сути, частным случаем общей теоремы компактности Гёделя–Мальцева, но для удобства читателей мы приведём набросок непосредственного доказательства.

– рассмотрим (бесконечную) невырожденную систему V уравнений над группой $G \in \mathbf{H}_{\text{fin}}(\mathcal{Q})$ с (бесконечным) множеством неизвестных X;
– для каждой конечной подсистемы $W \subseteq V$ возьмём её группу решений $G_W \in \mathcal{Q}$;
– возьмём декартово произведение всех этих G_W;
– и выберем в этом произведении множество (значений неизвестных) $\widetilde{X}$: их координаты с номером W образуют решение конечной системы W;
– на множестве конечных подсистем $\{W\}$ рассмотрим фильтр F, состоящий из всех множеств, содержащих все «достаточно большие системы»: $F = \big\{M \mid \exists W\ M \supseteq \{W' \mid W' \supseteq W\}\big\}$;
– группа G диагонально вложена в это фильтрованное произведение $\widetilde{G} = \left(\bigtimes_W G_W\right)/F \in \mathcal{Q}$;
– а множество $\widetilde{X} \subset \widetilde{G} \in \mathcal{Q}$ образует решение всей системы, поскольку для каждого уравнения $w(X) = 1$ из системы V координаты $\widetilde{X}_W$ образуют решение уравнения w при $W \ni w$ (то есть $w(\widetilde{X}_W) = 1$, а такое множество координат $\{W \mid W \ni w\}$ содержится в фильтре F);
– таким образом, $G \in \mathbf{H}(\mathcal{Q})$, и это завершает доказательство утверждения 2.

Утверждение 2 показывает, в частности, что

1) квазимногообразие, порождённое классом Хауи, является само является классом Хауи; действительно, для квазимногообразия $\mathbf{qvar}\,\mathcal{K}$, порождённого классом Хауи $\mathcal{K}$, мы получаем, что $\mathbf{H}(\mathbf{qvar}\,\mathcal{K})$
   – является квазимногообразием (по утверждению 2)
   – и содержит $\mathcal{K}$ (поскольку $\mathcal{K}$ — класс Хауи, то есть невырожденные системы уравнений над группами из $\mathcal{K}$ разрешимы в $\mathcal{K}$ и, тем более, в $\mathbf{qvar}\,\mathcal{K} \supseteq \mathcal{K}$);
   – следовательно, $\mathbf{H}(\mathbf{qvar}\,\mathcal{K}) \supseteq \mathbf{qvar}\,\mathcal{K}$ (поскольку $\mathbf{qvar}\,\mathcal{K}$ — это наименьшее квазимногообразие, содержащее $\mathcal{K}$);
   – последнее включение является равенством, поскольку обратное включение имеет место по определению $\mathbf{H}(\dots)$

   (поэтому логично изучать в первую очередь именно квазимногообразия Хауи, а не произвольные классы Хауи);
2) при доказательстве основной теоремы можно ограничиться конечными системами уравнений (поскольку в основной теореме утверждается равенство $\mathbf{H}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ для некоторого квазимногообразия $\mathcal{K}$, а утверждение 2 показывает, что $\mathbf{H}(\mathcal{K}) = \mathbf{H}_{\text{fin}}(\mathcal{K})$), то есть основная теорема эквивалентна следующему (формально более слабому) утверждению.

Основная теорема (упрощённая формулировка)**.** *Пусть группа G содержит нормальную подгруппу B из квазимногообразия Хауи $\mathcal{K}$, а факторгруппа $G/B = A$ абелева и без кручения. Тогда всякая конечная невырожденная система уравнений $\{w_i = 1 \mid i \in I\}$ (где $w_i \in G * F(X)$ и I — конечное множество) имеет решение в некоторой группе $\widetilde{G} \supseteq G$, которая также является расширением группы из $\mathcal{K}$ при помощи абелевой группы без кручения.*

3. Доказательство основной теоремы

Над группой A возникает индуцированная система уравнений $\{\overline{w}_i = 1 \mid i \in I\}$, где $\overline{w}_i \in A * F(X)$ являются образами слов w_i при естественном гомоморфизме $G * F(X) \to A * F(X)$.

Первое простое наблюдение состоит в том, что

можно считать, что эта индуцированная система уравнений $\{\overline{w}_i = 1\}$ имеет решение в A.

