УДК 512.543.1+512.543.7+512.54.05 MSC: 20E06,20F05,20F06,20F67,20F70

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ И БЛИЗКИЕ СВОЙСТВА ОТНОСИТЕЛЬНЫХ КОПРЕДСТАВЛЕНИЙ С ОДНИМ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ОБРАЗУЮЩИМ И ОДНИМ СООТНОШЕНИЕМ, ЯВЛЯЮЩИМСЯ ИСТИННОЙ СТЕПЕНЬЮ УНИМОДУЛЯРНОГО СЛОВА

Антон А. Клячко Денис Е. Лурье

Механико-математический факультет

Московского государственного университета

Москва 119991, Ленинские горы, МГУ

klyachko@mech.math.msu.su doomden1990@yahoo.com

Если к нетривиальной группе добавить один образующий и одно соотношение, являющееся истинной степенью слова с единичной суммой показателей степеней при добавленном образующем, то полученная группа будет содержать в качестве подгруппы свободный квадрат исходной группы, а также почти всегда (кроме одного очевидного исключения) будет содержать неабелеву свободную подгруппу. Если исходная группа не имеет инволюций или соотношение является по крайней мере третьей степенью, то полученная группа относительно гиперболична относительно исходной группы и SQ-универсальна.

1. Введение

Пусть G — группа без кручения и группа $\widehat{G}$ получается из группы G добавлением одного образующего и одного *унимодулярного* соотношения, то есть соотношения с единичной суммой показателей при новом образующем:

$$\widehat{G} = \langle G, t \mid w = 1 \rangle \stackrel{\text{опр}}{=} (G * \langle t \rangle_\infty)/\langle\langle w \rangle\rangle\,,\ \text{где } w \equiv g_1 t^{\varepsilon_1} \ldots g_n t^{\varepsilon_n},\quad g_i \in G,\ \ \varepsilon_i \in \mathbb{Z}\ \ \text{и}\ \ \sum \varepsilon_i = 1.$$

Известно, что на такие *унимодулярные относительные копредставления с одним соотношением* распространяется значительная часть теории групп с одним соотношением В частности:

- группа G вкладывается (естественным образом) в группу $\widehat{G}$ [Kl93] (см. также [FeR96]);*)
- группа $\widehat{G}$ не имеет кручения [FoR05];
- группа $\widehat{G}$ непроста, если она не совпадает с G [Кл05];
- группа $\widehat{G}$ почти всегда (кроме нескольких известных исключений) содержит неабелеву свободную подгруппу [Кл07];
- группа $\widehat{G}$ SQ-универсальна, если группа G нетривиальным образом раскладывается в свободное произведение [Кл06b];
- центр группы $\widehat{G}$ почти всегда тривиален (кроме нескольких известных исключений) [Kl09].

Некоторые обобщения этих результатов на относительные копредставления, содержащие более одного добавленного порождающего, можно найти в работах [Kl09], [Кл07], [Кл06a] и [Кл06b].

Хорошо известно, что группы с одним соотношением, являющимся истинной степенью, больше похожи на свободные группы, чем произвольные группы с одним соотношением. Одним из выражений этого эффекта является теорема Ньюмана [New68] (см. также [ЛШ80]), утверждающая (если её переформулировать на современном языке), что группы с одним соотношением, являющимся истинной степенью, гиперболичны. Частичным обобщением этой теоремы на случай относительных копредставлений является следующая недавно опубликованная теорема.

Теорема Ле Тхи Жанг [Le09]. *Если группа G не имеет кручения, слово $w \in G * \langle t \rangle_\infty$ унимодулярно и $k \geqslant 2$, то группа*

$$\widetilde{G} = \big\langle G, t \,\big|\, w^k = 1 \big\rangle \stackrel{\text{опр}}{=} G * \langle t \rangle_\infty \,/\, \big\langle\!\big\langle w^k \big\rangle\!\big\rangle \qquad (*)$$

относительно гиперболична (в смысле Осина) *относительно G, то есть копредставление* $(*)$ *удовлетворяет линейному изопериметрическому неравенству: существует константа $C > 0$ такая, что любое слово u в алфавите $G \cup \{t^{\pm 1}\}$, равное единице в $\widetilde{G}$, разлагается в группе $G * \langle t \rangle_\infty$ в произведение не более чем $C|u|$ слов, сопряжённых с $w^{\pm k}$.*

Здесь и далее символ $|u|$ обозначает число букв $t^{\pm 1}$ в слове u.

Относительно гиперболические группы обладают многими хорошими свойствами. Например, они являются SQ-универсальными (кроме некоторых очевидных исключений) [AMO07], в них разрешима проблем равенства (если она разрешима в подгруппах, относительно которых эти группы гиперболичны) [Far98], проблема сопряжённости (при некоторых естественных ограничениях) [Bum04] и многие другие алгоритмические проблемы. Подробнее с относительно гиперболическими группами можно познакомиться по книге [Os06].

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №11-01-00945.

*) Однако, естественное отображение $G \to \widehat{G}$ никогда не бывает сюръективным, за исключением случая когда $w \equiv gt$ [CR01].

Оказывается, что условие отсутствия кручения в теореме Ле Тхи Жанг можно заменить на отсутствие лишь элементов порядка два (или просто убрать, если $k \geqslant 3$). Следующая теорема является пока единственным результатом об унимодулярных относительных копредставлениях, в котором условие отсутствия кручения удаётся заменить на условия отсутствия элементов маленьких порядков.

Теорема. *Если слово $w \in G * \langle t \rangle_\infty$ унимодулярно и $k \geqslant 2$, то группа $\widetilde{G}$, заданная относительным копредставлением $(*)$, содержит G в качестве подгруппы (вложенной естественным образом),*[*)] *причём $\langle G, G^t \rangle = G * G^t$ в $\widetilde{G}$.*
Если при этом группа G не содержит инволюций или $k \geqslant 3$, то $\widetilde{G}$ относительно гиперболична относительно подгруппы G.

Пример 1 [Le09]**.** Группа $\widetilde{G} = \left\langle g, t \,\middle|\, g^3 = 1, [g,t]^3 = 1 \right\rangle$ не является гиперболической (в частности, она не является относительно гиперболической относительно своей конечной подгруппы $G = \langle g \rangle_3$), так как её подгруппа $\langle a^t a, a a^t \rangle$ является свободной абелевой группой ранга два. Этот пример показывает, что условие унимодулярности в теореме нельзя отбросить.

Пример 2. Группа Баумслага–Солитэра $\widetilde{G} = \left\langle g, t \,\middle|\, t^g = t^2 \right\rangle$ не является гиперболической (в частности, она не является относительно гиперболической относительно своей циклической подгруппы $G = \langle g \rangle$), так как централизатор элемента t является нециклической локально циклической группой $\left\langle t^{g^{-1}}, t^{g^{-2}}, \dots \right\rangle$. Этот пример показывает, что условие $k \geqslant 2$ в теореме нельзя отбросить.

Вопрос. *Можно ли отбросить условие отсутствия инволюций при $k = 2$ в теореме?*
Предположительный ответ: нет.

Применяя упомянутые выше известные факты об относительно гиперболических группах, мы получаем, например, такое следствие.

Следствие 1. *Пусть слово w унимодулярно и либо $k \geqslant 3$, либо $k \geqslant 2$ и группа G не имеет инволюций. Тогда*
1) *если группа G нетривиальна, то группа $\widetilde{G}$ SQ-универсальна, то есть любая счётная группа вложима в некоторую факторгруппу группы $\widetilde{G}$.*
2) *в группе $\widetilde{G}$ разрешимы проблемы равенства и сопряжённости, если соответствующие проблемы разрешимы в группе G и она конечно порождена.*

Доказательство. Второе утверждение немедленно вытекает из нашей теоремы и результатов Фарба [Far98] и Бумагиной [Bum04], упомянутых выше.

