УДК 519.157.1+519.175.1+519.176 MSC: 05D15,05C35,05C25

ИНВАРИАНТНЫЕ СИСТЕМЫ ПРЕДСТАВИТЕЛЕЙ, ИЛИ ЦЕНА СИММЕТРИИ

Антон А. Клячко[♯] Наталья М. Лунева[♭]

[♯] *Механико-математический факультет Московского государственного университета*
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ
[♭] *Сбербанк России, Москва 117997, ул. Вавилова, 19*
klyachko@mech.math.msu.su *ssl.nattie@gmail.com*

Пусть известно, что в графе можно уничтожить все стоугольники, удалив 2021 рёбер. Сколько рёбер заведомо достаточно удалить, если мы хотим уничтожить все стоугольники так, чтобы множество удаляемых рёбер было инвариантно относительно всех автоморфизмов исходного графа? Работа содержит решение подобных задач, а также несколько открытых вопросов на эту тему.

0. Введение

Рассмотрим следующую «прикладную» задачу.

> Мы отбираем участников для экспедиции на Марс и хотим соблюсти (например) следующее *требование совместимости*: среди любых пяти участников найдутся двое, каждый из которых уважает хотя бы троих из этой пятёрки. Наши досье показывают, что можно десять кандидатов исключить так, чтобы это требование совместимости оказалось выполненным. Проблема в том, что мы хотим быть *справедливыми* и *непредвзятыми*, то есть мы хотим, чтобы множество исключённых было инвариантно относительно всех перестановок множества кандидатов, сохраняющих отношение «уважает». Сколько кандидатов мы должны исключить (в худшем случае)?

Какова цена справедливости? Вопрос сложнее, чем может показаться на первый взгляд. Например, если мы попытаемся исключить всех кандидатов, которые получаются из исходных десяти «плохих» кандидатов под действием всех допустимых перестановок, то такой подход может привести к исключению вообще всех кандидатов, даже если их было бесконечно много. На самом деле, оптимальное множество справедливо исключаемых кандидатов всегда конечно и не обязано ни содержать исходное множество «плохих» кандидатов, ни содержаться в нём.

В алгебре известно много теорем такого сорта, например,
- если группа G содержит абелеву подгруппу конечного индекса, то G содержит *характеристическую* (то есть инвариантную относительно всех автоморфизмов) абелеву подгруппу конечного индекса [KaM82];
- если группа G содержит нильпотентную подгруппу конечного индекса, то G содержит характеристическую нильпотентную (той же ступени) подгруппу конечного индекса [BrNa04];
- если группа G содержит разрешимую подгруппу конечного индекса, то G содержит характеристическую разрешимую (той же ступени) подгруппу конечного индекса [KhM07a];
- если группа G содержит центрально метабелеву подгруппу конечного индекса, то G содержит характеристическую центрально метабелеву подгруппу конечного индекса [KhM07a];
- если группа G содержит паранильпотентную подгруппу конечного индекса, то G содержит характеристическую паранильпотентную подгруппу конечного индекса [dGT19b];
- если группа G содержит подгруппу конечного индекса с конечным коммутантом, то G содержит характеристическую подгруппу конечного индекса с конечным коммутантом [KlMi15];
- если группа G конечного периода содержит конечную нормальную подгруппу N, то G содержит характеристическую конечную подгруппу H такую, что *спектр* (то есть множество порядков всех элементов) факторгруппы G/H содержится в спектре факторгруппы G/N [KlMi15];
- если алгебра G (ассоциативная или лиевская) над полем содержит разрешимый идеал конечной коразмерности, то G содержит инвариантный относительно всех автоморфизмов разрешимый (той же ступени) идеал конечной коразмерности [KhM08].

Список можно долго продолжать, смотрите, например, [Вд00], [KhM07b], [KhM08], [КлМе09], [KhKMM09], [MSh12], [KlMi15], [Fr18], [dGT18a], [dGT18b], [dGT19a], [dGT19b] и литературу там цитируемую. Утверждения такого сорта называют иногда ([KlMi15], [Fr18]) *теоремами типа Макаренко–Хухро* в честь одного из таких результатов [KhM07a] (смотрите также [KlMe09]), включающего в себя в качестве частных случаев первые четыре из упомянутых фактов.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00591.

Первый из этих фактов (об абелевых подгруппах) несложный в том смысле, что существует короткое и элементарное доказательство. Однако совсем уж наивные подходы здесь не работают. Как из данной абелевой подгруппы $N \subset G$ конечного индекса сделать характеристическую?

- Можно взять пересечение всех автоморфных образов подгруппы N. Полученная подгруппа $\bigcap\limits_{\varphi \in \mathrm{Aut}\, G} \varphi(N)$ будет характеристической и абелевой (поскольку содержится в N), но, к сожалению, не обязана иметь конечный индекс.
- Можно, наоборот, взять группу, порождённую всеми автоморфными образами подгруппы N. Полученная подгруппа $\left\langle \bigcup\limits_{\varphi \in \mathrm{Aut}\, G} \varphi(N) \right\rangle$ будет характеристической и иметь конечный индекс (поскольку содержит N), но, к сожалению, не обязана быть абелевой.

На самом деле, искомая характеристическая абелева подгруппа конечного индекса не обязана ни содержать исходную подгруппу, ни содержаться в ней. Похожая ситуация и с другими теоремами типа Макаренко–Хухро (и с задачей о марсианской экспедиции тоже).

Почти все упомянутые теоремы типа Макаренко–Хухро и сама теорема Макаренко–Хухро являются частными случаями некоторого очень общего факта, установленного в [KlMi15], который мы будем здесь называть *теоремой о полилинейных свойствах*. Эта общая теорема даёт и некоторую общую оценку на соответствующий параметр (индекс характеристической подгруппы, коразмерность инвариантного относительно автоморфизмов идеала...). Такая общая оценка, однако, бывает далека от оптимальной в конкретных случаях. Например, для абелевых подгрупп теорема о полилинейных свойствах даёт следующее количественное уточнение:

если группа G содержит абелеву подгруппу конечного индекса n, то G содержит характеристическую абелеву подгруппу индекса, не превосходящего $(n!)^{\log_2(n!)+1}$.

Тогда как на самом деле оптимальная оценка здесь n^2, смотрите [PSz02].*) В принципе, теорема о полилинейных свойствах применима и к чисто комбинаторным вопросам (смотрите [KlMi15]); например, для задачи о марсианской экспедиции эта теорема даёт такой практически бесполезный ответ:

заведомо достаточно исключить $22229709804712410 = f(f(f(f(10))))$ *кандидатов, где* $f(x) = x(x+1)$.

Эта оценка (сильно превышающая население Земли) тоже очень завышена. Следующая теорема говорит, что правильный ответ — 50 (и это уже неулучшаемо).