Действительно, индуцированная система уравнений над $A = G/B$ имеет решение в некоторой большей абелевой группе $\widetilde{A}$ без кручения (в силу того, что класс абелевых групп без кручения является классом

Хауи); поэтому, вкладывая группу G в декартово сплетение $B\bar{\wr}A$ по теореме Калужнина–Краснера [KK51], а затем вкладывая сплетение $B\bar{\wr}A$ в $B\bar{\wr}\widetilde{A}$, и заменяя теперь A на $\widetilde{A}$, а B — на базу сплетения (пользуясь замкнутостью класса $\mathcal{K}$ относительно декартовых степеней), мы получаем то, что хотели. В качестве побочного продукта этого рассуждения мы получили, что

можно считать, что исходное расширение расщепляется: $G = A \leftthreetimes B$.

Второе простое наблюдение состоит в том, что

можно считать, что решением индуцированной системы уравнений $\{\overline{w}_i = 1\}$ *в* A *служит набор из всех единиц.*

Действительно, это достигается очевидной заменой переменных (поскольку мы уже считаем, что какое-то решение в A есть).

Это наблюдение означает, что w_i можно переписать, как слова от $B \sqcup \bigsqcup\limits_{a\in A} X^{\pm a}$:

$$G * F(X) \ni w_i = f(v_i), \quad \text{где } v_i \in B * F\left(\bigsqcup_{a\in A} X_a\right) \text{ — некоторые слова, } X_a \text{ — копии алфавита } X,$$

$$\text{а гомоморфизм } f\colon B * F\left(\bigsqcup_{a\in A} X_a\right) \to G * F(X) \text{ посылает } X_a \ni x_a \text{ в } x^a \overset{\text{опр}}{=} a^{-1}xa, \text{ а } B \ni b \text{ — в } b.$$

На группе $B * F\left(\bigsqcup\limits_{a\in A} X_a\right)$ группа A естественным образом действует (справа): $b \circ a = a^{-1}ba$ и $x_{a'} \circ a = x_{a'a}$. Ключевое наблюдение (доказательство которого мы отложим, смотрите лемму 2 ниже) состоит в том, что

$$\textit{система уравнений } \{v_i \circ a = 1 \mid i \in I,\ a \in A\} \textit{ над } B \textit{ (с неизвестными } \bigsqcup_{a\in A} X_a) \textit{ невырождена.} \qquad (*)$$

Теперь всё просто.

- Раз система уравнений $\{v_i \circ a = 1 \mid i \in I,\ a \in A\}$ над B невырождена, она имеет решение в некоторой группе $\widetilde{B} \supseteq B$ из класса $\mathcal{K}$ (поскольку это класс Хауи);
- то есть факторгруппа $U = \left(B * F\left(\bigsqcup\limits_{a\in A} X_a\right)\right) \Big/ \langle\!\langle \{v_i \circ a = 1 \mid i \in I,\ a \in A\}\rangle\!\rangle$ допускает гомоморфизм в $\widetilde{B}$, тождественный на B.
- Значит, факторгруппа $\widehat{B} \supseteq B$ группы U по пересечению ядер всех гомоморфизмов в $\widetilde{B}$
  - содержит B и решение системы уравнений $\langle\!\langle \{v_i \circ a = 1 \mid i \in I,\ a \in A\}\rangle\!\rangle$ над B (очевидно);
  - содержится в $\mathcal{K}$ (поскольку является поддекартовым произведением подгрупп группы $\widetilde{B} \in \mathcal{K}$, а класс $\mathcal{K}$, будучи квазимногообразием, замкнут относительно подгрупп и декартовых произведений).
- Осталось заметить, что естественное действие группы A на U (которое корректно определено, так как подгруппа $\langle\!\langle \{v_i \circ a = 1 \mid i \in I,\ a \in A\}\rangle\!\rangle$ A-инвариантна), продолжающее действие A на B, индуцирует действие группы A на $\widehat{B}$ (поскольку пересечение ядер всех гомоморфизмов из одной группы в другую является характеристической подгруппой).
- Значит, соответствующее полупрямое произведение $\widetilde{G} = A \leftthreetimes \widehat{B} \supseteq A \leftthreetimes B = G$ является искомой группой, содержащей решение исходной системы и являющейся расширением группы из $\mathcal{K}$ при помощи абелевой группы без кручения.

