УДК 512.543.72 MSC: 20F70

ЦЕНТР КОНЕЧНО ПОРОЖДЁННОЙ СИЛЬНО ВЕРБАЛЬНО ЗАМКНУТОЙ ГРУППЫ ПОЧТИ ВСЕГДА ЧИСТ

Филипп Д. Денисов Антон А. Клячко
Механико-математический факультет Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ.
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
klyachko@mech.math.msu.su denissov.filipp@gmail.com

Из утверждения, сформулированного в заголовке, вытекает, что многие интересные группы, например, все неабелевы группы кос или $\mathbf{SL}_{100}(\mathbb{Z})$ — не сильно вербально замкнуты, то есть они могут быть вложены в бо́льшие конечно порождённые группы в качестве вербально замкнутых подгрупп, не являющихся ретрактами.

1. Введение

Подгруппа H группы G называется *вербально замкнутой* [MR14], если всякое уравнение вида

$$w(x,y,\ldots)=h, \quad \text{где } w \text{ — это элемент свободной группы } F(x,y,\ldots) \text{ и } h\in H,$$

имеющее решение в G, имеет решение в H. Если же каждая конечная система уравнений с коэффициентами из H

$$\{w_1(x,y,\ldots)=1,\ldots,w_m(x,y,\ldots)=1\}, \quad \text{где } w_i\in H*F(x,y,\ldots) \text{ (а } * \text{ — это свободное произведение)},$$

имеющая решение в G, имеет решение в H, то подгруппу H называют *алгебраически замкнутой* в G.

Алгебраическая замкнутость — это более сильное свойство, чем вербальная замкнутость, но во многих случаях эти свойства оказываются эквивалентными (смотрите [Rom12], [PX13], [MR14], [Mazh17], [PXK17], [KM18], [KMM18], [Mazh18], [Bog22], [Маж19], [PT20], [Тим21], [KMO23]). Группу H называют *сильно вербально замкнутой* [Mazh18], если она алгебраически замкнута во всякой группе, содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы. Таким образом, вербальная замкнутость — это свойство подгруппы, а сильная вербальная замкнутость — это свойство абстрактной группы. Класс сильно вербально замкнутых групп довольно широк. Например, сильно вербально замкнутыми являются
- все абелевы группы [Mazh18],
- все свободные группы [KM18],
  - и даже все почти свободные группы, не содержащие нееденичных конечных нормальных подгрупп [KM18], [KMM18],
- все группы, раскладывающиеся в свободное произведение нетривиальным образом [Маж19],
- фундаментальная группа любой связной поверхности, кроме бутылки Клейна [Mazh18], [K21],
  - и даже все ацилиндрически гиперболические группы без нетривиальных конечных нормальных подгрупп [Bog23] (это обобщает несколько из приведённых выше результатов),
- все конечные группы с неабелевым монолитом (в частности, все конечные простые группы) [KMO23],
- все диэдральные группы, порядок которых не делится на восемь [KMO23].

Отметим ещё общую теорему о вложении, полученную в [KMO23]:

всякая группа H вкладывается в сильно вербально замкнутую группу мощности $|H|+\aleph_0$, удовлетворяющую всем тождествам группы H.

Хотя доказать сильную вербальную замкнутость бывает непросто, доказать её отсутствие тоже непросто. До последнего времени были известны только единичные примеры не сильно вербально замкнутых групп. Однако недавно был доказан весьма общий факт.

Теорема KMO [KMO23]. *Центр конечной сильно вербально замкнутой группы выделяется в ней прямым сомножителем.*

Из этой теоремы немедленно вытекает, что, например, все конечные нильпотентные неабелевы группы не сильно вербально замкнуты. То же самое можно сказать про конечно порождённые нильпотентные группы с неабелевой периодической частью [D23]. Однако в общем случае следующий вопрос из [KMO23] остаётся открытым:

существует ли конечно порождённая неабелева нильпотентная сильно вербально замкнутая группа?

(Условие конечной порождённости здесь надо, конечно, накладывать из-за теоремы о вложении [KMO23], смотрите выше.)

Простейший пример бесконечной конечно порождённой нильпотентной группы (с абелевой периодической частью) — это дискретная группа Гейзенберга $\mathbf{UT}_3(\mathbb{Z})$; она оказалась не сильно вербально замкнутой [KMO23], но доказывается это весьма непросто.

