УДК 512.543.7+512.542 MSC: 20D99, 20E22

ЭКОНОМНОЕ ПРИСОЕДИНЕНИЕ КВАДРАТНЫХ КОРНЕЙ К ГРУППАМ

Дмитрий В. Баранов Антон А. Клячко
Механико-математический факультет
Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ
dimbaranov@mail.ru klyachko@mech.math.msu.su

Насколько нужно увеличить группу, чтобы в получившейся группе все элементы исходной группы являлись квадратами? Мы даём довольно точный ответ на этот вопрос (наилучшая возможная оценка сверху отличается от полученной оценки не более, чем в два раза) и формулируем несколько открытых вопросов на эту тему.

0. Введение

Исследованию разрешимости уравнений над группами посвящено множество работ (см., например, [GeRo62], [Levin62], [Lynd80], [Брод84], [EdHo91], [Howie91], [Klya93], [КлПр95], [FeRo96], [Klya97], [ClGo00], [EdJu00], [Juhá03], [Кляч06] и литературу там цитируемую). В этих статьях доказывается, что при тех или иных условиях уравнение $w(x) = 1$ с коэффициентами из группы G *разрешимо над* G, то есть найдётся группа H, содержащая G в качестве подгруппы, и элемент $h \in H$ такой, что $w(h) = 1$. В настоящей работе мы пытаемся исследовать количественный вопрос: *насколько большой должна быть такая группа* H*?* Даже для простых уравнений, разрешимость которых давно известна, этот вопрос оказывается весьма трудным и мы ограничиваемся изучением простейшего нетривиального уравнения $x^2 = g$.

Разумеется, ответ сильно зависит от исходной группы G. Например, если порядок группы G нечётный, то при любом $g \in G$ в качестве H можно взять саму группу G; если группа G циклическая, то при любом $g \in G$ в качестве H достаточно взять группу вдвое большего порядка и т. д. Наиболее интересно, конечно, оценить порядок группы H «в худшем случае». Нам удаётся получить оценку, отличающуюся от наилучшей не более, чем в два раза в следующем смысле.

Основная теорема. *Каждая конечная группа G вкладывается в группу порядка $2|G|^2$, в которой все элементы группы G являются квадратами. Существует бесконечно много попарно неизоморфных конечных групп G_i таких, что для некоторого $g_i \in G_i$ группа, содержащая G_i в качестве подгруппы и содержащая элемент, квадрат которого равен g_i, имеет порядок не меньше чем $|G_i|^2$.*

Кроме задачи решения одного уравнения $x^2 = g$, можно рассмотреть и задачу одновременного решения всех уравнений такого вида. Из основной теоремы ясно, что и в этом случае также всегда достаточно группы порядка $2|G|^2$, но не всегда достаточно группы порядка меньшего $|G|^2$.

Про поведение множества решений уравнений в конечных группах многое известно (см., например, [Frob03], [Hall36], [Solo69], [Стру95] и литературу там цитируемую). К сожалению, нам не удалось воспользоваться этими нетривиальными результатами.

Первое утверждение теоремы не является новым и легко доказывается (см. параграф 1). Во втором параграфе мы доказываем второе утверждение. В последнем параграфе мы формулируем несколько открытых вопросов об экономном присоединении решений уравнений к группам.

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, а x и y — элементы некоторой группы, то x^y, x^{ky}, x^{-y} обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$ и $y^{-1}x^{-1}y$, соответственно. Если X — подмножество некоторой группы, то $|X|$, $\langle X \rangle$ и $\langle\langle X \rangle\rangle$ означают, соответственно, мощность множества X, подгруппу, порождённую множеством X, и нормальную подгруппу, порождённую множеством X. Буква $\mathbb{Z}$ обозначают множество целых чисел. Символ $\mathbb{Z}_n$ обозначает группу или кольцо $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ вычетов по модулю n. Мультипликативная группа кольца $\mathbb{Z}_n$ обозначается $\mathbb{Z}_n^*$. Группа автоморфизмов группы G обозначается $\operatorname{Aut} G$. Символ D_p обозначает диэдральную группу порядка $2p$. Стабилизатор точки a при действии группы G обозначается $\operatorname{St}_G(a)$. *Отражением* мы называем элемент группы D_p, не лежащий в её подгруппе $\mathbb{Z}_p$.