Основная теорема. *Пусть группа G действует на множестве U и $\mathcal{F}$ — G-инвариантное семейство конечных подмножеств множества U, мощности которых ограничены в совокупности, а $X \subseteq U$ — конечная система представителей для этого семейства (то есть $X \cap F \neq \varnothing$ для любого $F \in \mathcal{F}$). Тогда найдётся G-инвариантная система представителей Y такая, что $|Y| \leqslant |X| \cdot \max\limits_{F \in \mathcal{F}} |F|$.*

Слово *семейство* здесь понимается как *неупорядоченное семейство*, то есть $\mathcal{F}$ — это просто некоторое множество подмножеств множества U. *Инвариантность* семейства $\mathcal{F}$ следует понимать естественным образом: $g\mathcal{F} = \mathcal{F}$ для всех $g \in G$ или, более подробно, $gF \stackrel{\text{опр}}{=} \{gf \mid f \in F\} \in \mathcal{F}$ для всех $g \in G$ и $F \in \mathcal{F}$.

Доказательство основной теоремы вполне элементарно (смотрите последний параграф), но использует одну нетривиальную теорему Б. Неймана о покрытиях группы смежными классами [Neu54]. Из основной теоремы немедленно вытекает следующий факт о графах.

Следствие 1. *Пусть Γ — граф и K — конечный граф. Тогда*

1) *если в графе Γ можно выбрать конечное множество вершин X так, чтобы каждый подграф графа Γ, изоморфный графу K, имел хоть одну вершину из X, то в графе Γ можно выбрать конечное множество вершин Y, инвариантное относительно всех автоморфизмов графа Γ, так, чтобы опять каждый подграф графа Γ, изоморфный графу K, имел хоть одну вершину из Y, причём $|Y| \leqslant |X| \cdot$* (число вершин графа K);
2) *если в графе Γ можно выбрать конечное множество рёбер X так, чтобы каждый подграф графа Γ, изоморфный графу K, имел хоть одно ребро из X, то в графе Γ можно выбрать конечное множество рёбер Y, инвариантное относительно всех автоморфизмов графа Γ, так, чтобы опять каждый подграф графа Γ, изоморфный графу K, имел хоть одно ребро из Y, причём $|Y| \leqslant |X| \cdot$* (число рёбер графа K).

Слово *граф* здесь (и во всей статье) можно понимать в любом разумном смысле:

---

*) Смотрите также работу [dGT18a], авторы которой передоказали оценку n^2, по-видимому не зная о работе [PSz02]. На самом деле для конечных групп G эта оценка была известна и раньше ([ChD89], смотрите также [Is08], теорема 1.41). А качественный факт: *если группа содержит абелеву подгруппу конечного индекса, то она содержит и характеристическую абелеву подгруппу конечного индекса*, был известен ещё раньше, смотрите [KaM82].

- граф может быть ориентированным, неориентированным или смешанным,
- кратные рёбра и/или петли могут допускаться или не допускаться.

Разумеется, слово «изоморфизм» (и «автоморфизм») следует понимать соответствующим образом, то есть изоморфизм должен сохранять ориентацию рёбер, если речь идёт об ориентированных графах.

Замечание. Аналог следствия 1 справедлив в ситуации, когда имеется несколько (конечное число) «запрещённых» конечных графов $K_1, \ldots, K_n$ (вместо одного графа K). В этом случае оценка получается такой: $|Y| \leqslant |X| \cdot \max\limits_i$(число вершин [рёбер] графа K_i).

Доказательство выглядит так же, как доказательство следствия 1: достаточно сослаться на основную теорему, взяв в качестве множества U множество всех вершин [рёбер] графа Γ, в качестве группы G группу автоморфизмов графа Γ, а в качестве семейства $\mathcal{F}$ следующее семейство

$$\mathcal{F} = \Big\{\{\text{вершины [рёбра] графа } S\} \ \Big| \ S \text{ — подграф в } \Gamma, \text{ изоморфный одному из } K_i\Big\}.$$

В параграфах 1 и 2 мы обсуждаем точность оценок из следствия 1; ситуация здесь такая:
- оценки из обоих утверждений следствия 1 неулучшаемы в том смысле, что в этих утверждениях нельзя заменить функцию $|X| \cdot$ (число вершин [рёбер] графа K) ни на какую меньшую функцию от $|X|$ и числа вершин [рёбер] графа K;
- если же граф K фиксировать и задаться вопросом о неулучшаемости оценок при данном K, то задача становится интереснее:
  - графы K, для которых оценка из утверждения о вершинах неулучшаема, имеют простое описание (но всё равно остаются интересные открытые вопросы); смотрите следующий параграф;
  - что касается утверждения о рёбрах, то здесь вопросов явно больше, чем ответов; смотрите параграф 2.

В заключение отметим, что не в любой ситуации можно доказать теорему типа Макаренко–Хухро. Например,

> *из наличия в группе подгруппы конечного индекса с тождеством $x^{2019} = 1$ не вытекает существование характеристической подгруппы конечного индекса с таким тождеством* [KhKMM09].

В [KlMi15] можно найти забавный пример пограничной ситуации: с одной стороны,

> *если граф сделать планарным путём удаления конечного числа рёбер, то такое конечное множество рёбер всегда можно выбрать инвариантным относительно всех автоморфизмов графа*;

а с другой стороны, *никакой оценки здесь быть не может* (то есть существует такое n, что для любого m существует граф, который можно сделать планарным путём удаления n рёбер, но нельзя сделать планарным путём удаления множества, состоящего из менее чем m рёбер и инвариантного относительно всех автоморфизмов графа).

Обозначения и соглашения, которые мы используем, в целом стандартны. Отметим только, что слово *граф* везде, где не оговорено противное, можно понимать в любом из шести смыслов, указанных выше. Индекс подгруппы H группы G обозначается $|G{:}H|$. Буква $\mathbb{Z}$ обозначает множество целых чисел. Символ $|X|$ обозначает мощность множества X.

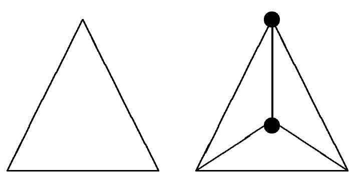
1. Вершинная представительность

Назовём *вершинной представительностью* $\Upsilon_{\mathrm{v}}(K, \Gamma)$ графа K в графе Γ минимальное число n такое, что в графе Γ найдётся множество вершин X мощности n, удовлетворяющее следующему условию:

$$\textit{каждый подграф графа } \Gamma\textit{, изоморфный } K\textit{, содержит вершину из } X. \qquad (*)$$

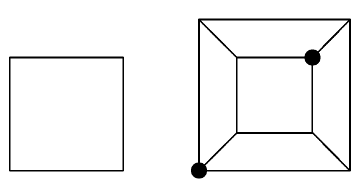
Определим *симметричную вершинную представительность* $\Upsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{sym}}(K, \Gamma)$ графа K в графе Γ как минимальное число n такое, что в графе Γ найдётся инвариантное относительно всех автоморфизмов множество вершин X мощности n с условием $(*)$.