Мы позволим себе высказать более смелый вопрос.

Работа второго автора выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00075.

Вопрос. *Верно ли, что центр любой конечно порождённой сильно вербально замкнутой группы выделяется в ней прямым сомножителем?*

Пока мы способны доказать лишь более слабое свойство — чистоту центра, и то при некоторых дополнительных условиях (не слишком, впрочем, обременительных). Напомним, что подгруппа B группы A называется *чистой* (или *сервантной*), если для любого целого n элементы из B, являющиеся n-ми степенями в A, являются n-ми степенями в B.

Основная теорема (упрощённая формулировка)**.** *Центр конечно порождённой сильно вербально замкнутой группы чист, если выполнено одно из следующих условий*:
- *все элементы конечного порядка лежат в центре* (в этом случае чистота центра, разумеется, эквивалентна его изолированности),
- *или группа не бесконечно разложима.*

(Полную формулировку можно найти в следующем параграфе.) Здесь мы называем группу *бесконечно разложимой*, если для любого $n \in \mathbb{N}$ она раскладывается в произведение n попарно коммутирующих нецентральных подгрупп (которые, разумеется, автоматически будут нормальными в этом случае).

Конечно порождённые бесконечно разложимые группы — это, конечно, экзотика, но такие группы существуют; существует даже нетривиальная конечно порождённая группа, изоморфная своему декартовому квадрату [TJ74].

Факторгруппа по центру бесконечно разложимой группы раскладывается в прямое произведение сколь угодно большого числа нетривиальных подгрупп; это означает, что она не удовлетворяет условию максимальности для прямых сомножителей в силу следующей теоремы ([O95], следствие 3 + утверждение 1):

> *группа с конечно порождённой факторгруппой по коммутанту раскладывается в конечное прямое произведение неразложимых групп тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию максимальности для прямых сомножителей; а число таких разложений* (*с точностью до изоморфизма сомножителей*) *всегда конечно.*

Таким образом, мы получаем следующий факт.

Следствие 1. *Центр конечно порождённой сильно вербально замкнутой группы чист, если факторгруппа по центру удовлетворяет условию максимальности для прямых сомножителей* (*или, что то же самое, раскладывается в конечное прямое произведение неразложимых групп*)*. В частности, центр конечно порождённой разрешимой сильно вербально замкнутой группы чист.*

Из нашей теоремы вытекает, конечно же, упомянутый выше известный факт о том, что фундаментальная группа бутылки Клейна не сильно вербально замкнута [K21] (поскольку фундаментальная группа бутылки Клейна $K = \langle a, b \mid a^2 = b^2 \rangle$ разрешима, а её центр $\langle a^2 \rangle$ не чист: a^2 является квадратом в K, но не в $\langle a^2 \rangle$). Кроме того, получается много новых интересных примеров не сильно вербально замкнутых групп, например,

не являются сильно вербально замкнутыми
- *все неабелевы группы кос* (поскольку эти группы не имеют кручения, а центр порождается квадратом «фундаментальной» косы [G69]), и, в частности, он не является 2-чистым, то есть чистым относительно квадратов,
- *группы $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$ при чётном n* (поскольку центр порождается квадратом блочно-диагональной матрицы с блоками $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, а группы $\mathbf{PSL}_n(\mathbb{Z})$ не разложимы в прямые произведения, как нетрудно показать).*)

В качестве ещё одного следствия (которое мы докажем в последнем параграфе) мы получаем прямое обобщение теоремы КМО.

Следствие 2. *Если коммутант конечно порождённой сильно вербально замкнутой группы конечен* (*или, что то же самое, индекс центра конечен***)*), то центр выделяется в этой группе прямым сомножителем.*

Наше подход к доказательству основной теоремы похож, можно сказать, на доказательство из [K21], но рассуждения значительно хитрее: в частности, мы используем теорему Шевалле о нулях многочленов [Che35]

---

*) Группы кос линейны [Big01], [Kra02] (и группы $\mathbf{SL}_n(\mathbb{Z})$ тоже, конечно же), а для линейных (и даже для всех нётеровых по уравнениям) подгрупп H конечно порождённых групп G алгебраическая замкнутость эквивалентна наличию ретракции (то есть гомоморфизма $G \to H$, тождественного на H) [MR14]; поэтому этот пример можно сформулировать на «более категорном» языке (как это сделано в аннотации).