Чтобы доказать первое утверждение, достаточно сослаться на упомянутую выше теорему Аржанцевой–Минасяна–Осина [AMO07], которая утверждает, что группа, относительно гиперболическая относительно своей собственной подгруппы, либо SQ-универсальна, либо почти циклическая.

То что группа $\widetilde{G}$ относительно гиперболична относительно G утверждается в теореме. То, что G является собственной подгруппой $\widetilde{G}$, следует из того, $\widetilde{G}/\langle\langle G \rangle\rangle = \left\langle t \,\middle|\, t^k = 1 \right\rangle$ является циклической группой порядка $k \geqslant 2$. Наконец, то, что группа $\widetilde{G}$ не является почти циклической вытекает из того, что согласно теореме группа $\widetilde{G}$ содержит свободный квадрат группы G. А свободный квадрат группы порядка большего чем два (в частности, всякой нетривиальной группы без инволюций) не является, как известно, почти циклической группой. Оставшийся случай $G \simeq \mathbb{Z}_2$ и $k \geqslant 3$ покрывается теоремой Баумслага–Моргана–Шалена [BMS87], из которой следует, что в этом случае $\widetilde{G}$ содержит неабелеву свободную подгруппу и потому не является почти циклической.

Следствие 2. *Если слово w унимодулярно, $G \neq \{1\}$ и $k \geqslant 2$, то группа $\widetilde{G}$ содержит неабелеву свободную подгруппу, кроме случая, когда G состоит из двух элементов, $k = 2$ и слово w сопряжено в $G * \langle t \rangle_\infty$ слову вида gt, где $g \in G$ (в этом случае группа $\widetilde{G}$ является бесконечной диэдральной).*

Доказательство. Согласно теореме группа $\widetilde{G}$ содержит свободный квадрат группы G, который содержит неабелеву свободную группу, кроме случая, когда $G \simeq \mathbb{Z}_2$. Если при этом $k \geqslant 3$, то наличие неабелевой свободной подгруппы вытекает из следствия 1. Если же $k = 2$, то обобщённая треугольная группа $\widetilde{G} = \left\langle g, t \,\middle|\, g^2 = w^2 = 1 \right\rangle$ попадает под действие теоремы Хауи [How98], описывающей обобщённые треугольные группы такого (в частности) вида без свободных подгрупп.

Замечание. Наше доказательство показывает также, что относительное копредставление $(*)$ асферично (если слово w унимодулярно и $k \geqslant 2$). В частности, это означает (см. [FoR05]), что каждая конечная подгруппа группы $\widetilde{G}$ сопряжена либо подгруппе исходной группы G, либо подгруппе циклической группы $\langle w \rangle$.

[*)] Другими словами, *уравнение вида $(w(t))^k = 1$, где $k \geqslant 2$, а слово $w(t) \in G * \langle t \rangle_\infty$ унимодулярно разрешимо над любой группой G, то есть найдётся группа H, содержащая G в качестве подгруппы, и такой элемент $h \in H$, что $w(h) = 1$ в H.*

Если не предполагать унимодулярность слова w из копредставления $(*)$, а предположить лишь, что w не сопряжено с элементами из G в $G * \langle t \rangle_\infty$, то известно, например, следующее:

- группа G естественным образом вложена в $\widetilde{G}$, если либо G локально индикабельна [Б84], либо G циклическая и $k \geqslant 2$ [BMS87], [Boy88], либо $k \geqslant 4$ [How90], либо $k \geqslant 3$ и группа G без инволюций [DuH92];
- группа $\widetilde{G}$ относительно гиперболична относительно G, если либо G локально индикабельна и $k \geqslant 2$ [DuH91], либо G без инволюций и $k \geqslant 4$ [DuH93].

Обзор результатов по относительным копредставлениям с одним соотношением, являющимся истинной степенью, можно найти в [DuH93] и в [FiR99].

Наш подход к доказательству теоремы, так же как подход Ле Тхи Жанг, основан на использовании одного стандартного алгебраического трюка (параграф 2) и геометрической техники: диаграмм Хауи (параграф 4) и столкновений автомобилей (параграфы 6 и 7). Разница состоит в том, что тест столкновений мы используем совместно с весовым тестом, то есть комбинаторной формулой Гаусса–Боне (параграф 3). На самом деле большую часть теоремы удаётся доказать (в параграфе 5) без использования «автомобильной техники». Автомобили нам нужны только для доказательства относительной гиперболичности при $k = 2$ и отсутствии инволюций (параграф 8).

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, x и y — элементы некоторой группы, а φ — гомоморфизм из этой группы в какую-нибудь другую группу, то x^y, x^{ky}, x^{-y}, x^φ, $x^{k\varphi}$ и $x^{-\varphi}$ обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$, $y^{-1}x^{-1}y$, $\varphi(x)$, $\varphi(x^k)$ и $\varphi(x^{-1})$ соответственно. Если X — подмножество некоторой группы, то $\langle X \rangle$ и $\langle\langle X \rangle\rangle$ означают, соответственно, подгруппу, порождённую множеством X, и нормальную подгруппу, порождённую множеством X. Буквы $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ обозначают множество целых, натуральных и вещественных чисел, соответственно. Символ $\widetilde{G}$ будет всегда обозначать группу, заданную копредставлением $(*)$.

Авторы благодарят Ле Тхи Жанг и анонимного рецензента за ценные замечания.

2. Алгебраическая лемма

Следующая лемма представляет собой нетрудное обобщение леммы 2.1 из [Le09]. Аналогичный трюк с заменой копредставления был использован в [Kl93] и потом во многих других работах (см., например, [КП95], [CG95], [CG00], [CR01], [FeR96], [FeR98], [FoR05], [Кл05], [Кл06b], [Кл07] и [Kl09]). Геометрическую интерпретацию этого приёма можно найти в [FoR05].

Лемма 1. *Если слово $w = g_1 t^{\varepsilon_1} \dots g_n t^{\varepsilon_n}$ унимодулярно, циклически несократимо и $n > 1$, то тогда группа $\widetilde{G}$ обладает относительным копредставлением вида*

$$\widetilde{G} = \left\langle H, t \,\middle|\, \{p^t = p^\varphi, p \in P \setminus \{1\}\}, \left(ct \prod_{i=0}^{m} (b_i a_i^t)\right)^k = 1 \right\rangle, \tag{1}$$

где $a_i, b_i, c \in H$, P и P^φ — изоморфные подгруппы группы H и $\varphi\colon P \to P^\varphi$ — изоморфизм между ними. При этом

1) *$m \geqslant 0$ (то есть произведение в формуле (1) непустое);*
2) *$a_i \notin P$, а $b_i \notin P^\varphi$;*
3) *$\langle P, a_i \rangle = P * \langle a_i' \rangle$ и $\langle P^\varphi, b_i \rangle = P^\varphi * \langle b_i' \rangle$ в H, где $a_i' \in Pa_i$, $b_i' \in P^\varphi b_i$;*
4) *группы H, P и P^φ являются свободным произведением конечного числа изоморфных копий группы G: $H = G^{(0)} * \dots * G^{(s)}$, $P = G^{(0)} * \dots * G^{(s-1)}$ и $P^\varphi = G^{(1)} * \dots * G^{(s)}$, где $s \geqslant 0$ (при $s = 0$ группы P и P^φ тривиальны), а изоморфизм φ представляет собой сдвиг: $\left(G^{(i)}\right)^\varphi = G^{(i+1)}$.*

Доказательство. Сначала покажем, что у группы $\widetilde{G}$ имеется по крайней мере одно копредставление вида (1), удовлетворяющее условию 4). Поскольку $\sum \varepsilon_i = 1$, слово w можно записать в виде

$$w = \left(\prod g_i^{t^{k_i}}\right) t.$$

Сопрягая, если надо, w при помощи t, мы можем считать, что $k_i \geqslant 0$. Полагая $g^{(i)} = g^{t^i}$ для $g \in G$, $G^{(i)} = G^{t^i}$, $s = \max k_i$ и $c = \prod g_i^{(k_i)}$, мы видим, что $\widetilde{G}$ обладает копредставлением

$$\widetilde{G} \simeq \left\langle G^{(0)} * \dots * G^{(s)}, t \,\middle|\, \left\{ \left(g^{(i)}\right)^t = g^{(i+1)},\ i = 0, \dots, s-1,\ g \in G \right\},\ (ct)^k = 1 \right\rangle,$$

то есть копредставлением вида (1) (с $m = -1$), удовлетворяющим условию 4).

