

Вербально замкнутые почти свободные подгруппы

Антон А. Клячко Андрей М. Мажуга

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
Москва 119991, Ленинские горы, МГУ
klyachko@mech.math.msu.su mazhuga.andrew@yandex.ru

Теорема Мясникова–Романькова утверждает, что всякая вербально замкнутая подгруппа конечно порождённой свободной группы является ретрактом. Мы доказываем, что все свободные (и многие почти свободные) вербально замкнутые подгруппы являются ретрактами в *любой* конечно порождённой группе.

1. Введение

Подгруппа H группы G называется *вербально замкнутой* [10] (см. также [11], [4], [9]), если всякое уравнение вида

$$w(x_1, x_2, \dots) = h, \quad \text{где } w \text{ — это элемент свободной группы } F(x_1, x_2, \dots) \text{ и } h \in H,$$

имеющее решение в G , имеет решение в H . Если же каждая конечная система уравнений с коэффициентами из H

$$\{w_1(x_1, x_2, \dots) = 1, \dots, w_m(x_1, x_2, \dots) = 1\}, \quad \text{где } w_i \in H * F(x_1, x_2, \dots),$$

имеющая решение в G , имеет решение в H , то подгруппу H называют *алгебраически замкнутой* в G .

Ясно, что ретракт любой группы (то есть образ такого эндоморфизма ρ , что $\rho \circ \rho = \rho$) является алгебраически замкнутой подгруппой. Нетрудно показать [10], что для конечно порождённых подгрупп конечно определённых групп верно и обратное:

конечно порождённая подгруппа конечно определённой группы алгебраически замкнута тогда и только тогда, когда она является ретрактом.

Для (более слабого) свойства вербальной замкнутости подобное структурное описание неизвестно. Однако в свободных группах ситуация простая: вербально замкнутые подгруппы, алгебраически замкнутые подгруппы и ретракты — это одно и то же.

Теорема Мясникова–Романькова [10]. *Вербально замкнутые подгруппы конечно порождённых свободных групп являются ретрактами.*

Аналогичным образом дело обстоит в свободных нильпотентных группах [4].

Мы обобщаем теорему Мясникова–Романькова в двух направлениях: во-первых, мы рассматриваем подгруппы произвольных групп (а не только свободных); а во-вторых, мы рассматриваем не только свободные подгруппы, но и почти свободные подгруппы H , то есть обладающие свободной подгруппой конечного индекса (в H).

Основная теорема. *Пусть G — произвольная группа и H — её вербально замкнутая почти свободная бесконечная недиздральная подгруппа, любая бесконечная абелева подгруппа которой является циклической. Тогда*

- 1) H алгебраически замкнута в G ;
- 2) если группа G конечно порождена над H (то есть $G = \langle H, X \rangle$ для некоторого конечного подмножества $X \subseteq G$), то H является ретрактом группы G ;

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант 15-01-05823.

в частности, группа H конечно порождена, если G конечно порождена.

(Для бесконечной группы *недиэдральная* означает неизоморфная свободному произведению двух групп порядка два.)

Отметим, что каждая нетривиальная свободная подгруппа H удовлетворяет всем условиям теоремы и, следовательно, является ретрактом в любой конечно порождённой группе, содержащей H в качестве вербально замкнутой подгруппы. Уже этот факт представляется нетривиальным. Следующее утверждение, немедленно вытекающее из основной теоремы, является усилением теоремы 1(1) из [9].

Следствие 1. *В свободном произведении конечного числа конечных групп всякая вербально замкнутая бесконечная недиедральная подгруппа является ретрактом.*

Во втором параграфе мы обсудим примеры, показывающие, что основная теорема неулучшаема в некотором смысле (впрочем, там остаются открытые вопросы). Параграф 3 посвящён доказательству этой теоремы. Наше рассуждение чуть более хитрое, чем в [10], но также основано на использовании слов Ли [8].

Зафиксируем некоторые обозначения. Если $k \in \mathbb{Z}$, а x и y — элементы некоторой группы, то x^y , x^{ky} и x^{-y} обозначают $y^{-1}xy$, $y^{-1}x^ky$ и $y^{-1}x^{-1}y$, соответственно. Коммутант группы G мы обозначаем G' . Если X — подмножество некоторой группы, то $|X|$, $\langle X \rangle$ и $C(X)$ означают, соответственно, мощность множества X , подгруппу, порождённую множеством X и централизатор множества X . Индекс подгруппы H группы G обозначается $|G:H|$. Свободное произведение групп A и B мы обозначаем символом $A * B$, а свободную группу с базисом x_1, \dots, x_n — символом $F(x_1, \dots, x_n)$ или F_n .