**) *Группы с конечным индексом центра имеют конечный коммутант* по теореме Шура [Sch04]. Обратное утверждение для конечно порождённых групп доказал Б. Нейман [Neu51] (но история этого вопроса несколько странная [Ya16]).

(точнее говоря, некоторое её обобщение, смотрите параграф 3); в этом отношении наше рассуждение похоже на доказательство теоремы КМО [KMO23].

Обозначения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что если $k \in \mathbb{Z}$, а x и y — элементы некоторой группы, то x^y, x^{ky} и x^{-y} обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$ и $y^{-1}x^{-1}y$, соответственно. *Коммутатор* $[x, y]$ мы понимаем как $x^{-1}y^{-1}xy$. Центр группы G мы обозначаем символом $\mathrm{Z}(G)$. Мощность множества X мы обозначаем $|X|$. Если X — подмножество некоторой группы, то $\langle X\rangle$ — это подгруппа, порождённая множеством X. Символ $\langle g\rangle_n$ обозначает циклическую подгруппу порядка n, порождённую элементом g. Буквы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}$ обозначают множество целых и натуральных (положительных целых) чисел, соответственно. Символ $\mathbb{Z}_n$ обозначает кольцо вычетов по модулю n (или аддитивную группу этого кольца). Свободное произведение групп A и B мы обозначаем символом $A * B$.

Авторы благодарят анонимного рецензента и А. А. Скутина за полезные замечания, позволившие нам улучшить изложение. Второй автор благодарит Фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

2. Основная теорема

Прежде всего заметим, что для доказательства основного результата в том виде, в каком он сформулирован во введении достаточно ограничиться примарными степенями. Это показывают следующий простой (и хорошо известный) факт.

Абелева подгруппа B группы A чиста ($=$ сервантна) тогда и только тогда, когда она p-чиста ($= p$-сервантна) для каждого простого p, то есть $B \cap \left\{a^{p^k} \mid a \in A\right\} = \left\{b^{p^k} \mid b \in B\right\}$ для всех натуральных k.

Действительно, если $a^{mn} = b = b_1^m = b_2^n$, где m и n взаимно просты, $a \in A$ и $b, b_1, b_2 \in B$, то $(b_1^k b_2^l)^{mn} = b^{kn+lm} = b$, где целые числа k и l выбраны так, что $kn + lm = 1$.

Основная теорема. *Если сильно вербально замкнутая группа H конечно порождена по модулю центра, а её центральный элемент b^{p^k} не является p^k-й степенью никакого центрального элемента (где $b \in H$, число p простое и $k \in \mathbb{N}$), то для любого натурального n группа H раскладывается в произведение n попарно коммутирующих подгрупп, ни одна из которых не лежит в централизаторе множества $\left\{h \in H \mid h^{p^k} = 1,\ [h, b] = 1\right\}$.* (В частности, это множество не содержится в центре группы H.)

Доказательство. Эта теорема немедленно вытекает из трёх лемм, которые мы докажем в следующем параграфе.

Лемма о вербальной замкнутости. *Пусть H — произвольная группа, $b \in H$ и $b^{p^k} \in \mathrm{Z}(H)$, где число p простое и $k \in \mathbb{N}$. Тогда в полупрямом произведении $G = F \leftthreetimes \bigtimes_{s\in S} H_s$, где*

- *S — конечное множество,*
- *F — подгруппа в группе всех функций $S \to \mathbb{Z}_{p^k}$ (но записанная мультипликативно),*
- *H_s — изоморфные копии группы H (и соответствующие изоморфизмы мы обозначаем индексом $h \mapsto h_s$),*
- *а действие такое: $h_s^f = \left(h^{b^{f(s)}}\right)_s$,*

«диагональная» подгруппа $\left\{\prod_{s\in S} h_s \;\middle|\; h \in H\right\} \simeq H$ вербально замкнута, если каждая функция $f \in F$ обращается в ноль в некоторой точке $s \in S$.