Теперь из всех копредставлений вида (1) группы $\widetilde{G}$, удовлетворяющих условию 4), выберем те, в которых s минимально, а из всех копредставлений с минимальным s выберем то, в котором m минимально. Полученное копредставление (1) будет искомым.

Действительно, если $m < 0$ (то есть $w = ct$, где $c \in H$), то $s = 0$, так как в противном случае мы могли бы уменьшить s, заменив в слове c все вхождения $g^{(s)}$ на $(g^{(s-1)})^t$. Но условия $m < 0$ и $s = 0$ означают, что исходное слово w имеет вид $w = ct$, $c \in G$, что противоречит тому, что $n > 1$. Таким образом условие 1) выполнено.

Условие 2) выполнено, поскольку в противном случае мы могли бы в копредставлении (1) заменить подслово $t^{-1}a_it$, где $a_i \in P$ (или подслово tb_it^{-1}, где $b_i \in P^\varphi$), на a_i^φ (соответственно, на $b_i^{\varphi^{-1}}$), уменьшив тем самым m (не увеличив при этом s).

Условия 3) следует из условий 2) и 4) в силу следующего простого факта, доказательство которого мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Если $u \in A * B$, то $\langle A, u\rangle = A * \langle u'\rangle$ для некоторого $u' \in Au$.

Лемма доказана.

Следствие. *Если для некоторого i в группе H имеет место равенство вида $a_i^{n_1}p_1 \dots a_i^{n_s}p_s = 1$ или вида $b_i^{n_1}p_1^\varphi \dots b_i^{n_s}p_s^\varphi = 1$, где $s \geqslant 1$, $n_j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $p_j \in P$ и $p_j \neq 1$ при $j \neq s$, то минимальный порядок неединичного элемента группы G не превосходит $\max\limits_{k<l} \left| \sum\limits_{j=k}^{l} n_j \right|$.*

Доказательство. Это немедленно вытекает из утверждений 4), 3) и 2) леммы 1.

3. Карты и весовой тест

Под поверхностью в этой статье мы всегда понимаем замкнутую двумерную ориентированную поверхность.

Картой M на поверхности S называется конечный набор непрерывных отображений $\{\mu_i\colon D_i \to S\}$, где D_i — двумерный замкнутый ориентированный диск (круг), называемый i-й *гранью* или *клеткой* карты, на границе которого отмечено некоторое конечное непустое множество точек $c_{ij} \in \partial D_i$, называемых *углами* карты. Интервалы e_{ij}, на которые углы делят границу грани, мы называем *прорёбрами* карты. Образы углов $\mu_i(c_{ij})$ и прорёбер $\mu_i(e_{ij})$ называют *вершинами* и *рёбрами* карты соответственно. При этом предполагается, что

1) ограничения отображения μ_i на внутренность грани D_i является гомеоморфным вложением, сохраняющим ориентацию; ограничение μ_i на каждое проребро является гомеоморфным вложением;
2) различные ребра не пересекаются;
3) образы внутренностей разных граней не пересекаются;
4) $\bigcup \mu_i(D_i) = S$.

Карту M мы будем также иногда трактовать как непрерывное отображение $\mathrm{M}\colon \coprod D_i \to S$ из дискретного объединения дисков в поверхность.

Объединение всех вершин и рёбер карты представляет собой граф на поверхности, называемый *одномерным остовом.*

Мы говорим, что угол c является углом при вершине v, если $\mathrm{M}(c) = v$. На множестве всех углов при вершине v имеется естественный циклический порядок; мы называем два угла при вершине v *смежными*, если они являются соседними относительно этого порядка.

Допуская некоторую вольность речи, мы говорим, что точка или подмножество поверхности содержится в грани D_i, если она (оно) лежит в образе μ_i. Аналогично, мы говорим, что грань D_i содержится в некотором подмножестве $X \subseteq S$ поверхности S, если $\mathrm{M}(D_i) \subseteq X$.

На рисунке 1 представлена карта на сфере с десятью гранями: A, B, C, D, E, F, G, H, I и K, тридцатью двумя углами, восемью вершинами, шестнадцатью рёбрами и тридцатью двумя прорёбрами. Заметим, что число углов всегда равно числу прорёбер и вдвое больше числа рёбер, а величина

$$\chi(S) \overset{\text{опр}}{=} (\textit{число вершин}) - (\textit{число ребер}) + (\textit{число граней})$$

не зависит от выбора карты на поверхности S и называется *эйлеровой характеристикой* этой поверхности. Эйлерова характеристика сферы (единственной поверхности, которая нас на самом деле интересует в этой статье) равна двум.

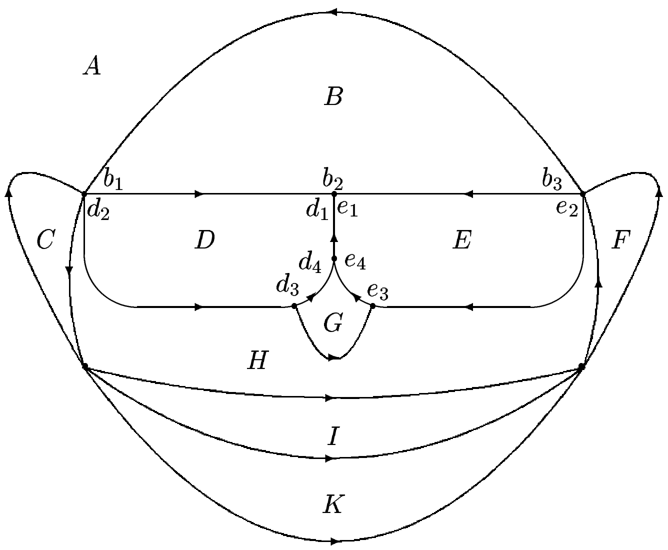


Рис. 1

Нам понадобится также следующее простое, но полезное утверждение, называемое иногда комбинаторной формулой Гаусса–Боне.

Весовой тест [Ger87], [Pri88], см. также [MCW02]. *Если каждому углу c некоторой карты на поверхности S поставлено в соответствие число $\nu(c)$* (которое мы будем называть *весом* или *величиной угла c*), *то*

$$\sum_v K(v) + \sum_D K(D) + \sum_e K(e) = 2\chi(S).$$

Здесь суммирования распространяются на все вершины v и все клетки D рассматриваемой карты, а величины $K(v)$, $K(D)$ и $K(e)$ называемые кривизнами соответствующей вершины, клетки и ребра определяются так:

$$K(v) \overset{\text{опр}}{=} 2 - \sum_c \nu(c), \qquad K(D) \overset{\text{опр}}{=} 2 - \sum_c (1 - \nu(c)), \qquad K(e) \overset{\text{опр}}{=} 0,$$

где первая сумма распространяется на все углы при вершине v, а вторая — на все углы клетки D.

4. Диаграммы Хауи

Пусть имеется карта М на поверхности S, углы которой помечены элементами некоторой группы H, а рёбра ориентированы (на рисунках на них имеются стрелки) и помечены элементами некоторого множества $\{t_1, t_2, \ldots\}$, не пересекающегося с группой H. Метку угла или ребра x будем обозначать $\lambda(x)$.