2. Примеры

Посмотрим, нельзя ли отбросить какие-нибудь условия основной теоремы.

Подгруппа H бесконечная. Это условие не может быть отброшено. Рассмотрим в качестве G прямое произведение двух экземпляров группы кватернионов (порядка восемь) с объединёнными центрами. Ясно, что сомножители этого произведения не являются ретрактами (и, следовательно, не являются алгебраически замкнутыми, поскольку для конечно порождённых подгрупп конечно определённых групп это одно и то же). Действительно, ядро такой гипотетической ретракции обязано быть нетривиальной нормальной подгруппой. Поскольку группа G нильпотентна, эта нетривиальная нормальная подгруппа обязана нетривиально пересекать центр группы G (см., например, [2]). Это немедленно приводит к противоречию, поскольку центр в данном случае содержится в каждом из сомножителей.

Покажем, что второй (например) сомножитель H такого произведения $G = Q_8 \times_C Q_8$ (где $C = \{\pm 1\}$) вербально замкнут в G . Пусть уравнение

$$w(x_1, \dots, x_n) = (1, h'),$$

где $(1, h') \in H$ имеет решение $x_i = (h_i, h'_i)$ в G . Покажем, что это уравнение имеет решение и в H . Пусть некоторая переменная x_i входит в $w(x_1, \dots, x_n)$ в нечётной суммарной степени k . В этом случае уравнение $x^k = h'$ имеет решение q в Q_8 и подстановка $x_i = (1, q)$ и $x_j = (1, 1)$ при $j \neq i$ является решением исходного уравнения в H .

Пусть теперь все переменные входят в $w(x_1, \dots, x_n)$ в чётных суммарных степенях. В таком случае $h' = 1$ или $h' = -1$ (иначе уравнение не имеет решений в G). Если $h' = 1$, то подстановка $x_i = (1, 1)$ для всех i есть решение уравнения в H . Если же $h' = -1$, то ровно одна из подстановок: $x_i = (1, h_i)$ или $x'_i = (1, h'_i)$ является решением рассматриваемого уравнения в H .

Подгруппа H недиедральная. Мы не знаем, нужно ли это условие. Оставляем это в качестве открытого вопроса.

Любая бесконечная абелева подгруппа группы H является циклической. То, что это условие отбросить нельзя, показывает небольшая модификация рассмотренного выше примера центрального произведения $Q_8 \times_C Q_8$ (где $C = \{\pm 1\}$), в котором сомножители вербально замкнуты, но не являются ретрактами. Положим теперь $G = Q_8 \times_C Q_8 \times F$, где F — какая-нибудь нетривиальная свободная группа, а в качестве подгруппы H возьмём произведение второго и третьего сомножителя в этом произведении. Из доказанного выше вытекает, что H является вербально замкнутой подгруппой и не является

ретрактом (поскольку ретракт ретракта — это ретракт, а второй сомножитель не является ретрактом в G и даже в $Q_8 \times_C Q_8$ по доказанному выше).

Подгруппа H почти свободная. Это условие не может быть отброшено. Известно (см., например, теоремы 1.5 и 3.3 в [1]), что свободная бернсайдова группа $B(m, n)$ ранга $m \geq 2$ и нечётного периода $n \geq 665$ бесконечна, а любая ее абелева подгруппа конечна. Рассмотрим группу $G = Q_8 \times_C Q_8 \times B(2, 2017)$, а в качестве подгруппы H возьмём произведение второго и третьего сомножителя в этом произведении. Аналогично тому, как это было сделано выше, мы можем заключить, что H является вербально замкнутой подгруппой и не является ретрактом.

Группа G конечно порождена над H в пункте 2). Следующий пример показывает, что это условие нельзя отбросить. Возьмём подгруппу $H = \langle 1, 1, \dots \rangle$ в декартовой сумме $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \dots$ циклических групп всех простых порядков. Ясно, что H вербально замкнута (в абелевых группах вербально замкнутые подгруппы это то же самое, что алгебраически замкнутые подгруппы, и то же самое, что сервантные (чистые) подгруппы). С другой стороны, H не выделяется прямым слагаемым (то есть не является ретрактом). Действительно, если $G = H \oplus D$, то периодическая часть $T(G)$ группы G (то есть прямая сумма всех \mathbb{Z}_p) обязана содержаться в D ; но тогда группа $H \simeq \mathbb{Z}$ выделялась бы прямым слагаемым в $G \simeq H \oplus (D/T(G))$, чего не может быть, поскольку $G/T(G)$ — полная (делимая) группа.¹

3. Доказательство основной теоремы

Заметим, что всякая почти свободная группа H является линейной (даже над \mathbb{Z} , если H счётна), поскольку свободная группа (любой мощности), как хорошо известно, линейна (над некоторым полем) (см., например, [2]), а почти линейная группа всегда линейна. Следовательно, H *нётерова по уравнениям*, (как и всякая линейная (над полем) группа [5]), то есть всякая система уравнений с коэффициентами из H и конечным числом неизвестных эквивалентна своей конечной подсистеме.² Это в свою очередь означает, что H является ретрактом любой конечно порождённой над H группы, содержащей H в качестве алгебраически замкнутой подгруппы [10]. Поэтому достаточно доказать пункт 1) теоремы.