Лемма об алгебраической незамкнутости. *Пусть группа H конечно порождена по модулю центра, $b \in H$, а элемент b^{p^k}, где число p простое и $k \in \mathbb{N}$, лежит в центре группы H, но не является p^k-й степенью никакого центрального элемента. И пусть n — максимальное число попарно коммутирующих подгрупп, произведение которых равно H и ни одна из которых не содержится в централизаторе множества $\{h \in H \mid h^{p^k} = 1,\ [h, b] = 1\}$. Тогда диагональная подгруппа H полупрямого произведения G из леммы о вербальной замкнутости не является алгебраически замкнутой в G, если для любого подмножества $T \subseteq S$ мощности не более $\max(n, 1)$ найдётся функция $f_T \in F$ такая, что $f_T(s) = 1$ для всех $s \in T$.*

Для завершения доказательства теоремы (по модулю этих лемм) осталось понять, что условия двух лемм выше могут быть выполнены одновременно (при подходящих S и F); следующее утверждение показывает, что действительно могут.

Лемма о функциях. *Для любых натуральных k и n и простого p существуют конечное множество S и подгруппа F в группе всех функций $S \to \mathbb{Z}_{p^k}$ такая, что*

1) *каждая функция из F обращается в ноль в некоторой точке из S;*

2) *но для любых $s_1, \dots, s_n \in S$ найдётся функция $f \in F$ такая, что $f(s_1) = \dots = f(s_n) = 1$.*

В следующем параграфе мы докажем три леммы, сформулированные выше, и тем самым завершим доказательство теоремы.

3. Доказательства трёх лемм

Доказательство леммы о вербальной замкнутости. Чтобы установить вербальную замкнутость подгруппы H в G, мы должны показать, что произвольное уравнение вида

$$w(x, y, \dots) = h, \quad \text{где } h \in H \text{ и } w(x, y, \dots) \text{ — элемент свободной группы } F(x, y, \dots),$$

разрешимое в G, разрешимо в H. Любое такое уравнение можно, как известно, путём замены переменных преобразовать к виду

$$x^m u(x, y, \dots) = h, \quad \text{где } h \in H \text{ и } u(x, y, \dots) \text{ — элемент коммутанта свободной группы } F(x, y, \dots).$$

(Чтобы получить эту замену переменных, достаточно заметить, что факторгруппа по коммутанту свободной группы есть свободная абелева группа $\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}$; а для любого элемента $\widehat{w}$ свободной абелевой группы найдётся базис B такой, что $\widehat{w} = mb$, где $m \in \mathbb{Z}$ и $b \in B$.)

Предположим, что это уравнение имеет некоторое решение $(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \dots)$ в группе G; в частности,

$$\widetilde{x} = f^{\varepsilon} d, \quad \text{где } \varepsilon \in \mathbb{Z},\ f \in F \text{ и } d \in \bigtimes_{s \in S} H_s.$$

По условию функция f обращается в ноль в некоторой точке $s \in S$. Рассмотрим следующий гомоморфизм (взятие s-й координаты):

$$\varphi\colon G \to \widetilde{H} = \langle \beta \rangle_{p^k} \leftthreetimes H \ (\text{с действием } h^{\beta} = h^{b}), \quad \text{где } \varphi(h_s) = h,\quad \varphi(h_{s'}) = 1 \text{ при } s' \neq s,\ \varphi(f') = \beta^{f'(s)} \text{ для } f' \in F.$$

Применяя этот гомоморфизм, мы получаем, что уравнение $w\big(\varphi(\widetilde{x}), y, z, \dots\big) = h$ над группой H с неизвестными $y, z, \dots$, каждая из которых входит в суммарно нулевой степени в слово w, имеет решение в группе $\widetilde{H}$. (Это уравнение над H, поскольку $f(s) = 0$ и, стало быть, $\varphi(\widetilde{x}) \in H$.) Остаётся воспользоваться следующим почти очевидным фактом:

если в слово $v \in H * F(y, z, \dots)$ каждая из букв $y, z, \dots$ входит в суммарно нулевой степени и уравнение $v = 1$ разрешимо в группе $\widetilde{H}$, то оно разрешимо и в H.

Действительно, заменив в решении β на b, мы снова получим решение. Это завершает доказательство.

