УДК 512.543.52+512.543.14+512.544.23 MSC: 20E06, 20E08, 20E15, 05C25

АНАЛОГ УСИЛЕННОЙ ГИПОТЕЗЫ ХАННЫ НЕЙМАН В ПОЧТИ СВОБОДНЫХ ГРУППАХ И ПОЧТИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

Александр О. Захаров[♯] Антон А. Клячко[♭]

[♯] *Instytut Matematyczny, Uniwersytet Wrocławski, pl. Grunwaldzki 2/4, 50-384, Wrocław*
alexander.zakharov@uwr.edu.pl

[♭] *Механико-математический факультет Московского государственного университета*
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ.
Московский центр фундаментальной и прикладной математики
klyachko@mech.math.msu.su

Теорема Минеева–Фридмана, ранее известная как (усиленная) гипотеза Ханны Нейман, даёт неулучшаемую оценку для ранга пересечения двух подгрупп свободной группы. Мы получаем аналог этого неравенства, применимый к двум произвольным подгруппам почти свободной группы (или, более общо, группы, содержащей свободное произведение левоупорядочиваемых групп в качестве подгруппы конечного индекса).

0. Введение

Гипотеза Ханны Нейман (1957), доказанная независимо Минеевым и Фридманом представляет собой следующий факт.

Теорема Минеева–Фридмана [Mi12a], [Mi12b], [Fr14]**.** *Для любых нетривиальных подгрупп A и B свободной группы F*

$$\mathrm{rank}(A\cap B)-1 \leqslant (\mathrm{rank}(A)-1)\cdot(\mathrm{rank}(B)-1); \qquad \textit{(классическая гипотеза Ханны Нейман)}$$

более того, для любой системы представителей S двойных смежных смежных классов AsB в F

$$\sum_{s\in S}\overline{\mathrm{rank}}(A\cap sBs^{-1}) \leqslant \overline{\mathrm{rank}}(A)\cdot\overline{\mathrm{rank}}(B), \qquad \textit{(усиленная гипотеза Ханны Нейман)}$$

где $\overline{\mathrm{rank}}(H) \overset{\text{опр}}{=} \max(0,\ \mathrm{rank}(H)-1)$ — *это приведённый ранг свободной группы H.*

Альтернативные доказательства и обобщения этого результата можно найти, например, в [D12], [AMS14], [Za14], [ASS15], [Hoc16], [HW16], [Iv17], [JZ17] и [KP20]. В частности, в [KP20] был доказан следующий аналог классической гипотезы Ханны Нейман для свободных подгрупп почти свободной группы:

для любых свободных подгрупп A и B почти свободной группы G, содержащей свободную подгруппу F конечного индекса

$$\overline{\mathrm{rank}}(A\cap B) \leqslant |G{:}F|\cdot\overline{\mathrm{rank}}(A)\cdot\overline{\mathrm{rank}}(B).$$

Эта оценка усилила ранее известные неравенства [Za14], [ASS15] (и является уже неулучшаемой). Мы обобщаем этот факт в двух направлениях:

- во-первых, мы получаем аналог у с и л е н н о й гипотезы Ханны Нейман;
- а во-вторых, наша оценка имеет смысл для п р о и з в о л ь н ы х подгрупп A и B почти свободной группы.

Теорема о пересечении подгрупп в почти свободных группах. *Для любых подгрупп A и B почти свободной группы G, содержащей свободную группу F в качестве подгруппы конечного индекса, и для любой системы представителей S двойных смежных смежных классов AsB в G*

$$\sum_{s\in S}\overline{\mathrm{rk}}(A\cap sBs^{-1}) \leqslant |G{:}F|\cdot\overline{\mathrm{rk}}(A)\cdot\overline{\mathrm{rk}}(B). \quad \textit{В частности, } \overline{\mathrm{rk}}(A\cap B) \leqslant |G{:}F|\cdot\overline{\mathrm{rk}}(A)\cdot\overline{\mathrm{rk}}(B).$$

Здесь $\overline{\mathrm{rk}}(H)$ — это *виртуальный приведённый ранг* почти свободной группы: $\overline{\mathrm{rk}}(H) \overset{\text{опр}}{=} \frac{1}{|H:K|}\cdot\max\bigl(0,\mathrm{rank}(K)-1\bigr)$, где K — свободная подгруппа конечного индекса в H. Нетрудно убедиться, что это определение к корректно (то есть не зависит от выбора свободной подгруппы K); и $\overline{\mathrm{rk}}(H)=\overline{\mathrm{rank}}(H)$, если группа H свободна. Отметим ещё, что виртуальный приведённый ранг почти свободной группы совпадает с её *ранговым градиентом* [La05].