Авторы благодарят анонимного рецензента за ценные замечания.

1. Сплетения и доказательство первого утверждения теоремы

Первое утверждение теоремы хорошо известно [Levin62]: сплетение

$$G \wr \mathbb{Z}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \;\middle|\; g_1, g_2 \in G \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; g_1, g_2 \in G \right\}$$

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №08-01-00573.

группы G и циклической группой порядка 2 является группой порядка $2|G|^2$ и содержит квадратные корни из всех элементов группы G, если считать, что группа G вложена в сплетение $G \wr \mathbb{Z}_2$ диагональным образом:

$$g \mapsto \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}.$$

Действительно, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & g \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^2 = \left(\begin{smallmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{smallmatrix}\right)$. Это простейший частный случай теоремы Левина, полную формулировку мы приводим в последнем параграфе.

2. Диэдральные группы и доказательство второго утверждения теоремы

Второе утверждение основной теоремы немедленно вытекает из следующего факта.

Теорема 1. *Пусть $p \in 4\mathbb{Z}+3$ — простое число, $\widetilde{G}$ — группа, содержащая диэдральную подгруппу $G = D_p$, и отражение $g \in G$ является квадратом некоторого элемента $x \in \widetilde{G}$. Тогда $|\widetilde{G}| \geqslant |G|^2$.*

Для доказательства нам потребуются несколько несложных лемм.

Лемма 1. *Если H_1 и H_2 — подгруппы некоторой группы H, то $|H| \geqslant \frac{|H_1||H_2|}{|H_1 \cap H_2|} = |H_1 H_2|$.*

Доказательство этой несложной леммы мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Лемма 2. *Пусть $D_p = G \subseteq \langle G, x\rangle = \widetilde{G}$ и $x^2 = g$, где $g \in G$ — отражение. Тогда либо $G \triangleleft \widetilde{G}$, либо $G \cap G^x = \langle g\rangle$.*

Доказательство. Очевидно, что $g \in G \cap G^x$. В D_p существуют всего две подгруппы, содержащие g. Если $G \cap G^x = \langle g\rangle$, то всё доказано. Если же $G \cap G^x = G$, то $G = G^x$. Но тогда $G \triangleleft \widetilde{G}$, так как $\langle G, x\rangle = \widetilde{G}$.

Лемма 3. *Пусть $D_p = G \triangleleft \widetilde{G}$, где $p \in 3+4\mathbb{Z}$ — простое число. Тогда никакое отражение $g \in G$ не является квадратом в $\widetilde{G}$.*

Доказательство. Подгруппа $\mathbb{Z}_p \subset D_p = G \triangleleft \widetilde{G}$ является коммутантом группы G и, следовательно, характеристична в G и нормальна в $\widetilde{G}$. Группа $\widetilde{G}$ действует на $\mathbb{Z}_p$ сопряжениями. При этом отражение g действует как $-1 \in \mathbb{Z}_p^* = \operatorname{Aut} \mathbb{Z}_p$, а -1 не является, как известно, квадратом в $\mathbb{Z}_p^*$, если $p \in 3+4\mathbb{Z}$, что и доказывает лемму.

Приступим теперь к доказательству теоремы 1. Можно считать, что $\widetilde{G} = \langle G, x\rangle$. Пусть K — множество всех подгрупп группы $\widetilde{G}$, сопряжённых с G. Тогда $\widetilde{G}$ транзитивно действует на K сопряжениями.

Лемма 4. $|\widetilde{G}| \geqslant |K| \cdot |G|$.