Доказательство леммы об алгебраической незамкнутости. Пусть $H = \langle h_1, \dots, h_m \rangle \cdot \mathrm{Z}(H)$. Система уравнений

$$\left\{ x_f^{p^k} \overset{(1)}{=} 1,\ y_{i\,s}^{x_f} \overset{(2)}{=} y_{i\,s}^{b^{f(s)}},\ \prod_{q \in S} y_{i\,q} \overset{(3)}{=} h_i,\ [y_{i\,s}, y_{j\,s'}] \overset{(4)}{=} 1,\ [x_f, b] \overset{(5)}{=} 1 \ \middle|\ f \in F,\ s \in S \ni s' \neq s,\ i, j = 1, \dots, m \right\}$$

над H в группе G имеет очевидное решение: $x_f = f$, $y_{i\,s} = (h_i)_s$. А в группе H решений нет:

- уравнения (4) означают, что подгруппы $K_s = \langle y_{1\,s}, \dots, y_{m\,s} \rangle \cdot \mathrm{Z}(H)$ попарно коммутируют;
- уравнения (3) означают, что $H = \prod K_s$;
- элементы x_f коммутируют с b в силу уравнения (5);
- вместе с уравнением (1) всё вышесказанное по условию означает, что элементы x_f коммутируют со всеми подгруппами K_s, кроме некоторых n (или меньше) подгрупп K_t, где $t \in T \subseteq S$, $|T| \leqslant n$ (это множество T не зависит от f);
- значит, по условию найдётся функция $f_T \in F$ такая, что $f_T(t) = 1$ для всех $t \in T$;
- поэтому уравнения (2) показывают, что элемент $x_{f_T} b^{-1}$ коммутирует с $y_{i\,s}$ при $s \in T$;
  - и при $s \notin T$ эти элементы $x_{f_T} b^{-1}$ и $y_{i\,s}$ тоже коммутируют, поскольку при таких s элемент $y_{i\,s}$ коммутирует со всеми x_f (как было отмечено выше), поэтому, выбирая такую функцию $f \in F$, что $f(s) = 1$ (которая существует по условию), мы получаем $y_{i\,s} = y_{i\,s}^{x_f} \overset{(2)}{=} y_{i\,s}^{b^{f(s)}} = y_{i\,s}^{b}$;
- стало быть, уравнения (3) показывают, что элемент $x_{f_T} b^{-1}$ центральный (поскольку h_i порождают группу H по модулю центра);

- возведя этот центральный элемент в степень p^k, мы получим b^{-p^k} (поскольку $(x_{f_T} b^{-1})^{p^k} \overset{(5)}{=} x_{f_T}^{p^k} b^{-p^k} \overset{(1)}{=} b^{-p^k}$), что противоречит условию $b^{p^k} \notin \mathrm{Z}(H)^{p^k}$. Это завершает доказательство леммы об алгебраической незамкнутости.

Доказательство леммы о функциях. Положим $S = \mathbb{Z}_{p^k}^m \setminus p\mathbb{Z}_{p^k}^m$, где число m достаточно большое (по сравнению с k и p, смотрите ниже). Возьмём в качестве F множество (полиномиальных) отображений $\mathbb{Z}_{p^k}^m \to \mathbb{Z}_{p^k}$, задаваемых многочленами (от m переменных) без свободных членов и степени не выше, чем $n(p-1)p^{k-1}$. Условие 2) тогда выполнено. Действительно,
- можно выбрать базис в свободном $\mathbb{Z}_{p^k}$-модуле $\mathbb{Z}_{p^k}^m$ и считать, что у векторов s_i равны нулю все координаты, кроме первых n координат (поскольку определение множества F не зависит от выбора базиса);
- рассмотрим редукцию по модулю p $\varphi\colon \mathbb{Z}_{p^k}^m \to \mathbb{Z}_{p^k}^m / p\mathbb{Z}_{p^k}^m \simeq \mathbb{Z}_p^m$;
- каждая функция из n-мерного векторного пространства (в котором лежат все $\varphi(s_i)$) в $\mathbb{Z}_p$ задаётся, как известно, многочленом, степень которого по каждой переменной не превосходит $p-1$ (поскольку многочлен x^p задаёт ту же функцию $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, что многочлен x);
- то есть, мы имеем многочлен $g \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ степени не больше, чем $n(p-1)$, такой, что $g(0) \in p\mathbb{Z}_{p^k}$, а $g(s_i) \in 1 + p\mathbb{Z}_{p^k}$ для всех i;
- значит, многочлен $g^{p^{k-1}}$ принимает (в $\mathbb{Z}_{p^k}$)
  - значение 0 в нуле, поскольку $p^{k-1} > k$ (то есть этот многочлен не имеет свободного члена);
  - значение 1 во всех точках s_i (поскольку $g(s_i)$ лежат в $1 + p\mathbb{Z}_{p^k}$, а это множество есть группа (по умножению) порядка p^{k-1}, так что мы возводим элемент группы в степень, равную порядку этой группы);
- при этом для степени мы имеем неравенство $\deg g^{p^{k-1}} = p^{k-1} \cdot \deg g \leqslant n(p-1)p^{k-1}$, так что $g^{p^{k-1}} \in F$ по определению множества F.