На самом деле, сформулированная выше теорема о пересечении подгрупп в почти свободных группах является частным случаем более общей *основной теоремы* этой работы (смотрите следующий параграф), в которой речь идёт о пересечении подгрупп в почти свободных произведениях. В частности, наша основная теорема обобщает следующий известный аналог усиленной гипотезы Ханны Нейман.

Работа первого автора выполнена при поддержке *Narodowe Centrum Nauki*, grant UMO-2018/31/G/ST1/02681. Работа второго автора выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант № 22-11-00075.

Теорема AMS [AMS14] (см. также [Iv17]). *Для любых подгрупп A и B свободного произведения $G = \mathop{\ast}\limits_{i\in I} G_i$ левоупорядочиваемых групп G_i и для любой системы представителей S двойных смежных смежных классов AsB в G*

$$\sum_{s\in S} \overline{\mathrm{rank}}_{\mathrm{K}}(A\cap sBs^{-1}) \leqslant \overline{\mathrm{rank}}_{\mathrm{K}}(A)\cdot \overline{\mathrm{rank}}_{\mathrm{K}}(B). \quad \text{\textit{В частности}, } \overline{\mathrm{rank}}_{\mathrm{K}}(A\cap B) \leqslant \overline{\mathrm{rank}}_{\mathrm{K}}(A)\cdot \overline{\mathrm{rank}}_{\mathrm{K}}(B).$$

Здесь $\overline{\mathrm{rank}}_{\mathrm{K}}(H)$ — это *приведённый ранг Куроша* подгруппы $H \subseteq G = \mathop{\ast}\limits_{i\in I} G_i$, который определяется так: подгруппа H раскладывается (по теореме Куроша) в свободное произведение $H = \left(\mathop{\ast}\limits_{j\in J} H_j\right) * F$, где каждая подгруппа H_j нетривиальна и сопряжена подгруппе одной из G_i, а подгруппа F свободна и тривиально пересекается со всеми сопряжёнными к подгруппам G_i; тогда $\overline{\mathrm{rank}}_{\mathrm{K}}(H) \overset{\text{опр}}{=} \max(0,\ |J| + \mathrm{rank}(F) - 1)$.

Доказательство основной теоремы основано на подходе Минеева [Mi12b], но наши определения слегка отличаются, поэтому мы доказываем всё «с нуля» и, стало быть, эта статья содержит также очередное альтернативное (и более простое) доказательство теоремы Минеева–Фридмана. Главные отличия нашего рассуждения состоят в том, что при рассмотрении действий групп на лесах мы

- нигде не рассматриваем в явном виде факторграф по этому действию
- и нигде не требуем кокомпактности действия.

Это позволяет нам сказать, что наша основная теорема и все её следствия, сформулированные выше (включая теорему Минеева–Фридмана) являются, в некотором смысле, частными случаями совсем элементарной леммы о действиях групп на множествах (смотрите параграф 2).

Авторы благодарят анонимного рецензента за полезные замечания. Второй автор благодарят также фонд развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

1. Основная теорема

Если группа G содержит свободное произведение $F = \mathop{\ast}\limits_{i\in I} G_i$ бесконечных групп G_i в качестве подгруппы конечного индекса, то для любой подгруппы $H \subseteq G$ определён *виртуальный приведённый ранг Куроша* $\overline{\mathrm{rk}}(H)$ относительно семейства подгрупп G_i:

$$\overline{\mathrm{rk}}(H) \overset{\text{опр}}{=} \frac{\overline{\mathrm{rank}}_{\mathrm{K}}(K)}{|H{:}K|},$$