Метка вершины v в такой ситуации определяется формулой

$$\lambda(v) = \prod_{i=1}^{k} \lambda(c_i),$$

где $c_1, \ldots, c_k$ — это все углы при вершине v, перечисленные по часовой стрелке. Метка вершины является элементом группы H, определённым с точностью до сопряжённости. Например, метка одной из вершины на рисунке 1 есть $\lambda(b_2)\lambda(e_1)\lambda(d_1)$.

Метка грани D определяется формулой

$$\lambda(D) = \prod_{i=1}^{k} \big(\lambda(\mathrm{M}(e_i))\big)^{\varepsilon_i} \lambda(c_i),$$

где $e_1, \ldots, e_k$ и $c_1, \ldots, c_k$ — это все прорёбра и все углы грани D, перечисленные против часовой стрелки, причём концами проребра e_i являются углы c_{i-1} и c_i (индексы по модулю k), а $\varepsilon_i = \pm 1$ в зависимости от того, сохраняет или обращает ориентацию гомеоморфизм $e_i \xrightarrow{\mathrm{M}} \mathrm{M}(e_i)$. Говоря по-простому, чтобы получить метку грани, надо обойти её границу против часовой стрелки, выписывая метки всех встречающихся углов и рёбер, причём метку ребра надо записывать в минус первой степени, если мы его проходим против стрелки.

Метка грани является элементом группы $H * F(t_1, t_2, \ldots)$ (свободного произведения H и свободной группы с базисом $\{t_1, t_2, \ldots\}$), определённым с точностью до циклической перестановки.

Например, если на рисунке 1 метки всех рёбер равны t, то метка грани B равна $t\lambda(b_1)t\lambda(b_2)t^{-1}\lambda(b_3)$.

Размеченную таким образом карту мы называем *диаграммой Хауи* (или просто *диаграммой*) над относительным копредставлением

$$K = \langle H, t_1, t_2, \ldots \mid w_1 = 1, w_2 = 1, \ldots \rangle, \qquad (**)$$

если

1) некоторые вершины и некоторые грани выделены и называются *внешними*, остальные вершины и грани называются *внутренними*;
2) метка каждой внутренней грани является циклической перестановкой одного из слов $w_i^{\pm 1}$;
3) метка каждой внутренней вершины равна единице в группе H.

На рисунке 4 изображены все возможные внутренние грани для диаграммы Хауи над копредставлением (1).

Диаграмма Хауи называется *приведённой*, если она не содержит такого ребра e, что две грани, его содержащие, являются внутренними, эти грани различны и метка одной из этих граней, если её написать начиная с метки ребра e, обратна метки другой грани, если её написать заканчивая меткой ребра e; такая пара клеток с общим ребром называется *сократимой парой*. Например, клетки D и E на рисунке 1 образуют сократимую пару, если $\lambda(d_i) = (\lambda(e_i))^{-1}$ и метки всех рёбер равны.

Следующая лемма является аналогом леммы ван Кампена для относительных копредставлений.

Лемма 2 [How83]. *Естественное отображение группы H в группу, заданную относительным копредставлением $(**)$, не является инъективным тогда и только тогда, когда существует сферическая диаграмма над этим копредставлением с единственной внешней вершиной и без внешних граней, причём метка внешней вершины не равна единице в группе H. Минимальная (по числу клеток) из таких диаграмм является приведённой. Если это естественное отображение инъективно, то имеет место эквивалентность: образ элемента $u \in H * F(t_1, t_2, \ldots) \setminus \{1\}$ равен единице в группе $(**)$ тогда и только тогда, когда существует сферическая диаграмма над этим копредставлением без внешних вершин и с единственной внешней гранью, метка которой равна u. Минимальная (по числу клеток) из таких диаграмм также является приведённой.*

Диаграммы на сфере с единственной внешней гранью и без внешних вершин называют также *дисковыми* диаграммами, границу внешней грани такой диаграммы называют *контуром* диаграммы.

Пусть $\varphi\colon P \to P^\varphi$ — изоморфизм между двумя подгруппами группы H. Относительное копредставление вида

$$\left\langle H, t \mid \{p^t = p^\varphi;\ p \in P \setminus \{1\}\}, w_1 = 1,\ w_2 = 1,\ \ldots \right\rangle \qquad (***)$$

назовём *φ-копредставлением.* Диаграмму над φ-копредставлением $(***)$ назовём *φ-приведённой* если она приведена и различные внутренние клетки, метки которых имеют вид $p^t p^{-\varphi}$, $p \in P$, не имеют общих рёбер.

Лемма 3 [Кл05]. *Минимальная (по числу клеток) из всех сферических диаграмм над данным φ-копредставлением без внешних граней и с единственной внешней вершиной, метка которой не равна единице, является φ-приведённой. Если таких диаграмм не существует, то минимальная дисковая диаграмма с данной меткой контура является φ-приведённой.* Другими словами, имеет место полный φ-аналог леммы 2.

На рисунке 2 показана идея доказательства этой леммы.

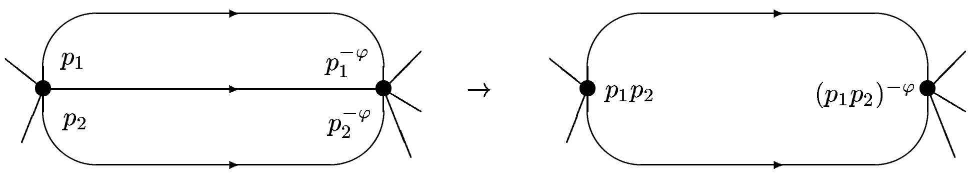
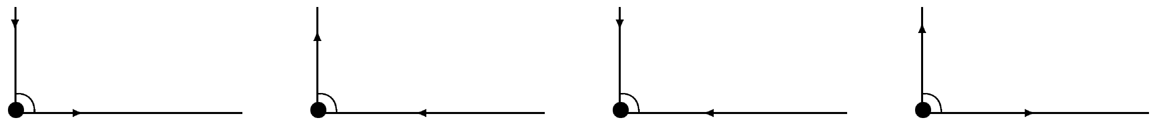


Рис. 2

Относительное копредставление (φ-копредставление), над которым не существует приведённых (соответственно, φ-приведённых) сферических диаграмм с единственной внешней вершиной и без внешних граней, называют *асферичными* (соответственно, *φ-асферичными*).

Пусть имеется карта на поверхности, ребра которой ориентированы (например, диаграмма Хауи). На такой карте бывает 4 сорта углов: $(++)$, $(--)$, $(+-)$ и $(-+)$ (рис. 3).



(++) (−−) (+−) (−+)

Рис. 3

Следующую лемму мы не доказываем ввиду ее очевидности.

Лемма 4. *При обходе против часовой стрелки углов при любой вершине v углы типа $(++)$ и $(--)$ чередуются. Если же при вершине v углов типа $(++)$ нет, или, что то же самое, углов типа $(--)$ нет, то либо все углы при v имеют тип $(+-)$ (в этом случае вершина v называется стоком), либо все углы при v имеют тип $(-+)$ (в этом случае вершина v называется источником).*