Рассмотрим сперва случай циклической подгруппы H . Напомним, что всякую целочисленную матрицу целочисленными элементарными преобразованиями можно привести к диагональному виду. Это означает, что всякую конечную систему уравнений над H

$$\{w_1(x_1, x_2, \dots) = 1, \dots, w_m(x_1, x_2, \dots) = 1\}, \quad \text{где } w_i \in H * F(x_1, x_2, \dots),$$

заменами вида $w_i \rightarrow w_i w_j^{\pm 1}$ и $x_i \rightarrow x_i x_j^{\pm 1}$ можно преобразовать к виду

$$\{x_1^{n_1} u_1(x_1, x_2, \dots) = h_1, \dots, x_m^{n_m} u_m(x_1, x_2, \dots) = h_m\}, \quad \text{где } u_i \in (H * F(x_1, x_2, \dots))', n_i \in \mathbb{Z} \text{ и } h_i \in H.$$

При этом полученная система будет иметь столько же решений, сколько исходная (и в G , и в H). Предположим, что эта система имеет решение в G . Пусть каждое слово u_i представляется в виде произведения s коммутаторов в $H * F(x_1, x_2, \dots)$. Тогда каждое отдельное уравнение $x_i^{n_i} [y_1, z_1] \dots [y_s, z_s] = h_i$ (где y_j и z_j — новые переменные) имеет решение в G и, следовательно, имеет решение $(\hat{x}_i, \hat{y}_1^{(i)}, \hat{z}_1^{(i)}, \dots)$ в H (поскольку подгруппа H вербально замкнута). Но тогда, очевидно, $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots)$ есть решение всей системы (так как коммутант подгруппы H тривиален).

Случай почти циклической подгруппы H легко сводится к случаю циклической группы в силу следующего простого наблюдения:

бесконечная почти циклическая группа, не содержащая бесконечных нециклических абелевых подгрупп, является либо циклической, либо диэдральной.

Действительно, почти циклическая группа всегда содержит конечную нормальную подгруппу, факторгруппа по которой либо циклическая, либо диэдральная (см., например, [13]). Эта конечная нормальная подгруппа обязана быть тривиальной, поскольку иначе мы найдём в её централизаторе (который имеет конечный индекс) элемент бесконечного порядка и получим бесконечную нециклическую абелеву подгруппу.

Рассмотрим теперь более трудный случай не почти циклической группы H .

¹В журнальной версии статьи в этом примере содержалась ошибка (которую в 2023 году заметил Михаил Михеенко, за что авторы его благодарят).

²Отметим ещё, что группа, содержащая нётерова по уравнениям подгруппу конечного индекса, сама нётерова по уравнениям [6].

Лемма 1. В почти свободной группе, не являющаяся почти циклической, любой элемент раскладывается в произведение двух элементов бесконечного порядка.

Доказательство. Понятно, что это утверждение достаточно доказать для конечно порождённых групп. Напомним, что конечно порождённая почти свободная группа допускает такое действие на (ориентированном) дереве, что стабилизаторы вершин конечны [7]. Напомним также, что любой автоморфизм дерева, не имеющий неподвижных точек, имеет единственную инвариантную прямую [12].

Рассмотрим такое действие группы H на дереве T . Пусть $h \in H$ — элемент, который мы хотим разложить, и $T_h \subseteq T$ — множество неподвижных точек для h . Если порядок элемента h бесконечен, то $h = h^2 h^{-1}$ — искомое разложение, поэтому мы будем считать, что порядок элемента h конечен и, следовательно, T_h непусто (и, стало быть, связно).

Возьмём какой-нибудь элемент $g \in H$ бесконечного порядка с инвариантной прямой l_g . Если элемент $g^{-1}h$ не имеет неподвижных точек, то его порядок бесконечен и $h = g \cdot (g^{-1}h)$ — искомое разложение. Пусть $a \in T$ — неподвижная точка для $g^{-1}h$. Тогда $h(a) = g(a) = b$.