где K — подгруппа конечного индекса в H, содержащаяся в F, а $\overline{\mathrm{rank}}_{\mathrm{K}}(K)$ — это (обычный) приведённый ранг Куроша подгруппы K группы $F = \mathop{\ast}\limits_{i\in I} G_i$. Эта величина определена корректно, то есть не зависит от выбора подгруппы K (так как для ранга Куроша верен аналог формулы Шрайера [Ku83]), но не очень хорошо себя ведёт, поскольку не инвариантна относительно сопряжения, то есть числа $\overline{\mathrm{rk}}(H)$ и $\overline{\mathrm{rk}}(gHg^{-1})$ не обязаны совпадать. Чтобы исправить эту неприятность, определим *тотальный виртуальный приведённый ранг Куроша* $\overline{\mathbf{r}}(H)$ (относительно семейства групп $\{G_i \mid i \in I\}$) так: $\overline{\mathbf{r}}(H) = \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{\mathrm{rk}}(g_jHg_j^{-1})$, где $\overline{\mathrm{rk}}$ — это виртуальный приведённый ранг Куроша относительно данного семейства подгрупп, а $g_1, \dots, g_n$ суть представители правых смежных классов группы G по подгруппе F. Нетрудно сообразить, что эта величина уже инвариантна относительно сопряжения и не зависит от выбора представителей g_j. Отметим, что $\overline{\mathbf{r}}(H) = 0$ для конечной группы H.

Основная теорема. *Пусть группа G является почти свободным произведением левоупорядочиваемых групп, то есть G содержит в качестве подгруппы конечного индекса свободное произведение $F = \mathop{\ast}\limits_{i\in I} G_i$, где все группы G_i левоупорядочиваемы. Пусть A и B — это подгруппы в G, и пусть S — это множество представителей двойных смежных классов вида AgB в группе G. Тогда $\sum\limits_{s\in S} \overline{\mathbf{r}}(A\cap sBs^{-1}) \leqslant \overline{\mathbf{r}}(A)\cdot\overline{\mathbf{r}}(B)$, где $\overline{\mathbf{r}}(H)$ — это тотальный виртуальный приведённый ранг Куроша подгруппы $H \subseteq G$ (относительно семейства групп $\{G_i \mid i \in I\}$).*
В частности, $\overline{\mathbf{r}}(A\cap B) \leqslant \overline{\mathbf{r}}(A)\cdot\overline{\mathbf{r}}(B)$.

Это обобщает ранее известные результаты:

- в случае, когда $F = G$, наша теорема превращается в теорему AMS [AMS14] (а если при этом все G_i являются бесконечными циклическими, то мы получаем теорему Минеева–Фридмана, ранее известную, как усиленная гипотеза Ханны Нейман);
- а в случае, когда A и B являются свободными группами, тривиально пересекающими подгруппы, сопряжённые к свободным сомножителям G_i, утверждение «В частности» превращается в основной результат работы [KP20].

Чтобы вывести из основной теоремы теорему о пересечении подгрупп в почти свободных группах (смотрите введение), достаточно заметить, что виртуальный приведённый ранг $\overline{\mathrm{rk}}(H)$ почти свободной подгруппы $H \subseteq G$ совпадает с виртуальным приведённым рангом Куроша относительно любого семейства бесконечных циклических подгрупп, свободное произведение которых есть F. Поэтому все слагаемые в определении тотального виртуального ранга $\overline{\mathbf{r}}(H)$ равны (а их количество есть индекс подгруппы F), то есть $\overline{\mathbf{r}}(H) = |G{:}F| \cdot \overline{\mathrm{rk}}(H)$ в данном случае.

2. Действия

Следующую простую лемму нам (как ни странно) не удалось найти в литературе.

Лемма о пересечении орбит. *Пусть A и B — подгруппы группы G, свободно действующей на некотором множестве X, и D — множество представителей двойных смежных классов AgB. Тогда*

$$\sum_{d\in D} (\text{число } (A^d \cap B)\text{-орбит}) \leqslant (\text{число } A\text{-орбит}) \cdot (\text{число } B\text{-орбит}).$$

Более того, для любого A-инвариантного подмножества $Y \subseteq X$ и любого B-инвариантного подмножества $Z \subseteq X$

$$\sum_{d\in D} \Big(\text{число } (A^d \cap B)\text{-орбит в } (d^{-1} \circ Y) \cap Z\Big) \leqslant (\text{число } A\text{-орбит в } Y) \cdot (\text{число } B\text{-орбит в } Z).$$