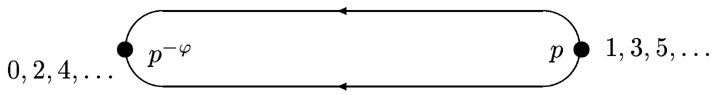
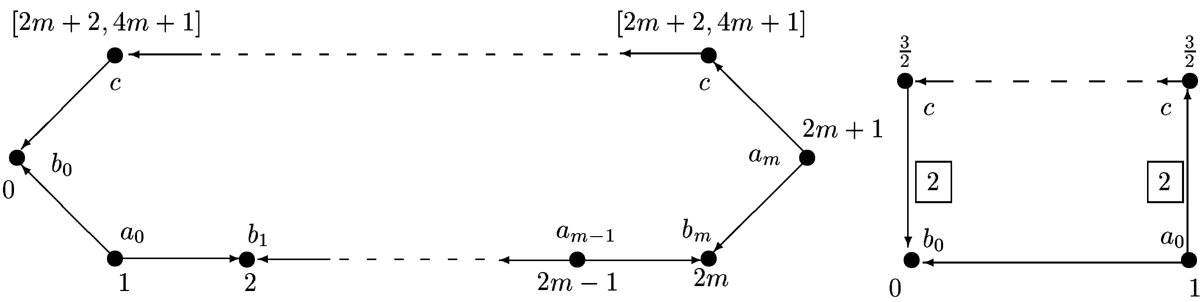
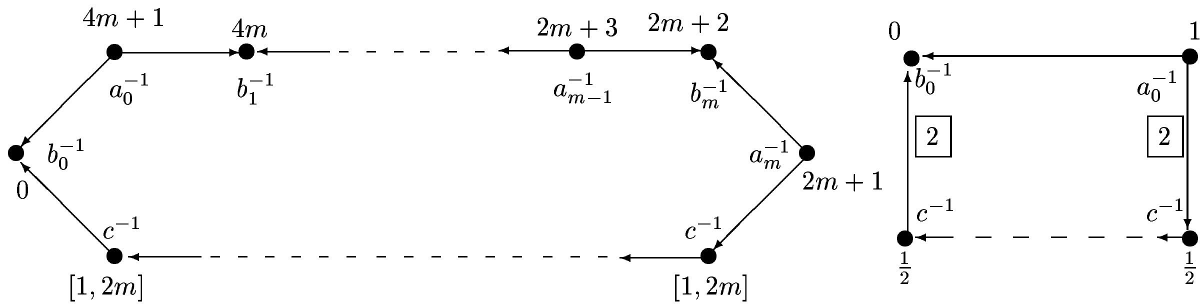


Рис. 4а



$m > 0$ $m = 0$

Рис. 4б



$m > 0$ $m = 0$

Рис. 4в

5. Доказательство большей части теоремы

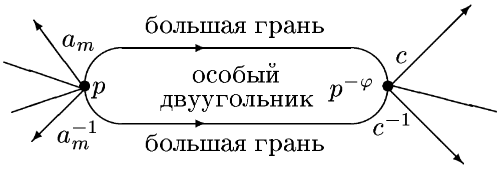
В этом параграфе мы докажем все утверждения теоремы, кроме относительной гиперболичности при $k = 2$.

Если слово w сопряжено слову gt, то группа $\widetilde{G}$ представляет собой свободное произведение группы G на циклическую группу порядка k и все утверждения теоремы очевидны. Если же в слове w буквы $t^{\pm 1}$ встречаются более одного раза, то по лемме 1 группа $\widetilde{G}$ задаётся копредставлением (1).

Рассмотрим φ-приведённую сферическую диаграмму Хауи над копредставлением (1) без внешних граней и с единственной внешней вершиной, либо без внешних вершин и с единственной внешней гранью. Грани с метками вида $p^{-\varphi}p^t$, будем называть *двуугольниками*, остальные внутренние грани будем называть *большими гранями.*

Вершины и рёбра, лежащие на границе внешней грани будем называть *граничными.* Внешнюю вершину, если она есть, также будем для единообразия называть граничной.

Назовём двуугольник *особым*, если обе соседние с ним грани внутренние и один из его углов (называемый в дальнейшем *положительным*) является смежным с углами типа (++) и (−−) (рис.5). Отметим, что второй угол особого двуугольника (называемый в дальнейшем *отрицательным*), при этом автоматически несмежен с углами типа типа (++) и (−−).



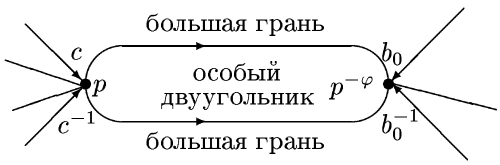


Рис. 5

Припишем каждому углу γ диаграммы вес $\nu(\gamma)$ по следующему правилу:

$$\nu(\gamma)=\begin{cases}0, & \text{если } \gamma \text{ — угол неособого двуугольника}\\ & \text{или угол типа } (++) \text{ или } (--) \text{ внутренней грани (метка такого угла равна } c^{\pm1});\\ -1, & \text{если } \gamma \text{ — отрицательный угол особого двуугольника;}\\ 1 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Посчитаем теперь кривизны вершин и граней в соответствии с весовым тестом (см. параграф 3). Для граней мы имеем:

$$K(\text{двуугольник})=0,\quad K(\text{большая грань})=2-k,\quad K(\text{внешняя грань})=2.$$

Для вершин v ситуация такая:

$$K(v)=2+n-l-\mathbf{p}-x, \tag{2}$$

где l — число углов типа (+−) и (−+) больших граней, $\mathbf{p}$ — число положительных углов особых двуугольников, n — число отрицательных углов особых двуугольников и x — число углов внешней грани (все углы при вершине v).

Каждый отрицательный угол особого двуугольника соседствует с двумя углами типа (+−) или (−+) больших граней (по определению специального двуугольника), причём никакой угол типа (+−) или (−+) не может соседствовать с двумя отрицательными углами (так как иначе соответствующая большая грань имела бы и угол типа (++), и угол типа (−−), что невозможно). Поэтому $l \geqslant 2n$.

Отметим ещё, что углы типа (++) и (−−) при неграничной вершине чередуются (по лемме 4) и не могут быть соседними (иначе диаграмма не была бы приведённой), между ними обязательно есть угол веса 1 (либо угол типа (+−) или (−+) большой грани, либо положительный угол особого двуугольника). С учётом предыдущего замечания об отрицательных углах это означает, что сумма весов углов, расположенных между углами типа (++) и (−−) при обходе по часовой стрелке вокруг вершины v не меньше единицы (рис. 6, слева). Значит, неграничная вершина с положительной кривизной обязана быть источником или стоком и в такой вершине $\mathbf{p}=0$, причём либо $n=1$ и $l=2$, либо $n=0$ и $l=1$, либо $n=0$ и $l=0$ ($n<2$, так как иначе формула (2) и неравенство $l \geqslant 2n$, упомянутое выше, дали бы неположительную кривизну). Смотрите рис. 6, жирными цифрами показаны величины углов.

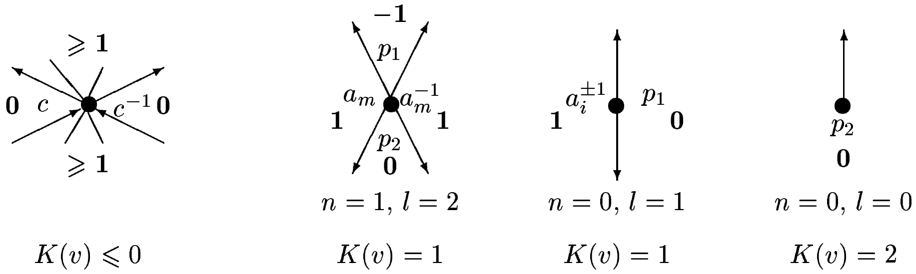


Рис. 6

Первый случай ($n = 1$ и $l = 2$) в неграничной вершине невозможен, поскольку метка такой вершины, то есть произведение меток углов, равно $a_m^{-1}p_1a_mp_2$ (если вершина — источник) или $b_0^{-1}p_1^{\varphi}b_0p_2^{\varphi}$ (если вершина — сток), где p_1 и p_2 лежат в P и не равны единице (в силу приведённости диаграммы) и, следовательно, метка вершины не равна единице по следствию из леммы 1, то есть такая вершина не может быть внутренней. Второй и третий случаи ($n = 0$ и $l \in \{0, 1\}$) в неграничной вершине невозможны примерно по той же причине: они означали бы равенство $a_i^{\pm 1}p_1 = 1$, $b_i^{\pm 1}p_1^{\varphi} = 1$, $p_2 = 1$ или $p_2^{\varphi} = 1$, где $p_1 \in P \ni p_2 \neq 1$.