Осталось доказать факт $(*)$; а он немедленно вытекает из следующей леммы, в которой надо положить

- $R = \mathbb{Z}[A]$ — групповое кольцо группы A (это кольцо не имеет делителей нуля, как известно — оставляем это читателям в качестве простого упражнения),
- M — это свободная абелева группа с базисом $\bigsqcup\limits_{a\in A} X_a$ или, что то же самое, M — это свободный R-модуль с базисом X (где $ax = x_a$),

– $\{m_1,\ldots,m_k\}\subset M$ — это образ произвольного конечного подмножества в $\{v_i \mid i\in I\}$ при естественном гомоморфизме $B*F\left(\bigsqcup\limits_{a\in A}X_a\right)\to M$ с ядром (коммутант) $\cdot B$ (другими словами, m_i — это строки из сумм показателей степеней при неизвестных (из $\bigsqcup\limits_{a\in A}X_a$) в уравнениях $v_i=1$),

– I — это *фундаментальный идеал*, то есть ядро гомоморфизма $\mathbb{Z}[A]\to\mathbb{Z}$, посылающего A в единицу (то есть фактормодуль $M/(IM)$, как модуль над $R/I\simeq\mathbb{Z}$, естественным образом изоморфен свободному $\mathbb{Z}$-модулю с базисом X, а $m_i+IM\in M/(IM)$ при этом изоморфизме превращаются в строки из сумм показателей степеней при неизвестных из X в уравнениях $w_i=1$).

Лемма 2. *Пусть элементы $m_1,\ldots,m_k$ свободного модуля M над ассоциативным коммутативным кольцом R без делителей нуля линейно зависимы над R. Тогда для любого простого идеала $I\triangleleft R$ элементы m_i+IM фактормодуля $M/(IM)$ над факторкольцом R/I линейно зависимы над R/I.*

Доказательство. Выберем какой-то базис $e_1,\ldots,e_n$ в модуле M (который, разумеется, можно считать конечно порождённым, так как каждое конечное подмножество свободного модуля содержится в конечно порождённом свободном подмодуле). Линейная зависимость элементов $m_i=\sum\limits_j r_{ij}e_j$ означает, что все миноры порядка k в матрице (r_{ij}) нулевые (поскольку кольцо R вкладывается в поле, а над полем линейная зависимость строк длины k эквивалентна равенству нулю всех миноров порядка k, как всем известно). Значит, все миноры порядка k в матрице $(r_{ij}+I)$ нулевые. Стало быть, $m_i+IM=\sum\limits_j(r_{ij}+I)(e_j+IM)$ линейно зависимы (поскольку кольцо R/I тоже вкладывается в поле). Это завершает доказательство леммы и теоремы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[БК12] Д. В. Баранов, А. А. Клячко, Экономное присоединение квадратных корней к группам, Сибирский мат. журнал, 53:2 (2012), 250-257. См. также arXiv:1101.3019 .

[Б80] С. Д. Бродский, Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением, УМН, 35:4(214) (1980), 183-183.

[Б84] С. Д. Бродский, Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением, Сибирский мат. журнал, 25:2 (1984), 84-103.

[Бу02] А. И. Будкин, Квазимногообразия групп, Изд-во Алт. ун-та, Барнаул, 2002.

[Го99] В. А. Горбунов, Алгебраическая теория квазимногообразий, Научная книга, Новосибирск, 1999.

[К06] А. А. Клячко, Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами, Мат. заметки, 79:3 (2006), 409-419. См. также arXiv:math.GR/0406382 .

[КП95] А. А. Клячко, М. И. Прищепов, Метод спуска для уравнений над группами, Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика, 4 (1995), 90-93.

[Ку74] Ю. В. Кузьмин, Аппроксимация метабелевых групп, Алгебра и логика, 13:3 (1974), 300-310.

[Ку78] Ю. В. Кузьмин, О некоторых аппроксимационных свойствах многообразия $\mathfrak{A}\mathfrak{N}_c$, УМН, 33:4(202) (1978), 217-218.

[Ку06] Ю. В. Кузьмин, Гомологическая теория групп. М: Факториал, 2006.

[ЛШ80] Р. Линдон, П. Шупп, Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[Ма40] А. Мальцев, Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами, Матем. сб., 8(50):3 (1940), 405-422.

[Ма67] А. И. Мальцев, Об умножении классов алгебраических систем, Сиб. матем. журн., 8:2 (1967), 346-365.

[Ма70] А. И. Мальцев, Алгебраические системы. М.: Наука, 1970.

[НРР79] Г. А. Носков, В. Н. Ремесленников, В. А. Романьков, Бесконечные группы. Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом., 17, ВИНИТИ, М., 1979, 65-157.