Доказательство. Пусть $G \times X \xrightarrow{\circ} X$ — свободное действие, и X/H — это множество орбит действия подгруппы $H \subseteq G$. Рассмотрим отображение

$$\Phi\colon \Big\{(d,U) \mid d \in D,\ U \in \Big((d^{-1} \circ Y) \cap Z\Big)/(A^d \cap B)\Big\} \to Y/A \times Z/B, \quad \big(d,\ (A^d \cap B) \circ x\big) \mapsto (A \circ d \circ x,\ B \circ x).$$

Утверждение леммы немедленно вытекает из того, что это отображение
- корректно определено,
  то есть не зависит от выбора точки x в $(A^d \cap B)$-орбите (очевидно),
- и инъективно;
  действительно, $(A \circ d \circ x,\ B \circ x) = (A \circ d' \circ x',\ B \circ x')$ означает, что $d' \circ x' \in A \circ d \circ x$ и $x' \in B \circ x$, то есть $(d'B) \cap (Ad) \neq \varnothing$ (в силу свободности действия) и, значит, $d' = d$ (по определению множества D); а тогда, $x' \in (A^d \circ x) \cap (B \circ x) = (A^d \cap B) \circ x$, что и требовалось.

3. Действия на лесах

Все графы в этой статье считаются ориентированными. Пусть группа G действует на лесе Γ свободно на рёбрах (то есть стабилизатор каждого ребра тривиален). Множество E орбит рёбер графа Γ называется *максимальным существенным* если E является максимальным по включению множеством таким, что стабилизатор каждой компоненты леса $\Gamma \setminus \bigcup E$ (то есть каждая компонента леса, полученного из Γ удалением всех рёбер, лежащих во всех орбитах множества орбит E), не являющейся компонентой леса Γ, нетривиален. Отметим, что, на самом деле, стабилизатор компоненты леса Γ не может быть тривиальным, если число компонент конечно, а группа бесконечна (но мы не предполагаем, что эти условия выполнены по умолчанию).

Следующая лемма представляет собой простейший (и, вероятно, известный) факт о группах, действующих на деревьях

Лемма о ранге Куроша. *Группа G, действующая на дереве Γ свободно на рёбрах, раскладывается в свободное произведение: $G = F * \left(\mathop{\ast}\limits_{i\in I} G_i\right)$, где F — свободная группа, действующая на Γ свободно, а $G_i \neq \{1\}$ суть стабилизаторы некоторых вершин; при этом, если ранг Куроша этого разложения конечен (то есть $\mathrm{rank}(F) + |I| < \infty$), то мощность каждого максимального существенного множества E равна приведённому рангу Куроша этого разложения: $|E| = \max(0,\ \mathrm{rank}(F) + |I| - 1)$.*

Набросок доказательства. Первое утверждение хорошо известно. Чтобы доказать второе утверждение, для каждого ребра e рассмотрим компоненты связности X и Y леса $\Gamma \setminus (G \circ e)$, соединённые ребром e. Из леммы о пинг-понге сразу следует, что

$$G = \begin{cases} \mathrm{St}(X) * \langle g\rangle_\infty\,, & \text{если } g \circ X = Y \text{ для некоторого } g \in G \text{ (который обязан действовать свободно на } \Gamma\text{);} \\ \mathrm{St}(X) * \mathrm{St}(Y), & \text{если } g \circ X \neq Y \text{ ни для какого } g \in G. \end{cases}$$

Очевидная индукция завершает доказательство (так как ранг Куроша конечен). Эта лемма можно также вывести из [AMS14] (теорема 2.4, используя рассуждения из предложения 3.4).