Например, для граней тетраэдра и куба имеем:



K Γ

$\Upsilon_{\mathrm{v}}(K, \Gamma) = 2, \quad \Upsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{sym}}(K, \Gamma) = 4$



K Γ

$\Upsilon_{\mathrm{v}}(K, \Gamma) = 2, \quad \Upsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{sym}}(K, \Gamma) = 8$

Ясно, что $\Upsilon_{\mathrm{v}}(K,\Gamma) \leqslant \Upsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma)$. Согласно следствию 1, $\Upsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma) \leqslant \Upsilon_{\mathrm{v}}(K,\Gamma) \cdot$ (число вершин графа K). Следующее утверждение показывает, что для связных графов K эта оценка не может быть улучшена.

Граф K будем называть *дорогим в смысле симметричной вершинной представительности* или просто *дорогим* (или *вершинно дорогим*), если

$$\forall m \in \mathbb{Z} \text{ найдётся граф } \Gamma_m \text{ такой, что } \Upsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma_m) = \Upsilon_{\mathrm{v}}(K,\Gamma_m) \cdot (\text{число вершин графа } K) \geqslant m. \qquad (**)$$

Таким образом, граф K дорогой, если оценка из следствия 1 (по сути) не может быть улучшена для графа K. Назовём дорогой граф K (*вершинно*) *дорогим в классе графов* $\mathcal{K}$, если графы Γ_m в $(**)$ могут выбраны из класса $\mathcal{K}$.

Теорема 1. *Конечный граф K является дорогим тогда и только тогда, когда он связный. Более того, связный граф K без висячих рёбер является дорогим в классе связных графов.*

Доказательство. Заметим, что

всякий граф K вкладывается в вершинно транзитивный граф $\widetilde{K}$ с таким же числом вершин.

Действительно, если под словом *граф* понимается неориентированный граф без кратных рёбер и без петель, то в качестве графа $\widetilde{K}$ достаточно взять полный граф с таким же (как у K) числом вершин; в остальных случаях этот факт тоже остаётся верным (оставляем это читателям в качестве упражнения, смотрите графы K и $\widetilde{K}$ на рисунке 1).

Если граф K связный, то возьмём в качестве графа Γ_m несвязное объединение m копий графа $\widetilde{K}$. Покажем, что достигается нужная оценка. Действительно, чтобы избавиться от подграфов, изоморфных запрещенному, достаточно (и необходимо) удалить в каждой копии графа $\widetilde{K}$ одну вершину. Таким образом, $\Upsilon_{\mathrm{v}}(K,\Gamma_m) = m$. Но граф Γ_m является вершинно транзитивным, поэтому $\Upsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma_m) = mk$ где k — это число вершин графа K.

Чтобы доказать утверждение «Более того» достаточно добавить к построенному графу Γ_m цепи длины N, соединяющие каждую вершину i-й копии графа $\widetilde{K}$ с соответствующей вершиной $(i+1)$-й копии графа $\widetilde{K}$, где $i \in \{1,\ldots,m-1\}$, а число N (одинаковое для всех добавленных цепей) больше, чем число вершин графа K, смотрите рисунок 1.

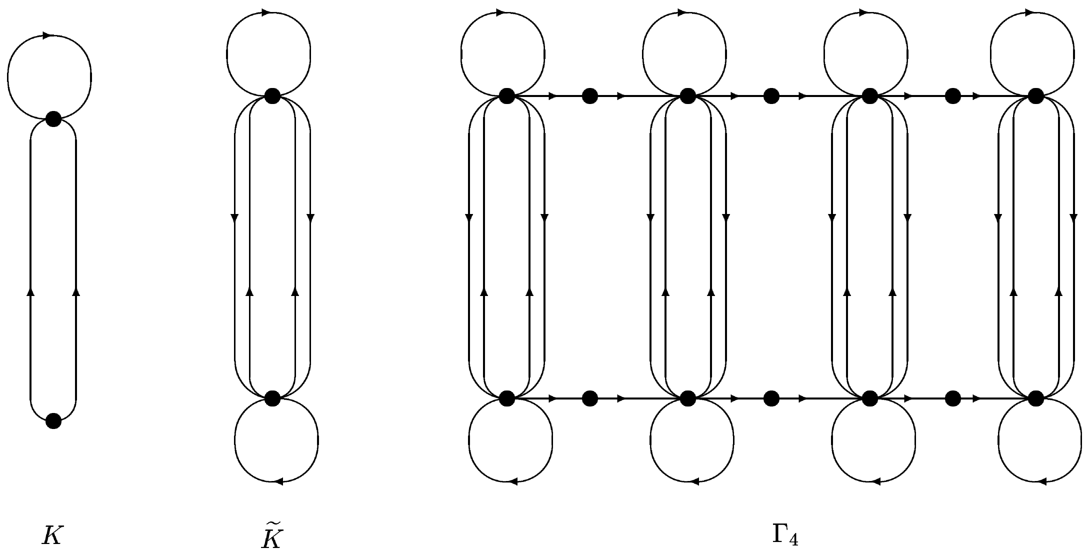


Рис. 1

Опять $\Upsilon_{\mathrm{v}}(K,\Gamma_m) = m$, поскольку чтобы избавиться от запрещённых подграфов K достаточно удалить по одной вершине из каждой копии графа $\widetilde{K}$ (здесь мы пользуемся тем, что граф K не имеет висячих рёбер, и число N выбрано достаточно большим). А $\Upsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma_m) = mk$, поскольку на вершинах каждой (фиксированной) копии графа $\widetilde{K}$ группа автоморфизмов графа Γ_m действует транзитивно.

Осталось показать, что никакой несвязный граф K не является дорогим. Мы докажем чуть больше:

$$\Upsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma) \leqslant k_1(\Upsilon_{\mathrm{v}}(K,\Gamma) + k_2),$$

если $K = K_1 \sqcup K_2$ где k_1 — число вершин в K_1, а $k_2 \leqslant k_1$ — число вершин в K_2.