Доказательство. $|\widetilde{G}| = |K| \cdot |\mathrm{St}_{\widetilde{G}}(G)| \geqslant |K| \cdot |G|$, так как $G \subseteq \mathrm{St}_{\widetilde{G}}(G)$.

Рассмотрим полный неориентированный граф Γ с множеством вершин K. Назовём ребро (G^{h_1}, G^{h_2})

зелёным, если $|G^{h_1} \cap G^{h_2}| = 2$; жёлтым, если $|G^{h_1} \cap G^{h_2}| = p$; красным, если $|G^{h_1} \cap G^{h_2}| = 1$.

Ясно, что все рёбра покрашены. Если есть хотя бы одно ребро красного цвета, то утверждение сразу же следует из леммы 1. Поэтому далее считаем, что красных рёбер нет.

Лемма 5. *Все вершины K и жёлтые рёбра образуют граф Y, каждая компонента связности которого — полный граф. Все компоненты связности содержат одно и то же число вершин.*

Доказательство. Первое утверждение леммы немедленно вытекает из того, что в D_p есть всего одна подгруппа порядка p. То, что все компоненты связности содержат одинаковое количество вершин, следует из того, что действие $\widetilde{G}$ на K транзитивно и сохраняет цвета рёбер.

Лемма 6. *Число зелёных рёбер, выходящих из вершины G, положительно и делится на p.*

Доказательство. Каждое зелёное ребро, выходящее из G, соответствует одному из p отражений $g \in G$. Таким образом, рёбра, выходящие из G делятся на p классов. В каждом из этих классов одинаковое число рёбер, так как все отражения в группе G сопряжены и, следовательно, автоморфизмом графа можно перевести любой из этих классов в любой другой из этих классов. Это значит, что число зелёных рёбер, выходящих из G делится на p.

Одно зелёное ребро в графе существует, это ребро (G, G^x), где $x^2 = g \in G$ — отражение. Действительно, $G^x \cap G \ni g$, но $G^x \neq G$ (так как иначе группа G была бы нормальной подгруппой в $\widetilde{G} = \langle G, x\rangle$, чего не может быть по лемме 3). Значит, $G^x \cap G = \langle g\rangle_2$ и лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы. Предположим, что из G выходит по крайней мере $2p$ зелёных рёбер. Тогда граф имеет по крайней мере $2p+1$ вершину, то есть $|K| > 2p$ и по лемме 4 $|\widetilde{G}| \geqslant |K| \cdot |G| > 2p|G| = |G|^2$ и всё доказано.

Согласно лемме 6 остаётся рассмотреть случай, когда из каждой вершины графа выходит ровно p зелёных рёбер.

Пусть u — число вершин в каждой из компонент связности графа Y (лемма 5), а v — количество этих компонент связности. Тогда

$$p = (\text{число зелёных рёбер выходящих из } G) = (v-1)u$$

(так как каждая вершина, не соединённая с G жёлтым ребром, соединена с G зелёным ребром).

Равенство $p = (v-1)u$ означает (в силу простоты числа p), что либо $v = 2$ и $u = p$, либо $v = p+1$ и $u = 1$.

В первом случае $|K| = 2p$ и всё доказано по лемме 4: $|\widetilde{G}| \geqslant 2p|G| = |G|^2$.

Во втором случае $|K| = p+1$ и граф Γ представляет собой полный граф, все рёбра которого зелёные. Группа $\widetilde{G}$ действует на этом графе, причём действие группы G на множестве вершин, отличных от G, изоморфно действию G сопряжениями на множестве своих подгрупп порядка два (этот изоморфизм сопоставляет группе G^h подгруппу $G^h \cap G$). В частности, сопряжение при помощи отражения g представляет собой перестановку вершин графа, которая оставляет на месте ровно две точки (G и группу G^h, для которой $G \cap G^h = \langle g \rangle$) и, следовательно, раскладывается в произведение $\frac{p-1}{2}$ независимых транспозиций. Эта перестановка нечётная, так как $p \in 3 + 4\mathbb{Z}$, что противоречит тому, что g является квадратом в $\widetilde{G}$. Теорема доказана.