Нас будет интересовать обобщение этой простой леммы на случай, когда граф Γ является лесом, состоящим из конечного числа деревьев: $\Gamma = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_n$. В этом случае у группы G есть смысл рассматривать *виртуальный приведённый ранг Куроша*, который определяется естественным образом: выберем в группе G подгруппу H конечного индекса, которая стабилизирует дерево T_j и, следовательно, раскладывается в свободное произведение $H = F * \left(\mathop{\ast}\limits_{i \in I} G_i \right)$, где F — свободная группа, действующая на T_j свободно, а $G_i \neq \{1\}$ суть стабилизаторы некоторых вершин дерева T_j; приведённый ранг Куроша этой подгруппы (относительно данного действия на T_j) тогда определяется как $\overline{\mathrm{rk}}(H) \overset{\text{опр}}{=} \max(0,\ \mathrm{rank}(F) + |I| - 1)$, а виртуальный приведённый ранг Куроша группы G (относительно данного действия на Γ и данной компоненты T_j леса Γ) естественно определить так: $\overline{\mathrm{rk}}_j(G) \overset{\text{опр}}{=} \frac{1}{|G:H|} \cdot \overline{\mathrm{rk}}(H)$. Нетрудно сообразить, что эта величина не зависит от выбора подгруппы H (если нетривиальные стабилизаторы вершин бесконечны), но может зависеть от j. *Тотальным приведённым виртуальным рангом Куроша* этого действия мы назовём величину $\sum\limits_j \overline{\mathrm{rk}}_j(G)$.

Лемма о виртуальном ранге Куроша. *Пусть группа G действует свободно на рёбрах на лесе $\Gamma = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_n$, состоящем из деревьев T_j, и стабилизатор каждого дерева T_j имеет конечный ранг Куроша (относительно действия на T_j), а нетривиальные стабилизаторы вершин бесконечны. Тогда $|E| = \sum\limits_{j=1}^{n} \overline{\mathrm{rk}}_j(G)$ для каждого максимального существенного множества E.*

Доказательство. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \sqcup \ldots \sqcup \Gamma_k$ и на каждом G-инвариантном лесе Γ_i, действие группы G транзитивно на компонентах (то есть для любых компонент $T_l, T_m \subseteq \Gamma_i$ существует $g \in G$ такой, что $g \circ T_l = T_m$). Тогда $E = E_1 \sqcup \ldots \sqcup E_k$, где $E_i = \{G \circ e \in E \mid G \circ e \subseteq \Gamma_i\}$ — это максимальное существенное множество орбит рёбер леса Γ_i. Поэтому утверждение достаточно доказать для случая, когда действие группы G на лесе Γ транзитивно на деревьях этого леса.

А в этом случае все стабилизаторы $H_j = \mathrm{St}(T_j)$ деревьев T_j сопряжены, а значит, изоморфны и действуют на своих деревьях одинаково. В частности, $\overline{\mathrm{rk}}(H_j)$ не зависит от j. Кроме того, $|G{:}H_j| = n$ для всех j (так как длина орбиты равна индексу стабилизатора). Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{\mathrm{rk}}_j(G) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{|G{:}H_j|} \cdot \overline{\mathrm{rk}}(H_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \overline{\mathrm{rk}}(H_1) = \overline{\mathrm{rk}}(H_1).$$

С другой стороны, множество H_1-орбит рёбер $E' = \{G \circ e \cap T_1 \mid G \circ e \in E\}$ является, очевидно, максимальным существенным относительно действия группы H_1 на T_1. Поэтому $|E| = |E'| = \overline{\mathrm{rk}}(H_1)$ (последнее равенство следует из леммы о ранге Куроша). Это завершает доказательство.

4. Действия на упорядоченных лесах

Мы говорим, что граф *упорядочен*, если на множестве его рёбер зафиксирован частичный порядок, ограничение которого на каждую компоненту связности является линейным порядком.

Лемма об индуцированном действии [KP20]. *Пусть группа G обладает подгруппой F конечного индекса n, которая действует на некотором упорядоченном дереве T, сохраняя порядок. Тогда G способна сохраняя порядок действовать на упорядоченном лесе, состоящем из n деревьев, причём стабилизаторы вершин и рёбер при этом действии будут сопряжены стабилизаторам вершин и рёбер при исходном действии F на T.*

Доказательство. Пусть $S \ni 1$ — система представителей левых смежных классов G по F (то есть $|S| = n$). Таким образом, каждый элемент $g \in G$ однозначно раскладывается в произведение $g = \mathbf{s}(g)\mathbf{f}(g)$ элемента $\mathbf{s}(g) \in S$ и элемента $\mathbf{f}(g) \in F$.