[Ш67] А. Л. Шмелькин, О полных нильпотентных группах, Алгебра и логика. Семинар, 6:2 (1967), 111-114.

[ABA21] M. F. Anwar, M. Bibi, M. S. Akram, On solvability of certain equations of arbitrary length over torsion-free groups, Glasgow Mathematical Journal, 63:3 (2021), 651-659.
См. также arXiv:1903.06503 .

[BE18] M. Bibi, M. Edjvet, Solving equations of length seven over torsion-free groups, Journal of Group Theory, 21:1 (2018), 147-164.

[CG00] A. Clifford, R. Z. Goldstein, Equations with torsion-free coefficients, Proc. Edinburgh Math. Soc., 43:2 (2000), 295-307.

[EH91] M. Edjvet, J. Howie, The solution of length four equations over groups, Trans. Amer. Math. Soc., 326:1 (1991), 345-369.

[EH21] M. Edjvet, J. Howie, On singular equations over torsion-free groups, International Journal of Algebra and Computation, 31:3 (2021), 551-580. См. также arXiv:2001.07634 .

[EdJu00] M. Edjvet, A. Juhász, Equations of length 4 and one-relator products, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 129:2 (2000), 217-230.

[FeR96] R. Fenn, C. Rourke, Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups, L'Enseignment Mathématique, 42 (1996), 49-74.

[GR62] M. Gerstenhaber, O.S. Rothaus, The solution of sets of equations in groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 48:9 (1962), 1531-1533.

[How81] J. Howie, On pairs of 2-complexes and systems of equations over groups, J. Reine Angew Math., 1981:324 (1981), 165-174.

[How91] J. Howie, The quotient of a free product of groups by a single high-powered relator. III: The word problem, Proc. Lond. Math. Soc., 62:3 (1991), 590-606.

[IK00] S. V. Ivanov, A. A. Klyachko, Solving equations of length at most six over torsion-free groups, Journal of Group Theory, 3:3 (2000), 329-337.

[Juhá03] Juhász A. On the solvability of a class of equations over groups, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 135:2 (2003), 211-217.

[K93] A. A. Klyachko, A funny property of sphere and equations over groups, Communications in Algebra, 21:7 (1993), 2555-2575.

[K97] A. A. Klyachko, Asphericity tests, International Journal of Algebra and Computation, 7:4 (1997), 415-431.

[K99] A. A. Klyachko, Equations over groups, quasivarieties, and a residual property of a free group, Journal of Group Theory, 2:3 (1999), 319-327.

[KL12] A. A. Klyachko, D. E. Lurye, Relative hyperbolicity and similar properties of one-generator one-relator relative presentations with powered unimodular relator, Journal of Pure and Applied Algebra, 216:3 (2012), 524-534. См. также arXiv:1010.4220 .

[KM22] A. A. Klyachko, M. A. Mikheenko, Yet another Freiheitssatz: Mating finite groups with locally indicable ones, Glasgow Mathematical Journal (в печати). См. также arXiv:2204.01122 .

[KT17] A. A. Klyachko, A. B. Thom, New topological methods to solve equations over groups, Algebraic and Geometric Topology, 17:1 (2017), 331-353. См. также arXiv:1509.01376 .

[KK51] M. Krasner, L. Kaloujnine, Produit complet des groupes de permutations et le problème d'extension de groupes. III, Acta Sci. Math., 14 (1951), 69-82.

[Le62] F. Levin, Solutions of equations over groups, Bull. Amer. Math. Soc., 68:6 (1962), 603-604.

[Ly80] R. C. Lyndon, Equations in groups, Bol. Soc. Bras. Math., 11:1 (1980), 79-102.

[M23] M. A. Mikheenko, On p-nonsingular systems of equations over solvable groups, arXiv:2309.09096 .

[NT22] M. Nitsche, A. Thom, Universal solvability of group equations, Journal of Group Theory, 25:1 (2022), 1-10. См. также arXiv:1811.07737 .

[P08] V. G. Pestov, Hyperlinear and sofic groups: A brief guide, Bull. Symb. Log., 14:4 (2008), 449-480. См. также arXiv:0804.3968 .

[Ro12] V. A. Roman'kov, Equations over groups, Groups-Complexity-Cryptology, 4:2 (2012), 191-239.

[Ro17] V. A. Roman'kov, On solvability of regular equations in the variety of metabelian groups, Прикладная дискретная математика, 36 (2017), 51-58.