3. Корни высших степеней и другие открытые вопросы

Возникает вопрос: какова же на самом деле точная оценка?

Вопрос 1. *Бесконечно ли множество таких конечных групп G, что для некоторого $g \in G$ каждая группа, содержащая G в качестве подгруппы и содержащая элемент, квадрат которого равен g, имеет порядок не меньше чем $2|G|^2$?*

Следующее утверждение показывает, что для диэдральных групп наша теорема не может быть усилена, а для ответа на вопрос 1 надо изучать группы, близкие к простым.

Утверждение 1. *Если конечная группа G и её элемент g удовлетворяют хотя бы одному из следующих условий*

а) *G не совпадает со своим коммутантом;*

б) *G не совпадает с нормальным замыканием элемента g;*

в) *в G есть нетривиальная нормальная подгруппа нечётного порядка;**)

то G вкладывается в группу H порядка не превосходящего $|G|^2$, в которой элемент g является квадратом.

Доказательство. Следующая лемма показывает, что при выполнении условия а) или б) в качестве группы H можно взять не всё сплетение $G \wr \mathbb{Z}_2$ (см. параграф 1), а его собственную подгруппу. Если же выполнено условие в), то в качестве H можно взять собственную факторгруппу этого сплетения, как показывает лемма 8 (см. ниже).

Лемма 7. *В сплетении $G \wr \mathbb{Z}_2$ подгруппа H, порождённая группой G, вложенной диагонально, и квадратным корнем $\left(\begin{smallmatrix} 0 & g \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ из элемента $g \in G$ имеет вид*

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & 0 \\ 0 & g_2 \end{pmatrix} \; ; \; g_1 g_2^{-1} \in [\langle\langle g \rangle\rangle, G] \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & g_1 \\ g_2 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; g_1 g_2^{-1} \in g\, [\langle\langle g \rangle\rangle, G] \right\},$$

где $[\langle\langle g \rangle\rangle, G]$ — взаимный коммутант нормального замыкания элемента g в группе G и группы G.

Доказательство. Эпиморфизм $\varphi\colon G \to G/[\langle\langle g \rangle\rangle, G]$ индуцирует гомоморфизм $\Phi\colon G \wr \mathbb{Z}_2 \to (G/[\langle\langle g \rangle\rangle, G]) \wr \mathbb{Z}_2$. Множество, стоящее в правой части доказываемого равенства, есть $\Phi^{-1}(\Phi(H))$. Поэтому достаточно доказать, что H содержит ядро гомоморфизма Φ. Но $\ker \Phi$ порождается (как подгруппа) элементами вида

$$\begin{pmatrix} [g^x, y] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [g^x, y] \end{pmatrix}, \quad \text{где } x, y \in G,$$

*) Из теоремы Фейта–Томпсона о разрешимости групп нечётного порядка [FeTh63] следует, что свойство в) эквивалентно наличию в G нетривиальной абелевой нормальной подгруппы нечётного порядка.

которые лежат в H, как показывают следующие равенства:

$$\begin{pmatrix} x^{-1} & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & g \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g^x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left[\begin{pmatrix} 0 & g^x \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g^{-x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & g^{xy} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [g^x, y] \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [g^x, y] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [g^x, y] & 0 \\ 0 & [g^x, y] \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} [g^x, y] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

Лемма 8. *Если N — нормальная абелева подгруппа группы G, то множество*

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \; ; \; x \in N \right\}$$

является нормальной подгруппой в сплетении $G \wr \mathbb{Z}_2$. Если порядок подгруппы N нечётный, то подгруппа K тривиально пересекается с группой G (вложенной в сплетение диагональным образом).
Наоборот: каждая нетривиальная нормальная подгруппа этого сплетения, тривиально пересекающаяся с G, содержит нетривиальную абелеву нормальную подгруппу указанного вида.