Возьмём упорядоченный лес $L = \bigcup\limits_{s \in S} sT$, состоящий из n копий sT упорядоченного дерева T (считая, что рёбра из разных копий несравнимы) и рассмотрим обычное индуцированное действие группы G на лесе L: $g \circ st \overset{\text{опр}}{=} \mathbf{s}(gs)\Big(\mathbf{f}(gs) \circ t\Big)$. Ясно, что это действие удовлетворяет всем требованиям, что и доказывает лемму.

Ребро e упорядоченного леса, на котором действует некоторая группа H, сохраняя порядок, мы называем *важным* (или *H-важным*), если оно является максимальным ребром на некоторой прямой $T(e)$, пересекающей лишь конечное число H-орбит рёбер. Отметим, что при $K \subseteq H$ любое K-важное ребро H-важно.

Лемма о важных рёбрах. *Пусть группа G действует на упорядоченном лесе T сохраняя порядок и свободно на рёбрах. Тогда*

– *множество $\mathcal{E}$ орбит важных рёбер содержит некоторое максимальное существенное множество;*

– *каждое конечное подмножество $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ содержится в некотором максимальном существенном множестве.*

В частности, тотальный приведённый виртуальный ранг Куроша этого действия

– *равен $|\mathcal{E}|$, если $|\mathcal{E}| < \infty$,*

– *бесконечен, если множество $\mathcal{E}$ бесконечно.*

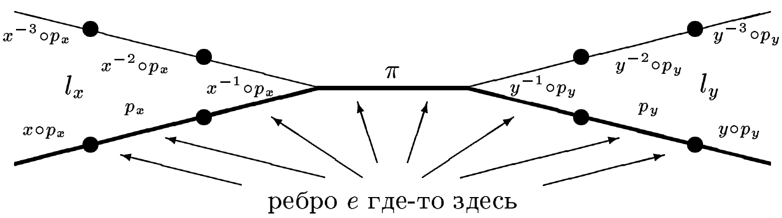
Доказательство. Утверждение «В частности» вытекает из основного утверждения по лемме о ранге Куроша. Остаётся доказать основное утверждение. Возьмём произвольное конечное подмножество $\mathcal{E}'$ множества $\mathcal{E}$ и положим $E = \bigcup \mathcal{E}$ и $E' = \bigcup \mathcal{E}'$ (то есть $e \in E$ тогда и только тогда, когда $G \circ e \in \mathcal{E}$; и аналогично $e \in E'$ тогда и только тогда, когда $G \circ e \in \mathcal{E}'$; таким образом, E и E' суть множества рёбер, а $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}'$ — множества орбит рёбер). Надо доказать две вещи:

1) стабилизатор $\mathrm{St}(K)$ каждой компоненты K леса $T \setminus E$ имеет в K либо неподвижную точку, либо инвариантную прямую;
2) но при этом стабилизатор каждой компоненты K леса $T \setminus E'$ нетривиален, если в T существует важное ребро $e \in E'$, инцидентное вершине из K.

И то, и другое доказывается легко.

1) Если свойство 1) не выполнено, то стабилизатор компоненты K графа $T \setminus E$ содержит свободную подгруппу ранга два $F(x, y) \subseteq \mathrm{St}(K)$, действующую свободно на K (поскольку каждая недиэдральная группа, нетривиальным образом раскладывающаяся в свободное произведение содержит свободную подгруппу, тривиально пересекающую свободные сомножители, а группа G из условия теоремы не может быть диэдральной, так как не может иметь кручения, если в T есть хоть одно ребро). Пусть l_x и l_y — инвариантные прямые в K для элементов x и y, соответственно. Пересечение этих прямых представляет собой конечный граф: либо отрезок, либо точку, либо пустое множество (оно не может быть лучом, как известно). Соединим прямые l_x и l_y путём π. Выберем конечные отрезки p_x и p_y такие, что $l_x = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} x^k \circ p_x$ и $l_y = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} y^k \circ p_x$ и возьмём максимальные рёбра e_x и e_y на отрезках p_x и p_y. Не ограничивая общности, мы будем считать, что
   - $x \circ e_x < e_x$ и $y \circ e_y < e_y$ (заменим x на x^{-1} и/или y на y^{-1}, если это не так);
   - и $\left(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} x^k \circ p_x\right) \cap (l_y \cup \pi) = \varnothing = \left(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} y^k \circ p_y\right) \cap (l_x \cup \pi)$ (заменим p_x на $x^n \circ p_x$ и/или p_y на $y^n \circ p_y$ с достаточно большим $n \in \mathbb{N}$, если это не так).