Отметим $\Upsilon_{\rm v}(K,\Gamma)$ вершин в графе Γ так, чтобы каждый подграф, изоморфный графу $K = K_1 \sqcup K_2$, имел отмеченную вершину. Если теперь в Γ найдётся подграф $\widehat{K}_2 \simeq K_2$, без отмеченных вершин, то он обязан пересекать каждый подграф в Γ, изоморфный графу K_1 и не имеющий отмеченных вершин. Следовательно, отметив ещё все вершины графа $\widehat{K}_2$, мы добьёмся того, что всякий подграф графа Γ, изоморфный K_1, имеет отмеченную вершину. Таким образом, $\Upsilon_{\rm v}(K_1,\Gamma) \leqslant \Upsilon_{\rm v}(K,\Gamma) + k_2$ и

$$\Upsilon_{\rm v}^{\rm sym}(K,\Gamma) \leqslant \Upsilon_{\rm v}^{\rm sym}(K_1,\Gamma) \leqslant k_1\Upsilon_{\rm v}(K_1,\Gamma) \leqslant k_1(\Upsilon_{\rm v}(K,\Gamma) + k_2) \text{ (где предпоследнее неравенство есть следствие 1),}$$

что и требовалось. Если же в Γ нет подграфов, изоморфных K_2, без отмеченных вершин, то мы получаем неравенство $\Upsilon_{\rm v}(K_2,\Gamma) \leqslant \Upsilon_{\rm v}(K,\Gamma)$ (которое на самом деле является равенством) и

$$\Upsilon_{\rm v}^{\rm sym}(K,\Gamma) \leqslant \Upsilon_{\rm v}^{\rm sym}(K_2,\Gamma) \leqslant k_2\Upsilon_{\rm v}(K_2,\Gamma) \leqslant k_2\Upsilon_{\rm v}(K,\Gamma) \leqslant k_1\Upsilon_{\rm v}(K,\Gamma) < k_1(\Upsilon_{\rm v}(K,\Gamma) + k_2),$$

что и требовалось. Это завершает доказательство.

Вопрос 1. *Верно ли, что любой конечный связный граф является дорогим в классе связных графов?*

Согласно теореме 1, все конечные связные графы без вершин степени один являются дорогими в классе связных графов. Цепи также являются дорогими в классе связных графов; в качестве Γ_m можно взять в этом случае многоугольники.

Четырёхвершинные графы *треугольник с хвостиком* и *лапа*, изображённые на рисунке 2 слева, также являются дорогими в классе связных графов; соответствующие графы Γ_m устроены так, как показано на рисунке 2 справа. Точнее говоря, на этом рисунке изображён бесконечный вершинно транзитивный граф, в котором отмечена каждая четвёртая вершина таким образом, чтобы каждый треугольник с хвостиком и каждая лапа имели отмеченную вершину; поскольку полученный узор на плоскости является дважды периодическим, мы можем из него получить сколь угодно большие конечные узоры на торе с тем же свойством (то есть вершинно транзитивные графы, в которых четверть вершин отмечены таким образом, что каждый треугольник с хвостиком и каждая лапа имеет отмеченную вершину).

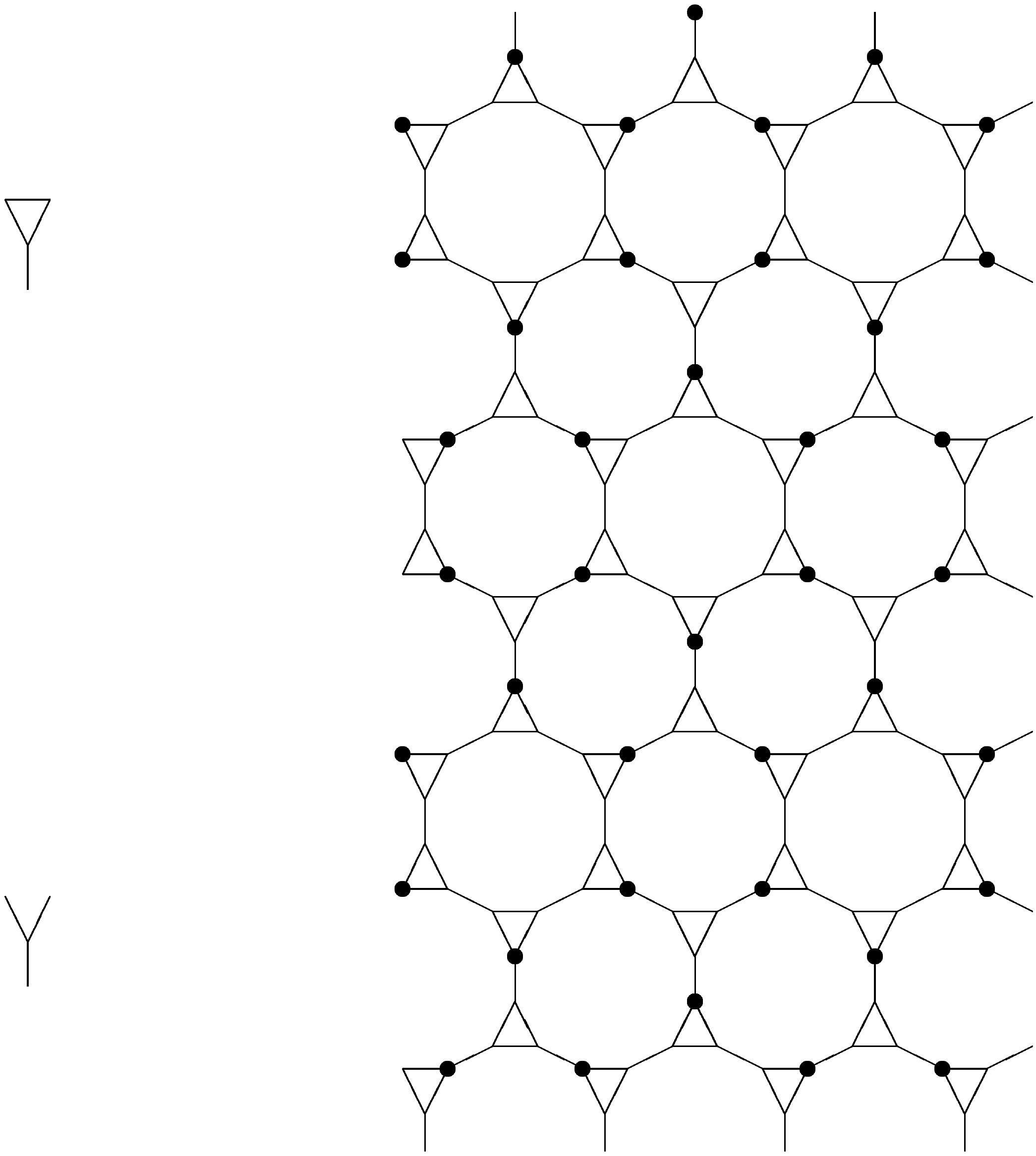


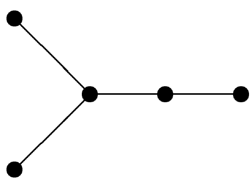
Рис. 2

Таким образом,

все связные графы, имеющие не более четырёх вершин, являются дорогими в классе связных графов.