Доказательство. То, что множество K является нормальной подгруппой, очевидно. Ясно, что $K \cap G = \{x \in N \; ; \; x^2 = 1\}$, поэтому K тривиально пересекается с G, если порядок подгруппы N нечётный.

Произвольная нетривиальная нормальная подгруппа X сплетения, как известно, нетривиально пересекается с базой (см, например, [KaMe82]). Пусть

$$1 \neq u = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \in X.$$

Тогда
$$\left[u, \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} [x, y] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = v \in X \ni \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} v \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & [x, y] \end{pmatrix} = w$$
и, следовательно,
$$vw = \begin{pmatrix} [x, y] & 0 \\ 0 & [x, y] \end{pmatrix} \in X \cap G = \{1\}, \quad \text{то есть } [x, y] = 1.$$

Но тогда
$$X \ni \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} u \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = t$$

и, следовательно,
$$ut = \begin{pmatrix} xy & 0 \\ 0 & xy \end{pmatrix} \in X \cap G = \{1\}, \quad \text{то есть } xy = 1.$$

Таким образом, пересечение подгруппы X с базой сплетения имеет вид

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix} \; ; \; x \in N \right\},$$

где N — некоторое подмножество группы G. Отсюда, разумеется, вытекает, что множество N обязано быть абелевой нормальной подгруппой. Лемма доказана.

Эти леммы доказывают утверждение 1 и, кроме того, показывают, что если группа G не удовлетворяет ни одному из условий а), б) и в) (например, если группа G является неабелевой простой), то сплетение $G \wr \mathbb{Z}_2$ не имеет ни собственных подгрупп, ни собственных факторгрупп, содержащих группу G и квадратный корень $\left(\begin{smallmatrix} 0 & g \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ из элемента g.

Перейдём теперь к корням высших степеней и решениям других уравнений. Отправной точкой нашего исследования послужила теорема Левина, которая в полном объёме выглядит так:

Теорема Левина ([Levin62]). *Сплетение $G \wr \mathbb{Z}_n$ группы G и циклической группы порядка n (имеющее порядок $n|G|^n$) содержит решения всех положительных уравнений степени n над группой G.*

Под *положительным уравнением степени n над группой G* понимается уравнение вида

$$g_1 x g_2 x \ldots g_n x = 1 \quad \text{где } g_1, \ldots, g_n \in G.$$

В связи с этим возникает вопрос: верно ли, что теорема Левина даёт неулучшаемую оценку?

Вопрос 2. *Бесконечно ли множество таких конечных групп G, что каждая группа, содержащая G в качестве подгруппы и содержащая решение каждого положительного уравнения степени n над G, имеет порядок не меньше чем $n|G|^n$?*

Можно выдвинуть и более смелую гипотезу.

Вопрос 3. *Бесконечно ли множество таких конечных групп G, что каждая группа H, содержащая G в качестве подгруппы, каждый элемент которой является n-й степенью в H, имеет порядок не меньше чем $n|G|^n$?*

Что можно сказать об экономном присоединении решений других (то есть неположительных) уравнений? Например, теорема Герстенхабера–Ротхауза [GeRo62] в комбинации с теоремой Мальцева о финитной аппроксимируемости конечно порождённых линейных групп [Маль40] даёт следующее утверждение.

Утверждение 2. ([GeRo62]+[Маль40]). *Каждая конечная группа G может быть вложена в конечную группу H, содержащую решения всех невырожденных уравнений длины n над G.*

Под *невырожденным уравнением длины n над группой G* понимается уравнение вида

$$g_1x^{\varepsilon_1}g_2x^{\varepsilon_2}\dots g_nx^{\varepsilon_n}=1,\quad \text{где } g_i\in G,\quad \varepsilon_i\in\{\pm1\},\quad \text{и } \sum\varepsilon_i\neq 0.$$

Доказательство теоремы Герстенхабера–Ротхауза красивое, но неконструктивное. Поэтому трудно написать не только неулучшаемую, но даже хоть какую-нибудь оценку на порядок группы H.