В итоге мы получаем, что кривизна любой неграничной вершины v неположительна. Кривизны внутренних граней также неположительны (при $k \geqslant 2$), кривизны граничных вершины не превосходят двойки (это следует из формулы (2) и того, что $l \geqslant 2n$), а суммарная кривизна должна быть четвёркой в соответствии с весовым тестом.

Это означает, что, во-первых, диаграмм без внешних граней и с единственной внешней вершиной не бывает, то есть естественное отображение $H \to \widetilde{G}$ (и, тем более, естественное отображение $G \to \widetilde{G}$) инъективно по лемме 2; а во-вторых, если внешняя грань одна, внешних вершин нет и $k \geqslant 3$, то число внутренних больших граней ограничено линейной функцией от периметра внешней грани:

$$2 \cdot (\text{периметр внешней грани}) - (k-2) \cdot (\text{число больших внутренних граней}) + 2 \geqslant 4.$$

Нетрудно сообразить, что такое изопериметрическое неравенство для копредставления (1) влечёт обычное линейное изопериметрическое неравенство для копредставления $(*)$ (см. [Le09]), то есть относительную гиперболичность группы $\widetilde{G}$ при $k \geqslant 3$. Для полноты картины мы приведём доказательство этого факта.

Утверждение 1. *Предположим, что некоторое слово $u \in G * \langle t \rangle_\infty$ равно единице в группе $\widetilde{G}$, то есть представляется в виде произведения*

$$u = v_1 \dots v_p w_1 \dots w_s,$$

где v_i сопряжены в $H * \langle t \rangle_\infty$ словам вида $p^{-t}p^{\varphi}$ $(p \in P)$, а w_i сопряжены в $H * \langle t \rangle_\infty$ словам вида $\left(ct \prod\limits_{i=0}^{m} (b_i a_i^t)\right)^{\pm k}$ (в терминологии леммы 1, где группа G отождествляется с $G^{(0)}$). Тогда слово u представляется в виде произведения s слов, каждое из которых сопряжено в $G * \langle t \rangle_\infty$ слову $w^{\pm k}$.

Менее формально, любое изопериметрическое неравенство для копредставления (1), в котором учитываются только длинные соотношения (только большие клетки), влечёт точно такое же изопериметрическое неравенство для копредставления $(*)$.

Доказательство. В группе $\langle H, t \mid \{p^t = p^{\varphi} \ ; \ p \in P\} \rangle$ (которая изоморфна группе $G * \langle t \rangle_\infty$) каждое из слов v_i равно единице, а каждое из слов w_i сопряжено слову $w^{\pm k}$ (так как слово $ct \prod\limits_{i=0}^{m} (b_i a_i^t)$ равно циклической перестановке слова w по построению), что и требовалось.

Вернёмся к доказательству теоремы и покажем, что $\langle G, G^t \rangle = G * G^t$ в группе $\widetilde{G}$. Если $H \neq G$, то есть $P \neq \{1\}$, то есть $s > 0$ в лемме 1, то доказывать нечего, так как уже доказано, что естественное отображение $H = G * G^t * \ldots \to \widetilde{G}$ инъективно.

Осталось рассмотреть случай $H = G$ (то есть $P = \{1\}$). Предположим, что $u \in G * G^t$ — несократимое непустое слово, представляющее единицу группы $\widetilde{G}$. По лемме 2 слово u является меткой внешней грани некоторой φ-приведённой сферической диаграммы над копредставлением $(*)$ (оно же копредставление (1) в рассматриваемом случае) без внешних вершин и с единственной внешней гранью. Поскольку двуугольники отсутствуют, а на внешней грани нет углов типа $(++)$ и $(--)$, кривизна каждой граничной вершины неположительна. Суммарная кривизна всех граней и вершин должна быть четвёркой, но единственное положительное слагаемое в этой сумме равно двойке (кривизна внешней грани). Это противоречие с весовым тестом завершает доказательство теоремы, за исключением утверждения об относительной гиперболичности при $k = 2$.

Замечание. Наше рассуждение доказывает также φ-асферичность копредставления (1) (если $k \geqslant 2$), а отсюда стандартным образом (см. [FoR05]) получается асферичность копредставления $(*)$.

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству относительной гиперболичности в случае $k = 2$.

6. Движения

Все определения и утверждения этого параграфа мы позаимствовали из работы [Кл05].

Пусть на замкнутой ориентированной поверхности S имеется карта M, некоторые из углов которой помечены и называются *остановочными углами.*

Автомобилем, объезжающим грань D этой карты, называют непрерывное локально неубывающее*) отображение из ориентированной окружности R (*окружности времени*) в границу ∂D грани D такое, что прообраз каждой точки, не являющейся остановочным углом, дискретен.

Говоря по-простому, автомобиль объезжает границу своей грани против часовой стрелки (внутренность грани остается слева от автомобиля), не разворачиваясь, а останавливаться ему разрешается только в остановочных углах. При этом движение периодично.

Мы говорим, что автомобиль α находится в углу $c \in \partial D$ в момент времени $t \in R$ если $\alpha(t) = c$, кроме того, мы говорим, что в момент времени $t \in R$ автомобиль α *находится* в точке $p \in S$, если $\mu(\alpha(t)) = p$. Если число автомобилей, оказавшихся в момент времени t в точке p одномерного остова поверхности, S равно кратности этой точки (иными словами $\bigcup \alpha_i(t) \supseteq \ M^{-1}(p)$), то мы говорим, что в точке p в момент t происходит *полное столкновение*. При этом точка p называется *точкой полного столкновения*. Точки полного столкновения, лежащие на ребрах, мы называем просто *точками столкновения*.

Кратным движением периода T с разделёнными остановками на карте M называется набор автомобилей $\alpha_{D,j}: R \to \partial D$, где $j = 1, \dots, d_D$, такой что

1) $d_D \geqslant 1$ (то есть каждую грань объезжает по крайней мере один автомобиль);
2) в каждой вершине v, при которой имеется хотя бы один остановочный угол, остановки разделены в следующем смысле: пусть $c_1, \dots, c_k$ — это все остановочные углы при вершине v, занумерованные против часовой стрелки; требуется, чтобы для каждого i в углах c_i и c_{i+1} (индексы по модулю k) автомобили никогда не находились одновременно (в частности, это условие означает, что $k \geqslant 2$);
3) $\alpha_{D,j}(t+T) = \alpha_{D,j+1}(t)$ для любого $t \in R$ и $j = \{1, ..., d_D\}$ (здесь индексы берутся по модулю d_D, а сложение точек окружности R производится естественным образом: $R = \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$);
4) существует такое разбиение каждой из окружностей ∂D на d_D дуг (с непересекающимися внутренностями), что на протяжении интервала времени $[0, T]$ каждый автомобиль $\alpha_{D,j}$ движется по j-й дуге.

Тест столкновений [Кл05], [Kl97]. *Для любого кратного движения с разделёнными остановками на карте* M *на поверхности S имеет место равенство*

$$\sum_v K'(v) + \sum_e K'(e) + \sum_D K'(D) = \chi(S),$$

где суммы распространяются на все вершины v, рёбра e и грани D карты M.
Здесь $K'(D) = 1 - d_D$, величина $K'(e)$ есть число точек столкновения на ребре e (не считая концов), а $K'(v) = 1$, если в вершине v происходит полное столкновение, в противном случае $K'(v)$ будет целым неположительным числом (точное определение которого можно найти в [Кл05]).

В этой статье поверхностью всегда будет сфера, её эйлерова характеристика равна 2.

7. Стандартное кратное движение

В этом параграфе мы определим некоторое конкретное кратное движение на диаграммах Хауи над копредставлением (1). Наше определение почти в точности повторяет определение из [Le09]. Аналогичный режим движения рассматривался и в [Кл05].