   Соединим теперь p_x и p_y путём $p \supset (p_x \cup p_y)$ и увидим, что максимальное ребро e пути p является максимальным ребром прямой $p \cup \left(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} x^k \circ p_x\right) \cup \left(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} y^k \circ p_y\right)$, то есть ребро e важно (рис. 1). Это противоречие завершает доказательство свойства 1).



Жирная линия — это прямая $T(e)$

Рис. 1

2) Пусть важное ребро $e \in E'$ кончается в вершине из K. Если ребро $g \circ e$ тоже кончается в какой-то вершине из K, то $g \in \mathrm{St}(K)$ и, следовательно, $\mathrm{St}(K) \neq \{1\}$, если $g \neq 1$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда важных рёбер из E', инцидентных вершинам из K, лишь конечное число (не больше, чем $2|\mathcal{E}'|$). Пусть $e \in E'$ — минимальное ребро из E', инцидентное вершине из K. Тогда бесконечный луч прямой $T(e)$ (из определения важности) обязан содержаться в K (из-за минимальности ребра e). Поскольку этот луч может проходить лишь через конечное число орбит рёбер (по определению важности), мы получаем бесконечное множество рёбер из K, лежащих в одной орбите. Стало быть, $\mathrm{St}(K) \neq \{1\}$, что и требовалось.

5. Доказательство основной теоремы

Пусть $n = |G{:}F|$ и T — дерево (Басса–Серра) для разложения $F = \mathop{\ast}\limits_{i \in I} G_i$, то есть F действует на T свободно на ребрах и так, что стабилизатор каждой вершины сопряжён одному из сомножителей G_i. Дерево T можно упорядочить: порядок на рёбрах дерева T определяется левоинвариантным порядком на группе F (который, как известно, существует [Ви49], [DŠ20]). Таким образом, действие F на T сохраняет порядок и свободно на рёбрах. По лемме об индуцированном действии группа G транзитивно на компонентах действует на некотором упорядоченном лесе $\Gamma = T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_n$, состоящем из n деревьев T_j, свободно на рёбрах и сохраняя порядок. При этом $\mathrm{St}(T_1) = F$ и $T_j = g_j T_1$, где $g_1 = 1, g_2, \ldots, g_n$ суть представители левых смежных классов группы G по подгруппе F.

Группы A и B действуют на том же лесе Γ свободно на ребрах и сохраняя порядок. Тогда

$$\begin{aligned}
&\sum_{s\in S}\big(\text{число } (A^s\cap B)\text{-орбит } (A^s\cap B)\text{-важных рёбер}\big) \leqslant \\
\leqslant &\sum_{s\in S}\big(\text{число } (A^s\cap B)\text{-орбит рёбер, которые и } A^s\text{-важны, и } B\text{-важны}\big) = \\
= &\sum_{s\in S}\Big(\text{число } (A^s\cap B)\text{-орбит в множестве } \big(s^{-1}\circ\{A\text{-важные рёбра}\}\big)\cap\{B\text{-важные рёбра}\}\Big) \leqslant \\
\leqslant &\big(\text{число } A\text{-орбит } A\text{-важных рёбер}\big)\cdot\big(\text{число } B\text{-орбит } B\text{-важных рёбер}\big),
\end{aligned} \tag{$*$}$$

где

- первое неравенство вытекает из того, что если ребро важно относительно какой-то группы, то оно важно относительно любой большей группы;
- равенсто вытекает из того, что ребро e является A-важным тогда и только тогда, когда ребро $s^{-1}\circ e$ является A^s-важным;
- последнее неравенство вытекает из леммы о пересечении орбит, применённой к

$$Y = \{A\text{-важные рёбра графа } \Gamma\} \subseteq X = \{\text{рёбра графа } \Gamma\} \supseteq Z = \{B\text{-важные рёбра графа } \Gamma\}.$$