Вопрос 4. *Можно ли оценить $|H|$ через $|G|$ и n в утверждении 2?*

При $n=1$ ответ на вопросы 2, 3 и 4, очевидно, положительный. Невырожденное уравнение длины два имеет вид $g_1x^\varepsilon g_2x^\varepsilon=1$, где $\varepsilon\in\{\pm1\}$, и линейной заменой переменных приводится к виду $x^2=g$, поэтому основной результат этой работы даёт ответ на «ослабленные вдвое» версии этих вопросов при $n=2$. Что происходит при других n, нам неизвестно.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Брод84] Бродский С.Д. Уравнения над группами и группы с одним определяющим соотношением // Сиб. матем. ж. 1984. Т.25. №2. С.84–103.

[KaMe82] Каргаполов М.И., Мерзляков Ю.И. Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

[Кляч06] Клячко Ант.А. Как обобщить известные результаты об уравнениях над группами // Мат. заметки. 2006. Т.79. №3. С. 409–419. См. также arXiv:math.GR/0406382.

[КлПр95] Клячко Ант.А., Прищепов М.И. Метод спуска для уравнений над группами // Вестн. МГУ: Мат., Мех. 1995. №4. С.90–93.

[Маль40] Мальцев А.И. Об изоморфном представлении бесконечных групп матрицами // Матем. сб. 1940. 8(50):3 С.405–422.

[Стру95] Струнков С.П. К теории уравнений на конечных группах // Изв. РАН. Сер. матем. 1995. Т.59:6. С.171–180

[ClGo00] Clifford A., Goldstein R.Z. Equations with torsion-free coefficients // Proc. Edinburgh Math. Soc. 2000. V.43. P.295–307.

[EdHo91] Edjvet M., Howie J. The solution of length four equations over groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V.326. P.345–369.

[EdJu00] Edjvet M., Juhász A. Equations of length 4 and one-relator products // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 2000 V.129. P.217–230

[FeTh63] Feit W., Thompson J.G. Solvability of groups of odd order // Pacific J. Math. 1963. V.13 P.755–1029.

[FeRo96] Fenn R., Rourke C. Klyachko's methods and the solution of equations over torsion-free groups //L'Enseignment Mathématique. 1996. T.42. P.49–74.

[Frob03] Frobenius G. Über einen Fundamentalsatz der Gruppentheorie // Berl. Sitz. 1903. S.987–991.

[GeRo62] Gerstenhaber M., Rothaus O.S. The solution of sets of equations in groups // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1962. V.48 P.1531–1533.

[Hall36] Hall Ph. On a Theorem of Frobenius // Proc. London Math. Soc. 1936. V.40. P.468–531.

[Howie91] Howie J. The quotient of a free product of groups by a single high-powered relator. III: The word problem // Proc. Lond. Math. Soc. 1991. V.62. No.3 P.590-606.

[Juhá03] Juhász A. On the solvability of a class of equations over groups. // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 2003. V.135. P.211–217

[Klya93] Klyachko Ant.A. A funny property of a sphere and equations over groups // Comm. Algebra. 1993. V.21. P.2555–2575.

[Klya97] Klyachko Ant.A. Asphericity tests // J. Algebra. 1997. V.7. P.415–431.

[Levin62] Levin F. Solutions of equations over groups // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V.68. P.603–604.

[Lynd80] Lyndon R.C. Equations in groups // Bol. Soc. Bras. Math. 1980. V.11. no.1. P.79–102.

[Solo69] Solomon L. The solutions of equations in groups // Arch. Math. 1969. V.20. no.3. P. 241–247.