Назовём *стандартным* следующее движение на диаграмме Хауи над копредставлением (1):

а) внутреннюю грань с меткой $p^{-\varphi}p^t$ объезжает один автомобиль; он едет против часовой стрелки равномерно с единичной скоростью (одно ребро в единицу времени), проезжая в нулевой момент времени угол типа $(+-)$ (рис. 4а);

б) внутреннюю грань с меткой $\left(ct \prod\limits_{i=0}^{m} b_i a_i^t\right)^k$ объезжают k автомобилей; при $m > 0$ они стоят на протяжении промежутков времени $[2m+2, 4m+1] + (4m+2)\mathbb{Z}$ в углах типа $(++)$ (с меткой c), а остальное время они едут против часовой стрелки равномерно с единичной скоростью; при $m = 0$ эти автомобили едут без остановок, двигаясь по направлению ребра со скоростью 2, а против направления ребра — со скоростью 1, и находясь в углу типа $(+-)$ (с меткой b_0) в нулевой момент времени (рисунок 4б);

в) внутреннюю грань с меткой $\left(ct \prod\limits_{i=0}^{m} b_i a_i^t\right)^{-k}$ объезжают тоже k автомобилей; при $m > 0$ они стоят на протяжении промежутков времени $[1, 2m] + (4m+2)\mathbb{Z}$ в углах типа $(--)$ (с меткой c^{-1}), а остальное время едут против часовой стрелки равномерно с единичной скоростью; при $m = 0$ эти автомобили едут без

*) Мы называем непрерывное отображение ориентированной окружности X в ориентированную окружность Y *локально неубывающим*, если прообраз всякого интервала $U \subset Y$ есть объединение интервалов, ограничение α на каждый из которых является неубывающей функцией (в обычном смысле, как отображение одного ориентированного интервала в другой).

остановок, двигаясь против направления ребра со скоростью 2, а по направлению ребра — со скоростью 1, и находясь в углу типа $(+-)$ (с меткой b_0^{-1}) в нулевой момент времени (рисунок 4в);

г) внешнюю грань объезжает один автомобиль; он двигается с периодом $4m+2$, в нулевой момент времени он находится в какой-то вершине, на протяжении интервала времени $[0, \frac{1}{4}]$ он (быстро) объезжает против часовой стрелки всю границу внешней грани, кроме последнего ребра; а оставшееся время он (медленно) едет по этому ребру.

Стандартное движение является периодическим с периодом $4m+2$ (при этом на гранях с меткой $p^{-\varphi}p^t$ минимальный период равен двум). На рисунке 4 показано подробное расписание движения автомобилей, объезжающих внутренние клетки, на протяжении интервала времени $[0, 4m+2)$, числа в рамочках около рёбер означают скорость автомобиля на этих рёбрах (по умолчанию скорость единичная).

Лемма 5 (ср. [Le09], [Кл05]). *Предположим, что у диаграммы Хауи над копредставлением (1) имеется не более чем одна внешняя грань. Тогда стандартное движение является движением с разделенными остановками. Полные столкновения, которые происходят не на границе внешней грани, могут происходить только в вершинах, являющихся стоком или источником, и только в целые моменты времени. На каждом ребре границы внешней грани имеется не более $k(2m+1)$ точек полного столкновения.*

Доказательство. Объявим остановочными углами все углы типа $(++)$ и $(--)$. Из расписания движения видно, что автомобили никогда не бывают одновременно в углах типа $(++)$ и $(--)$: в углах типа $(--)$ автомобили, объезжающие внутренние грани, бывают только в первую половину периода, а в углах типа $(++)$ — во вторую половину, а автомобиль, объезжающий внешнюю грань, в такие моменты вообще находится не в углу. Из этого и из леммы 4 следует, что стандартное движение является движением с разделенными остановками. Столкновение на ребре разделяющем внутренние клетки в момент времени t означает, что в этот момент направление движения одного из автомобилей совпадает с направлением ребра, а направление движения другого автомобиля противоположно направлению ребра. Но расписание стандартного движения устроено так, что в каждый момент времени t либо все автомобили, объезжающие внутренние грани и находящиеся на ребрах, едут по направлению ребра (это происходит, когда целая часть t нечетна), либо все автомобили, объезжающие внутренние грани и находящиеся на ребрах, едут в направлении, противоположном направлению ребра (это происходит, когда целая часть t четна). Заметим также, что из определения кратного движения следует, что обгонов не бывает. Значит, столкновения могут происходить только в вершинах; из условия разделенности остановок следует, что вершины, в которых происходят полные столкновения, не могут иметь остановочных углов и, следовательно, являются источниками или стоками. В таких вершинах автомобили, объезжающие внутренние грани, появляются только в целые моменты времени.

Автомобиль β, объезжающий внешнюю грань, на каждом ребре e имеет возможность столкнуться не более чем с k автомобилями. За период $[0; 4m+2)$ автомобиль β на на каждом ребре появится лишь один раз, а каждый из автомобилей, проезжающих это ребро в противоположном направлении, — не более $2m+1$ раза (эта величина достигается на двуугольнике). Следовательно, за период на каждом ребре границы внешней грани произойдёт не более $k(2m+1)$ столкновения. Эта сильно завышенная оценка завершает доказательство.

8. Завершение доказательства теоремы

В этом параграфе мы завершаем доказательство теоремы, то есть доказываем, что группа $\widetilde{G}$ относительно гиперболична относительно G, если G не содержит инволюций и $k=2$ (впрочем, приводимое ниже доказательство годиться для любого $k \geqslant 2$).

Если слово w сопряжено слову gt, то группа $\widetilde{G}$ представляет собой свободное произведение группы G на циклическую группу порядка k и доказывать нечего. Если же в слове w буквы $t^{\pm 1}$ встречаются более одного раза, то по лемме 1 группа $\widetilde{G}$ задаётся копредставлением (1).

Рассмотрим φ-приведённую сферическую диаграмму Хауи над копредставлением (1) без внешних вершин и с единственной внешней гранью. Как и в параграфе 5 достаточно показать, что такие диаграммы удовлетворяет линейному изопериметрическому неравенству, то есть число больших внутренних граней ограниченно некоторой линейной функцией от периметра внешней грани.

Припишем всем углам диаграммы веса так же, как в параграфе 5. Напомним, что при таком распределении весов кривизны внутренних вершин неположительны. При этом кривизна внутренней вершины в соответствии с формулой (2) может быть нулевой только в следующих случаях:

а) $p > 0$ (и, следовательно, вершина не является ни источником, ни стоком);

б) $p = 0$, $n = 0$, $l = 2$;

в) $p = 0$, $n = 1$, $l = 3$;

г) $p = 0$, $n = 2$, $l = 4$ (рис. 7).

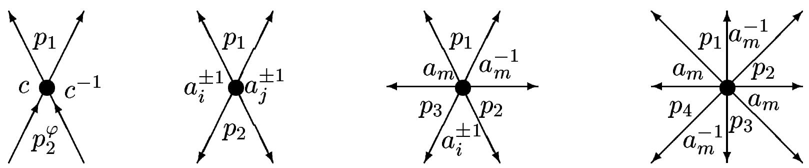


Рис. 7

Заметим, что ни в одном из случаев а), б), в), г) в вершине v не может произойти полного столкновения при стандартном движении (параграф 7). Действительно, в силу леммы 5 вершина полного столкновения должна быть источником или стоком, поэтому в случае а) нет полного столкновения. Полное столкновение в случае б), когда вершина v является, например, источником, означало бы в соответствии с расписанием движения, что оба угла больших граней при этой вершине имеют метки $a_i^{\pm1}$ с одним и тем же индексом i, а произведение всех меток углов равно единице в группе G, чего не может быть в силу приведённости диаграммы, отсутствия инволюций и следствия из леммы 1. По тем же причинам полных столкновений не может быть в случаях в) и г): в этих случаях все углы больших граней должны иметь метку $a_m^{\pm1}$, если вершина — источник, или $b_0^{\pm1}$, если вершина — сток.