Для проверки условия 1) достаточно воспользоваться теоремой Шануеля [Sch74], которая говорит, в частности, что:

многочлен $f \in \mathbb{Z}_{p^k}[x_1, \ldots, x_m]$ без свободного члена имеет ненулевой корень в $\{0,1\}^m$, если $m > (p^k - 1) \cdot \deg f$.

Таким образом, если выбрать m бо́льшим, чем $n(p-1)p^{k-1}(p^k - 1)$, то оба условия окажутся выполненными. Это завершает доказательство леммы (и основной теоремы).

4. Доказательство следствия 2

Это утверждение легко вытекает из основной теоремы и известных фактов. Действительно,
- группа H конечно порождена, а индекс центра конечен, следовательно, центр является конечно порождённой абелевой группой и, значит, раскладывается в прямое произведение конечной абелевой группы и свободной абелевой группы F (и индекс $|H : F|$ конечен);
- как показал Шур [Sch04] (смотрите также [Rob96], теорема 10.1.3),

для любой центральной подгруппы F конечного индекса в (любой) группе H отображение $\tau\colon x \mapsto x^{|H:F|}$ (называемое отображением переноса или трансфером) является гомоморфизмом из H в F.

- $\tau(H) = \tau(F)$, поскольку центр чист в H (по основной теореме), а F чиста в центре (очевидно);
- следовательно, композиция отображения τ и (подходящего) изоморфизма $\tau(H) = \tau(F) \to F$ является ретракцией $H \to F$;
- то есть F (будучи центральной подгруппой) выделяется в H прямым сомножителем: $H = F \times H_1$;
- второй сомножитель H_1 обязан быть конечным (поскольку F имеет конечный индекс в H) и сильно вербально замкнутым:
  - *прямой сомножитель сильно вербально замкнутой группы сильно вербально замкнут*$^{*)}$ (поскольку как вербальная, так и алгебраическая замкнутость подгруппы A в группе $\widetilde{A}$ равносильна аналогичному свойству подгруппы $A \times B$ в группе $\widetilde{A} \times B$);
- остаётся заметить, что $\mathrm{Z}(H) = F \times \mathrm{Z}(H_1)$, а в H_1 центр выделяется прямым сомножителем по теореме КМО.

$^{*)}$ А верно ли, наоборот, что класс сильно вербально замкнутых групп замкнут относительно прямых произведений — неизвестно; это вопрос Мажуги [Маж18] (там же можно найти некоторые результаты на эту тему).

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[KM18] А. А. Клячко, А. М. Мажуга, Вербально замкнутые почти свободные подгруппы, Мат. сборник, 209:6 (2018), 75-82. См. также arXiv:1702.07761.

[Маж18] А. М. Мажуга, Вербально замкнутые подгруппы, Дис. ... к.ф.-м.н., МГУ, Москва, 2018, https://istina.msu.ru/dissertations/150563554/ .

[Маж19] А. М. Мажуга, Свободные произведения групп сильно вербально замкнуты, Мат. сборник, 210:10 (2019), 122-160. См. также arXiv:1803.10634.

[PT20] В. А. Романьков, Е. И. Тимошенко, О вербально замкнутых подгруппах свободных разрешимых групп, Алгебра и логика, 59:3 (2020), 367-384. См. также arXiv:1906.11689.