По лемме о важных рёбрах множество орбит важных рёбер есть максимальное существенное множество (если максимальное существенное множество конечно). Таким образом, число C-орбит C-важных рёбер в неравенстве $(*)$ равно мощности максимального существенного множества для действия группы C на Γ (где C — это A, B или $A^s\cap B$). Значит, по лемме о виртуальном ранге Куроша мы имеем

$$\sum_{s\in S}\overline{\mathbf{r}}(A\cap sBs^{-1}) \leqslant \overline{\mathbf{r}}(A)\cdot\overline{\mathbf{r}}(B), \quad \text{где } \overline{\mathbf{r}}(H) = \sum_{j=1}^{n}\overline{\mathrm{rk}}_j(H),$$

а $\overline{\mathrm{rk}}_j(H)$ — это виртуальный приведённый ранг Куроша, относительно (соответствующего разложения) подгруппы $\mathrm{St}(T_j)$. Осталось заметить, что «соответствующее разложение» стабилизатора j-го дерева имеет вид $\mathrm{St}(T_j) = g_j F g_j^{-1} = \mathop{\ast}\limits_{i\in I} g_j G_i g_j^{-1}$. Это завершает доказательство.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Ви49] А. А. Виноградов, О свободном произведении упорядоченных групп, Матем. сб., 25(67):1 (1949), 163-168.

[Нос16] Г. А. Носков, Доказательство Минеева-Дикса HN-гипотезы и характеристика Эйлера-Пуанкаре, Мат. заметки, 99:3 (2016), 376-383.

[AMS14] Y. Antolín, A. Martino, and I. Schwabrow, Kurosh rank of intersections of subgroups of free products of right-orderable groups, Mathematical Research Letters, 21:4 (2014), 649-661. См. также arXiv:1109.0233.

[ASS15] V. Araújo, P. V. Silva, and M. Sykiotis, Finiteness results for subgroups of finite extensions, J. Algebra, 423 (2015), 592-614. См. также arXiv:1402.0401.

[D12] W. Dicks, Simplified Mineyev, `https://mat.uab.cat/~dicks/pub.html`.

[DŠ20] W. Dicks, Z. Šunić, Orders on trees and free products of left-ordered groups, Canadian Mathematical Bulletin, 63:2 (2020), 335-347. См. также arXiv:1405.1676.

[Fr14] J. Friedman, Sheaves on graphs, their homological invariants, and a proof of the Hanna Neumann conjecture. With an appendix by Warren Dicks, Mem. Amer. Math. Soc. 233:1100 (2014). См. также arXiv:1105.0129.

[HW16] J. Helfer and D. T. Wise, Counting cycles in labeled graphs: the nonpositive immersion property for one-relator groups, International Mathematics Research Notices 2016:9 (2016), 2813-2827.

[Iv17] S. V. Ivanov, Intersecting free subgroups in free products of left ordered groups, Journal of Group Theory, 20:4 (2017), 807-821. См. также arXiv:1607.03010.

[JZ17] A. Jaikin-Zapirain, Approximation by subgroups of finite index and the Hanna Neumann conjecture, Duke Mathematical Journal, 166:10 (2017), 1955-1987.

[KP20] A. A. Klyachko, A. N. Ponfilenko, Intersections of subgroups in virtually free groups and virtually free products, Bull. Austral. Math. Soc., 101:2 (2020), 266-271. См. также arXiv:1904.07350.

[Ku83] R. S. Kulkarni, An extension of a theorem of Kurosh and applications to Fuchsian groups, Michigan Mathematical Journal, 30:3 (1983), 259-272.

[La05] M. Lackenby, Expanders, rank and graphs of groups, Israel Journal of Mathematics, 146:1 (2005), 357-370. См. также arXiv:math/0403127.

[Mi12a] I. Mineyev, Submultiplicativity and the Hanna Neumann conjecture, Ann. Math., 175 (2012), 393-414.

[Mi12b] I. Mineyev, Groups, graphs, and the Hanna Neumann conjecture, J. Topol. Anal., 4:1 (2012), 1-12.

[Za14] A. Zakharov, On the rank of the intersection of free subgroups in virtually free groups, J. Algebra, 418 (2014), 29-43. См. также arXiv:1301.3115.