(Строго говоря, рисунок 2 доказывает это утверждение лишь в случае, когда слово *граф* понимается как неориентированный граф без петель и кратных рёбер; но очевидная модификация этого рисунка позволяет доказать утверждение и в других случаях.)

Тем не менее мы полагаем, что ответ на вопрос 1 отрицательный, причём контрпримером вероятно служит пятивершинный граф D_5, изображённый на рисунке 3 (то есть гипотетически $\Upsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{sym}}(D_5,\Gamma) < 5\Upsilon_{\mathrm{v}}(D_5,\Gamma)$ для любого связного графа Γ с достаточно большой представительностью $\Upsilon_{\mathrm{v}}(D_5,\Gamma)$).



D_5

Рис. 3

Частичным подтверждением этой гипотезы является следующий факт.

Теорема 2. *Граф D_5 не является дорогим в классе вершинно транзитивных связных графов. Более точно, если $\Gamma \supseteq D_5$ — вершинно транзитивный неориентированный связный граф, имеющий больше пяти вершин, и представительность $\Upsilon_{\mathrm{v}}(D_5, \Gamma)$ конечна, то $\Upsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{sym}}(D_5, \Gamma) < 5\Upsilon_{\mathrm{v}}(D_5, \Gamma)$.*

(Граф Γ называется *вершинно транзитивным*, если группа его автоморфизмов действует транзитивно на множестве вершин, то есть для любых двух вершин u и v существует автоморфизм φ графа такой, что $\varphi(u) = v$.)

Доказательство. Сперва заметим, что мы можем (и будем) считать, что в графе Γ нет петель и кратных рёбер. Действительно, если убрать в графе Γ все петли, а все кратные рёбра заменить на одно ребро, то условия теоремы останутся выполненными, а из утверждение теоремы для полученного графа будет следовать и утверждение для исходного графа.

Заметим ещё, что граф Γ обязан быть конечным, поскольку по следствию 1 конечность величины $\Upsilon_{\mathrm{v}}(D_5, \Gamma)$ влечёт конечность величины $\Upsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{sym}}(D_5, \Gamma)$, которая равна числу вершин графа в силу транзитивности.

Пусть степень каждой вершины графа Γ равна $k \geqslant 3$ (если $k < 3$, то доказывать нечего). Пусть в Γ выделено некоторое конечное множество вершин X (где $|X| = \Upsilon_{\mathrm{v}}(D_5, \Gamma)$) таким образом, что каждый подграф, изоморфный графу D_5, содержит выделенную вершину. Это означает, что граф Γ', полученный из Γ удалением всех выделенных вершин и инцидентных им рёбер не содержит подграфов, изоморфных D_5. Классифицировать такие графы несложно.

Лемма 1. *Конечный связный неориентированный граф без петель и кратных рёбер, не содержащий подграфов, изоморфных D_5 является*
- *либо l-угольником (циклом) (с $l \geqslant 3$);*
- *либо цепью (с $l \geqslant 0$ рёбрами);*
- *либо звездой $K_{1,l}$ (с $l \geqslant 3$ рёбрами);*
- *либо связным четырёхвершинным графом.*

На рисунке 4 изображены представители трёх бесконечных серий, а на рисунке 5 — три оставшихся четырёхвершинных графа (на чёрные вершины и инцидентные им рёбра пока не надо обращать внимание).

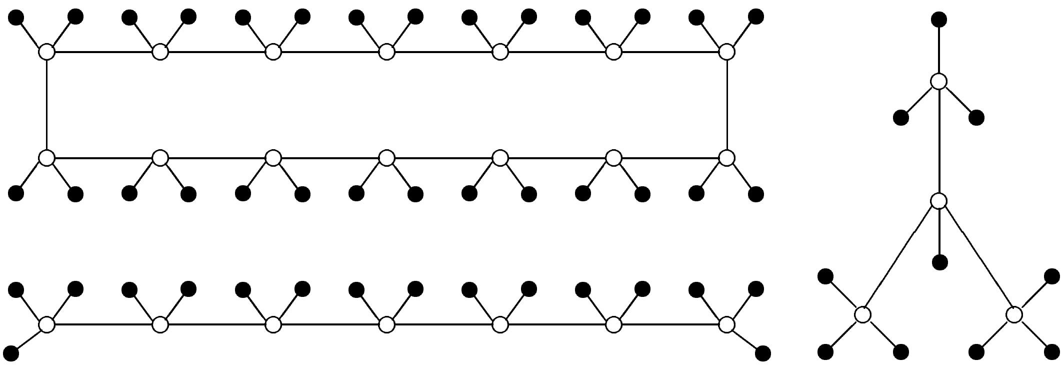


Рис. 4

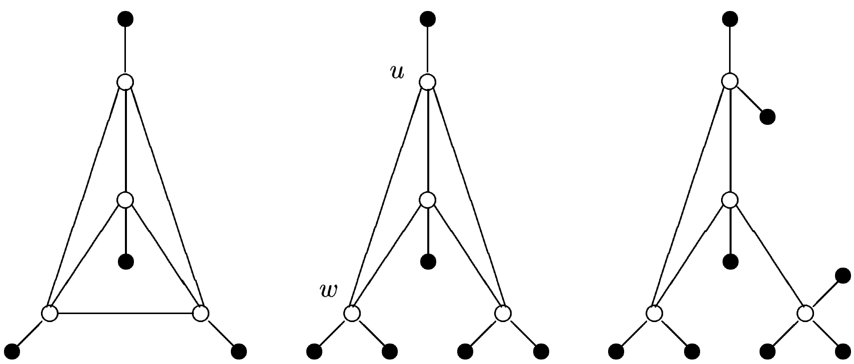


Рис. 5

Доказательство. Если связный конечный граф не содержит вершин степени больше двух, то это либо многоугольник, либо цепь. Если же имеется вершина v степени три или больше, то соседние с ней вершины могут быть соединены рёбрами только между собой (и ещё с v), поскольку иначе мы получаем D_5 в качестве подграфа. Таким образом, все вершины нашего графа, кроме v, являются соседними с v (в силу связности).

Если никакие из соседних с v вершины не соединены ребром, то наш граф — звезда.

Если же некоторое ребро соединяет две соседние с v вершины u и w, то, кроме v, u и w может только одна ещё вершина быть, поскольку иначе мы опять получим подграф D_5. Таким образом, наш граф не более четырёх вершин содержит, что завершает доказательство леммы.