Заметим ещё что при стандартном определении движения (параграф 7) мы имеем:

$$K'(\text{двуугольник}) = 0,\ K'(\text{большая грань}) = 1-k,\ K'(\text{неграничное ребро}) = 0,\ K'(\text{граничное ребро}) \leqslant k(2m+1),$$

где величина K' определена в параграфе 4 (тест столкновений). Последние два неравенства следуют из леммы 5.

Определим *комбинированную кривизну* вершины, грани или ребра формулой

$$K_\Sigma(\cdot) \overset{\text{опр}}{=} K(\cdot) + K'(\cdot).$$

Ясно, что мы имеем неравенство $K_\Sigma(v) \leqslant 0$ для любой внутренней вершины v, поскольку $K(v)$ либо целое отрицательное число, либо ноль, но в последнем случае, как мы видели, в вершине v нет полного столкновения и, следовательно, $K'(v) \leqslant 0$.

Осталось заметить, что для любого неграничного ребра e и любой внутренней большой грани Γ

$$K_\Sigma(e) = K'(e) = 0 \text{ и } \quad K_\Sigma(\Gamma) = K(\Gamma) + K'(\Gamma) = 2 - k + (1-k) \leqslant -1 \text{ при } k \geqslant 2.$$

Комбинированная кривизна граничных рёбер ограничена некоторой константой (зависящей только от k и m) по лемме 5. Комбинированная кривизна граничных вершин не превосходит, очевидно, тройки (так как $K(v) \leqslant 2$, как отмечалось в параграфе 5). Комбинированная кривизна внешней грани равна двум. С другой стороны, сумма комбинированных кривизн всех вершин, рёбер и граней в соответствии с весовым тестом и тестом столкновений должна быть $4+2$.

Это означает, что число внутренних больших граней ограничено линейной функцией от периметра внешней грани:

$$(D+3)\cdot(\text{периметр внешней грани}) - (\text{число больших внутренних граней}) + 2 \geqslant 4+2,$$

где $D = k(2m+1)$ — константа из леммы 5 (но это очень завышенная оценка). Это изопериметрическое неравенство завершает доказательство (в силу утверждения 1).

Другие применения комбинированного теста, а также описание всех возможных тестов (в некотором точном смысле) можно найти в [Kl97].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Б84] Бродский С. Д. Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением // Сиб. матем. ж. 1984. Т.25. №2. С.84–103.

[Кл05] Клячко Ант. А. Гипотеза Кервера–Лауденбаха и копредставления простых групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44. №4. С. 399–437. См. также arXiv:math.GR/0409146

[Кл06a] Клячко Ант. А. Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами // Мат. заметки. 2006. Т.79. №3. С. 409–419. См. также arXiv:math.GR/0406382.

[Кл06b] Клячко Ант. А. SQ-универсальность относительных копредставлений с одним соотношением // Мат. сборник. 2006. Т.197. №10. С.87–108. См. также arXiv:math.GR/0603468.

[Кл07] Клячко Ант. А. Свободные подгруппы относительных копредставлений с одним соотношением // Алгебра и логика. 2007. Т.46. №3. С.290–298. См. также arXiv:math.GR/0510582.

[КП95] Клячко Ант. А., Прищепов М. И. Метод спуска для уравнений над группами // Вестн. МГУ: Мат., Мех. 1995. №4. С.90–93.

[ЛШ80] Линдон Р., Шупп П. Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

[AMO07] Arzhantseva G., Minasyan A., Osin D. The SQ-universality and residual properties of relatively hyperbolic groups // Journal of Algebra. 2007. 315:1, 165–177. См. также arXiv:math.GR/0601590

[BMS87] Baumslag G., Morgan J.W., Shalen P.B. Generalized triangle groups // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 1987. 102. 25-31.

[Boy88] Boyer S. On proper powers in free products and Dehn surgery // J. Pure Appl. Algebra. 1988. 51:3. 217–229.

[Bum04] Bumagina I. The conjugacy problem for relatively hyperbolic groups // Algebraic & Geometric Topology. 2004. V.4. P.1013–1040. См. также arXiv:math/0308171

[CG95] Clifford A., Goldstein R.Z. Tesselations of S^2 and equations over torsion-free groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1995. V.38. P.485–493.

[CG00] Clifford A., Goldstein R.Z. Equations with torsion-free coefficients // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2000. V.43. P.295–307.

[CR01] Cohen M. M., Rourke C. The surjectivity problem for one-generator, one-relator extensions of torsion-free groups // Geometry & Topology. 2001. V.5. P.127–142. См. также arXiv:math.GR/0009101

[DuH91] Duncan A.J, Howie J. The genus problem for one-relator products of locally indicable groups// Mathematische Zeitschrift. 1991. 208:1. 225–237

[DuH92] Duncan A.J, Howie J. Weinbaum's conjecture on unique subwords of nonperiodic words // Proc. Amer. Math. Soc. 1992. 115. 947-954.

[DuH93] Duncan A.J, Howie J. One-relator products with high-powered relator, in: Geometric group theory (G.A.Niblo, M.A.Roller, eds.), P.48–74, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993).

[Far98] Farb B. Relatively hyperbolic groups // GAFA. 1998. V.8. 810–840.

[FeR96] Fenn R., Rourke C. Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups // L'Enseignment Mathématique. 1996. T.42. P.49–74.

[FeR98] Fenn R., Rourke C. Characterisation of a class of equations with solution over torsion-free groups, from "The Epstein Birthday Schrift", (I. Rivin, C. Rourke and C. Series, editors), Geometry and Topology Monographs. 1998. V.1. P.159-166.

[FiR99] Fine B., Rosenberger G. Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math. 223. Marcel Dekker, Inc., New York, 1999. x+317 pp.

[FoR05] Forester M., Rourke C. Diagrams and the second homotopy group // Comm. Anal. Geom. 2005. V.13. P.801-820. См. также arXiv:math.AT/0306088

[Ger87] Gersten S.M. Reducible diagrams and equations over groups. In Essays in group theory, P.15–73. Springer, New York-Berlin, 1987.

[How83] Howie J. The solution of length three equations over groups // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1983. V.26. P.89–96.

[How90] Howie J. The quotient of a free product of groups by a single high-powered relator. II. Fourth powers // Proc. London Math. Soc. 1990. 61. 33–62.

[How98] Howie J. Free subgroups in groups of small deficiency // J. Group Theory. 1998. V.1. no. 1. P.95–112.

[Kl93] Klyachko Ant. A. A funny property of a sphere and equations over groups // Comm. Algebra. 1993. V.21. P.2555–2575.

[Kl97] Klyachko Ant. A. Asphericity tests // IJAC. 1997. V.7. P.415–431.

[Kl09] Klyachko Ant. A. The structure of one-relator relative presentations and their centres //Journal of Group Theory, 2009, 12:6, 923–947. См. также arXiv:math.GR/0701308

[Le09] Le Thi Giang. The relative hyperbolicity of one-relator relative presentations // Journal of Group Theory. 2009. 12:6, 949–959. См. также arXiv:0807.2487

[MCW02] McCammond J.P., Wise D.T. Fans and ladders in small cancellation theory. Proc. London Math. Soc. (3). 2002. 84(3):599–644.

[New68] Newman B.B. Some results on one-relator groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V.74. P.568–571.

[Os06] Osin D.V. Relatively hyperbolic groups: Intrinsic geometry, algebraic properties, and algorithmic problems. Memoirs Amer. Math. Soc. 179 (2006), no. 843, vi+100 pp. См. также arXiv:math/0404040

[Pri88] Pride S.J. Star-complexes, and the dependence problems for hyperbolic complexes. Glasgow Math. J. 1988. 30(2):155–170.