[PX13] В. А. Романьков, Н. Г. Хисамиев, Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп, Алгебра и логика, 52:4 (2013), 502-525.

[PXK17] В. А. Романьков, Н. Г. Хисамиев, А. А. Конырханова, Алгебраически и вербально замкнутые подгруппы и ретракты конечно порожденных нильпотентных групп, Сиб. матем. журн., 58:3 (2017), 686-699.

[Тим21] Е. И. Тимошенко, Ретракты и вербально замкнутые подгруппы относительно свободных разрешимых групп, Сиб. матем. журн., 62:3 (2021), 659-667.

[Big01] S. Bigelow, Braid groups are linear, Journal of the American Mathematical Society, 14:2 (2001), 471-486.

[Bog22] O. Bogopolski, Equations in acylindrically hyperbolic groups and verbal closedness, Groups, Geometry, and Dynamics, 16:2 (2022), 613-682. См. также arXiv:1805.08071.

[Che35] C. Chevalley, Démonstration d'une hypothèse de M. Artin, Abh. Math. Semin. Univ. Hambg., 11 (1935), 73-75.

[D23] F. D. Denissov, Finite normal subgroups of strongly verbally closed groups, Journal of Group Theory (в печати). https://doi.org/10.1515/jgth-2023-0015 . См. также arXiv:2301.02752.

[G69] F. A. Garside, The braid group and other groups, The Quarterly Journal of Mathematics, 20:1 (1969), 235-254.

[K21] A. A. Klyachko, The Klein bottle group is not strongly verbally closed, though awfully close to being so, Canadian Mathematical Bulletin, 64:2 (2021), 491-497. См. также arXiv:2006.15523.

[KMM18] A. A. Klyachko, A. M. Mazhuga, V. Yu. Miroshnichenko, Virtually free finite-normal-subgroup-free groups are strongly verbally closed, J. Algebra, 510 (2018), 319-330. См. также arXiv:1712.03406.

[KMO23] A. A. Klyachko, V. Yu. Miroshnichenko, A. Yu. Olshanskii, Finite and nilpotent strongly verbally closed groups, Journal of Algebra and Its Applications 22:09 (2023), 2350188. См. также arXiv:2109.12397.

[Kra02] D. Krammer, Braid groups are linear, Annals of Mathematics, 155:1 (2002), 131-156. См. также arXiv:math/0405198.

[Mazh17] A. M. Mazhuga, On free decompositions of verbally closed subgroups of free products of finite groups, J. Group Theory, 20:5 (2017), 971-986. См. также arXiv:1605.01766.

[Mazh18] A. M. Mazhuga, Strongly verbally closed groups, J. Algebra, 493 (2018), 171-184. См. также arXiv:1707.02464.

[MR14] A. Myasnikov, V. Roman'kov, Verbally closed subgroups of free groups, J. Group Theory, 17:1 (2014), 29-40. См. также arXiv:1201.0497.

[Neu51] B. H. Neumann, Groups with finite classes of conjugate elements, Proc. London Math. Soc., s3-1:1 (1951), 178-187.

[O95] F. Oger, The direct decompositions of a group G with G/G' finitely generated, Trans. Amer. Math. Soc., 347:6 (1995), 1997-2010.

[Rob96] D. J. S. Robinson, A Course in the theory of groups. Graduate texts in mathematics 80. Springer, 1996.

[Rom12] V. A. Roman'kov, Equations over groups, Groups - Complexity - Cryptology, 4:2 (2012), 191-239.

[Sch74] S. H. Schanuel, An extension of Chevalley's theorem to congruences modulo prime powers, Journal of Number Theory, 6:4 (1974), 284-290.

[Sch04] J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 127 (1904), 20-50.

[TJ74] J. M. Tyrer-Jones, Direct products and the Hopf property, J. Austral. Math. Soc., 17:2 (1974), 174-196.

[Ya16] M. K. Yadav, Central Quotient Versus Commutator Subgroup of Groups, In: S. Rizvi, A. Ali, V. Filippis, (eds) Algebra and its Applications. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, 174 (2016). Springer, Singapore. См. также arXiv:1011.2083.