Продолжим доказательство теоремы. Посчитаем теперь число p рёбер, соединяющих выделенные вершины с невыделенными. С одной стороны, $p \leqslant k|X|$ (поскольку каждая выделенная вершина имеет степень k), причём равенство достигается лишь в случае, когда никакие две выделенные вершины не соединены ребром. А с другой стороны, $p \geqslant (k-3)|Z|$, где Z — множество невыделенных вершин, поскольку на каждую невыделенную вершину, находящуюся в компоненте графа Γ' приходится в среднем не менее $(k-3)$-х рёбер, соединяющих эту компоненту с выделенными вершинами (смотрите рисунки 4 и 5, на которых выделенные вершины чёрные и $k=4$), причём равенство достигается только на компоненте, представляющей собой полный граф на четырёх вершинах.
Отсюда получаем: $k|X| \geqslant p \geqslant (k-3)|Z|$, то есть $|X| \geqslant (1-\frac{3}{k})|Z|$. Это означает, что
1) либо $|X| > \frac{1}{4}|Z|$,
2) либо $k=3$,
3) либо $k=4$ и $|X| = \frac{1}{4}|Z|$, причём, как было отмечено, это равенство возможно лишь в случае, когда все компоненты графа Γ' представляют собой полные графы на четырёх вершинах, и никакие две выделенные вершины графа Γ не соединены ребром.

Рассмотрим эти случаи.
1) В этом случае мы имеем $\Upsilon_{\mathrm{v}}^{\mathrm{sym}}(D_5,\Gamma) \leqslant$ (число вершин графа Γ) $= |X|+|Z| < |X|+4|X| = 5|X| = 5\Upsilon_{\mathrm{v}}(D_5,\Gamma)$, что и требовалось.
2) В этом случае никакая компонента графа Γ' не может быть полным графом на четырёх вершинах, изображённом на рисунке 5 слева (поскольку степень каждой вершины графа Γ равна трём). Никакая компонента графа Γ' не может быть также *ромбом*, изображённом на рисунке 5 в центре; действительно, окрестность вершины u (в графе Γ) в этом случае представляет собой цепочку, а окрестность вершины w — несвязный граф; в вершинно транзитивном графе это невозможно. Под *окрестностью* вершины v мы понимаем граф, состоящий из вершин соседних с v и всех рёбер их соединяющих. Обратите внимание, что в рассматриваемом случае степень каждой вершины три (а не четыре, как на рисунке 5).
   Таким образом, рассуждение, приведшее нас к неравенству $k|X| \geqslant (k-3)|Z|$, модифицируется следующим образом. На каждую невыделенную вершину, находящуюся в компоненте графа Γ' приходится в среднем не менее одного ребра, соединяющего эту компоненту с выделенными вершинами (равенство достигается на компонентах, изображённых на рисунке 5 справа, и на циклах, рисунок 4). Отсюда получаем $3|X| \geqslant |Z|$ и приходим к случаю 1).
3) Окрестность отмеченной вершины должна быть по условию несвязным объединением нескольких клик (состоящих из неотмеченных вершин). В силу транзитивности окрестность неотмеченной вершины должна иметь такой же вид. Поскольку окрестность неотмеченной вершины обязана содержать треугольник, состоящий из неотмеченных вершин, мы приходим к выводу, что
   а) либо окрестность каждой вершины представляет собой полный граф на четырёх вершинах,
   б) либо не существует треугольника, содержащего отмеченную вершину.

   В первом случае понятно, что граф Γ представляет собой полный граф с пятью вершинами и всё доказано. А случай б) очевидно невозможен в вершинно транзитивном графе, содержащем клики порядка четыре.

2. Рёберная представительность

Назовём *рёберной представительностью* $\Upsilon_{\mathrm{e}}(K,\Gamma)$ графа K в графе Γ минимальное число n такое, что в графе Γ найдётся множество рёбер X мощности n, удовлетворяющее следующему условию:

$$\textit{каждый подграф графа } \Gamma\textit{, изоморфный } K\textit{, содержит ребро из } X. \qquad (***)$$

Аналогичным образом определим *симметричную рёберную представительность* $\Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma)$ графа K в графе Γ как минимальное число n такое, что в графе Γ найдётся инвариантное в классе всех автоморфизмов множество рёбер X мощности n с условием $(***)$.

Ясно, что $\Upsilon_{\mathrm{e}}(K,\Gamma) \leqslant \Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma)$. Следствие 1 говорит, что $\Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma) \leqslant \Upsilon_{\mathrm{e}}(K,\Gamma)\cdot$(число рёбер графа K).

Граф K будем называть *дорогим в смысле симметричной рёберной представительности* или просто *рёберно дорогим*, если

$$\forall m \in \mathbb{Z} \text{ найдётся граф } \Gamma_m \text{ такой, что } \Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma_m) = \Upsilon_{\mathrm{e}}(K,\Gamma_m)\cdot(\text{число рёбер графа } K) \geqslant m. \qquad (****)$$

Таким образом, граф K рёберно дорогой, если оценка из следствия 1 (о рёбрах) не может быть улучшена для графа K. Назовём рёберно дорогой граф K *рёберно дорогим в классе графов* $\mathcal{K}$, если графы Γ_m в (****) могут выбраны из класса $\mathcal{K}$.

Утверждение 1. *Всякий конечный рёберно транзитивный связный граф K является рёберно дорогим в классе связных графов.*

Доказательство. Если граф K не имеет висячих рёбер (то есть не имеет вершин степени один), то мы можем поступить так же, как в вершинном случае. Возьмём в качестве графа Γ_m несвязное объединение m копий графа K. Покажем, что достигается нужная оценка. Действительно, чтобы избавиться от подграфов, изоморфных запрещенному, достаточно (и необходимо) удалить в каждой копии графа K одно ребро. Таким образом, $\Upsilon_{\mathrm{e}}(K, \Gamma_m) = m$. Но граф Γ_m является рёберно транзитивный, поэтому $\Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K, \Gamma_m) = mk$, где k — это число рёбер графа K. Это доказывает, что граф K рёберно дорогой (в классе всех графов).

Чтобы сделать граф Γ_m связным достаточно добавить к построенному графу Γ_m цепи длины N, соединяющие каждую вершину i-й копии графа K с соответствующей вершиной $(i+1)$-й копии графа K, где $i \in \{1, \ldots, m-1\}$, а число N (одинаковое для всех добавленных цепей) больше, чем число вершин графа K.

Опять $\Upsilon_{\mathrm{e}}(K, \Gamma_m) = m$, поскольку чтобы избавиться от подграфов, изоморфных K, достаточно удалить по одному ребру из каждой копии графа K (здесь мы пользуемся тем, что граф K не имеет висячих рёбер, и число N выбрано достаточно большим). А $\Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K, \Gamma_m) = mk$, поскольку на рёбрах каждой (фиксированной) копии графа K группа автоморфизмов графа Γ_m действует транзитивно.

Если же рёберно транзитивный связный граф K имеет висячие рёбра, то все рёбра висячие и граф K представляет собой звезду $K_{1,l}$.

Если при этом рёбра ориентированы, то они ориентированы «одинаково», то есть звезда $K = K_{1,l}$ имеет один источник и l стоков или наоборот. Считая, что имеется один источник, возьмём в качестве графа Γ_m полный двудольный граф $K_{m,l}$, в котором все рёбра направлены из первой доли (состоящей из m вершин) во вторую долю (состоящую из l вершин). Ясно, что $\Upsilon_{\mathrm{e}}(K, \Gamma_m) = m$ и $\Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K, \Gamma_m) = ml$ (поскольку граф Γ_m рёберно транзитивный).

Осталось рассмотреть случай, когда граф $K = K_{1,l}$ представляет собой неориентированную звезду.

Если l равно единице или двойке, то в качестве графа Γ_m можно взять цикл длины $2m$.

Если $l = 3$, то в качестве графа Γ_m можно взять «пчелиные соты». На рисунке 6 слева изображён бесконечный граф, в котором каждое третье ребро помечено (вертикальные рёбра на рисунке 6), и все подграфы, изоморфные лапе $K = K_{1,3}$, содержат помеченные рёбра.

Чтобы сделать этот граф конечным, нужно воспользоваться тем, что «пчелиные соты» — это дважды периодический узор на плоскости, поэтому из него можно сделать сколь угодно большой конечный граф на торе с теми же свойствами (то есть рёберно транзитивный граф, в котором каждое третье ребро помечено, и все лапы содержат помеченные рёбра).

Если же $l > 3$, то мы можем поступить так, как показано на рисунке 6 справа: Γ_m состоит из m копий звезды K, соединённых рёбрами; $\Upsilon_{\mathrm{e}}(K, \Gamma_m) = m$ и $\Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K, \Gamma_m) = ml$. Это завершает доказательство.

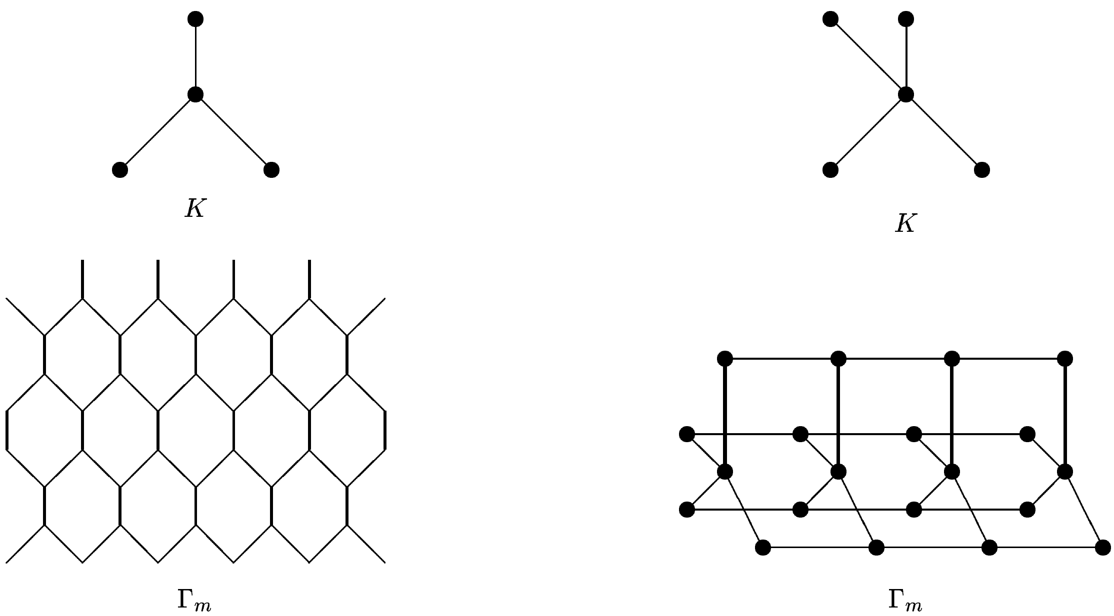
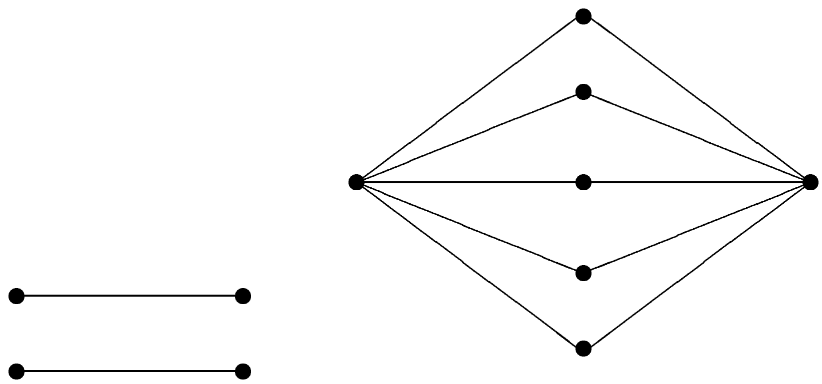


Рис. 6

Полный аналог теоремы 1 тут неверен:

> *существуют несвязные рёберно дорогие графы и даже несвязные графы, рёберно дорогие в классе связных графов.*

Действительно, если взять в качестве K несвязное объединение двух рёбер, а в качестве Γ — полный двудольный граф $K_{2,m}$, то $\Upsilon_{\mathrm{e}}(K,\Gamma) = m$ (поскольку, чтобы избавиться от подграфов, изоморфных K, достаточно удалить все рёбра, инцидентные одной из вершин степени m, смотрите рисунок 7), а $\Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma) = 2m$ (поскольку граф рёберно транзитивный).



K $\qquad\qquad$ $\Gamma = K_{2,m}$

Рис. 7

Существуют ли вообще не рёберно дорогие графы? Да, но у нас есть только тривиальные примеры: если слово «граф» понимать как ориентированный граф, в котором петли разрешены, а кратные рёбра запрещены, то граф K, изображённый на рисунке 8 не будет рёберно дорогим по очевидным причинам: общее ребро двух подграфов такого вида в произвольном графе Γ обязано быть петлёй, поэтому $\Upsilon_{\mathrm{e}}^{\mathrm{sym}}(K,\Gamma) = \Upsilon_{\mathrm{e}}(K,\Gamma)$ (поскольку, если мы хотим избавиться от подграфов такого вида, нам выгоднее удалять только петли).

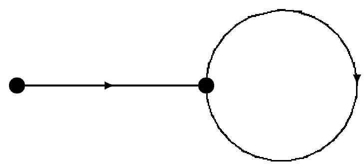


Рис. 8

Мы не знаем, например, ответ на следующий вопрос.

Вопрос 2. *Пусть слово граф понимается, как неориентированный граф без петель и кратных рёбер. Существует ли конечный не рёберно дорогой граф? Может ли такой граф быть связным? Существует ли конечный граф, не рёберно дорогой в классе связных графов? Может ли такой граф быть связным?*

Если слово *граф* понимать, как ориентированный граф без петель и кратных рёбер, ответов на аналогичные вопросы мы тоже не знаем. В общем, по поводу рёберной дороговизны у нас больше вопросов, чем ответов.

3. Доказательство основной теоремы

Положим $m = \max\limits_{F\in\mathcal{F}} |F|$ и рассмотрим следующее множество $Y = \left\{y \in U \;\middle|\; |Gy \cap X| \geqslant \frac{1}{m}|Gy|\right\}$ (в частности, Y не содержит точек с бесконечной орбитой). Ясно, что это множество G-инвариантно. Ясно также, что $|Y| \leqslant m|X|$ (поскольку для каждой орбиты Gu имеет место неравенство $|Gu \cap Y| \leqslant m|Gu \cap X|$).

Осталось показать, что Y является системой представителей для $\mathcal{F}$. Возьмём какое-то множество $F \in \mathcal{F}$. Каждое множество gF (где $g \in G$) принадлежит $\mathcal{F}$ в силу инвариантности семейства $\mathcal{F}$ и, следовательно, пересекается с X. Значит,

$$G = \bigcup_{f\in F} \{g \in G \mid gf \in X\}.$$

Каждое из множеств $\{g \in G \mid gf \in X\}$ является либо пустым, либо объединением конечного числа левых смежных классов группы G по стабилизатору $\mathrm{St}(f)$ точки f:

$$\{g \in G \mid gf \in X\} = \bigcup_{x \in X} \{g \in G \mid gf = x\} = \bigcup_{x \in X \cap Gf} g_x \cdot \mathrm{St}(f), \quad \text{где } g_x \in G \text{ фиксированы так, что } g_x f = x.$$

Таким образом, мы получили разложение группы G в конечное объединение левых смежных классов по некоторым подгруппам. Воспользуемся теперь теоремой Б. Неймана [Neu54] (утверждение 4.5):

если группа G покрывается конечным числом смежных классов по некоторым (необязательно разным) подгруппам: $G = g_1 G_1 \cup \ldots \cup g_s G_s$, то $\sum \frac{1}{|G : G_i|} \geqslant 1$ (где обратный к бесконечному кардиналу считается нулём).

Следовательно, (учитывая то, что индекс стабилизатора равен длине орбиты) мы получаем

$$1 \leqslant \sum_{f \in F} \frac{1}{|G : \mathrm{St}(f)|} \cdot |Gf \cap X| = \sum_{f \in F} \frac{|Gf \cap X|}{|Gf|}.$$

Поскольку число слагаемых в этой сумме равно $|F| \leqslant m$, по крайней мере одно из слагаемых должно быть не меньше чем $1/m$, то есть $|Gf \cap X|/|Gf| \geqslant 1/m$, что означает $f \in Y$ (по определению множества Y) и завершает доказательство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Вд00] Е. П. Вдовин, Большие нормальные нильпотентные подгруппы конечных групп, Сибирский математический журнал, 41:2 (2000), 304-310.

[КаМ82] М. И. Каргаполов, Ю. И. Мерзляков, Основы теории групп. М.: Наука, 1982.

[КлМе09] Ант. А. Клячко, Ю. Б. Мельникова, Короткое доказательство теоремы Макаренко–Хухро о больших характеристических подгруппах с тождеством, Мат. сборник, 200:5 (2009), 33-36. См. также arXiv:0805.2747.

[BrNa04] B. Bruno, F. Napolitani, A note on nilpotent-by-Černikov groups, Glasgow Math. J., 46 (2004), 211-215.

[ChD89] A. Chermak, A. Delgado, A measuring argument for finite group. Proc. Amer. Math. Soc., 107 (1989), 907-914.

[dGT18a] F. de Giovanni, M. Trombetti, A note on large characteristic subgroups. Communications in Algebra, 46:11 (2018), 4654-4662.

[dGT18b] F. de Giovanni, M. Trombetti, Large characteristic subgroups with modular subgroup lattice, Archiv der Mathematik, 111:2 (2018), 123-128.

[dGT19a] F. de Giovanni, M. Trombetti, Large characteristic subgroups in which normality is a transitive relation, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 30 (2019), 255-268.

[dGT19b] F. de Giovanni, M. Trombetti, Large characteristic subgroups and abstract group classes, Quaestiones Mathematicae (to appear).

[Fr18] E. Frolova, Khukhro-Makarenko type theorems for algebras, arXiv:1804.00268.

[Is08] I. M. Isaacs, Finite group theory, GSM 92, American Math. Soc., Providence RI, 2008.

[KhM07a] E. I. Khukhro, N. Yu. Makarenko, Large characteristic subgroups satisfying multilinear commutator identities, J. London Math. Soc., 75:3 (2007), 635-646.

[KhM07b] E. I. Khukhro, N. Yu. Makarenko, Characteristic nilpotent subgroups of bounded co-rank and automorphically-invariant ideals of bounded codimension in Lie algebras, Quart. J. Math., 58 (2007), 229-247.

[KhM08] E. I. Khukhro, N. Yu. Makarenko, Automorphically-invariant ideals satisfying multilinear identities, and group-theoretic applications, J. Algebra, 320:4 (2008), 1723–1740.

[KhKMM09] E. I. Khukhro, Ant. A. Klyachko, N. Yu. Makarenko, and Yu. B. Melnikova Automorphism invariance and identities. Bull. London Math. Soc. (2009), 41(5): 804-816. См. также arXiv:0812.1359.

[KlMi15] A. A. Klyachko, M. V. Milentyeva, Large and symmetric: The Khukhro-Makarenko theorem on laws — without laws, J. Algebra, 424 (2015), 222-241. См. также arXiv:1309.0571.

[MSh12] N. Yu. Makarenko, P. Shumyatsky, Characteristic subgroups in locally finite groups, J. Algebra, 352:1 (2012), 354-360.

[Neu54] B. H. Neumann, Groups covered by permutable subsets, J. London Math. Soc., s1-29:2 (1954), 236-248.

[PSz02] K. Podoski, B. Szegedy, Bounds in groups with finite abelian coverings or with finite derived groups, J. Group Theory, 5:4 (2002), 443-452.