Равенство $h(a) = b$ показывает, что отрезок, соединяющий точки a и b , обязан пересекать поддерево T_h по единственной точке, а именно, по своей середине c . А равенство $g(a) = b$ показывает, что прямая l_g обязана проходить через точку c и пересекать отрезки $[a, c]$ и $[c, b]$ по отрезкам одинаковой ненулевой длины δ (в противном случае расстояния от l_g до a и до b не равны и, значит, $g(a) \neq b$). Элемент g обязан действовать сдвигом на 2δ на своей инвариантной прямой l_g , но нам пока важно только равенство $T_h \cap l_g = \{c\}$.

Возьмём теперь другой элемент $g' \in H$ бесконечного порядка с другой инвариантной прямой $l_{g'} \neq l_g$ (такой элемент существует, поскольку группа H не почти циклическая). Аналогичные рассуждения показывают, что либо $h = g' \cdot ((g')^{-1}h)$ — искомое разложение, либо $T_h \cap l_{g'} = \{c'\}$ для некоторой точки c' . В последнем случае рассмотрим элемент $g'' = g^k g' g^{-k}$. Его инвариантной прямой будет служить, очевидно, $g^k(l_{g'})$ и мы видим, что эта прямая не будет пересекать поддерево T_h , если число k выбрано достаточно большим положительным или отрицательным. Поэтому, в этом последнем случае $h = g'' \cdot ((g'')^{-1}h)$ — искомое разложение. (Более точно, если $c' \neq c$, то в качестве k можно взять единицу или любое другое ненулевое число; если же $c' = c$, то k нужно выбрать так, чтобы $|2k\delta|$ было больше чем расстояние от c до конца отрезка или луча $l_g \cap l_{g'}$.) \square

Лемма 2. Если h_1 и h_2 — элементы бесконечного порядка почти свободной группы, любая бесконечная абелева подгруппа которой является циклической, и $h_1^k = h_2^k$ для некоторого ненулевого целого k , то $h_1 = h_2$.

Доказательство. Корни из элемента лежат в его централизаторе, поэтому достаточно показать, что централизатор элемента бесконечного порядка h циклический. Этот централизатор $C(h)$ является почти свободной группой (как и любая подгруппа почти свободной группы) с бесконечным центром. Отсюда немедленно вытекает, что группа $C(h)$ почти циклическая. Осталось сослаться на упомянутый в начале параграфа факт: бесконечная почти циклическая группа без бесконечных абелевых нециклических подгрупп является либо циклической, либо диэдральной. При этом в рассматриваемом случае группа не может быть диэдральной, поскольку центр централизатора нетривиален. \square

Следующая лемма хорошо известна.

Лемма 3. Если подгруппа H группы G такова, что любая конечная система уравнений вида

$$\{w_1(x_1, \dots, x_n) = h_1, \dots, w_m(x_1, \dots, x_n) = h_m\}, \quad \text{где } w_i \in F(x_1, \dots, x_n) \text{ и } h_i \in H \quad (1)$$

имеющая решение в G , имеет решение в H , то H алгебраически замкнута.

Доказательство. Просто обозначим коэффициенты новыми буквами, которые будем считать неизвестными. Например, разрешимость уравнения $x y h_1 [x^{2023}, h_2] y^{-1} = 1$ эквивалентна разрешимости системы $\{x y z [x^{2023}, t] y^{-1} = 1, z = h_1, t = h_2\}$. \square

Нам теперь понадобится один полезный инструмент. Напомним, что словом Li для свободной группы ранга r от m переменных называют элемент $L(z_1, \dots, z_m)$ свободной группы ранга m такой, что

- 1) если $L(v_1, \dots, v_m) = L(v'_1, \dots, v'_m) \neq 1$ в F_r , то элементы $v'_i \in F_r$ получаются из элементов $v_i \in F_r$ одновременным сопряжением, то есть для некоторого $w \in F_r$ имеют место равенства $v'_i = v_i^w$ для всех $i = 1, \dots, m$;
- 2) $L(v_1, \dots, v_m) = 1$ тогда и только тогда, когда элементы v_1, \dots, v_m группы F_r лежат в одной циклической подгруппе.

В работе [8] такие слова были построены для всех целых $r, m \geq 2$. На самом деле, нетрудно сообразить, что это означает наличие *универсального слова Ли* от m переменных, то есть такого элемента $L(z_1, \dots, z_m) \in F_m$, что свойства 1) и 2) выполняются во всех свободных группах F_r и даже в F_∞ .

Лемма 4. Для любого положительного целого m существует такой элемент $L(z_1, \dots, z_m) \in F_m$, что свойства 1) и 2) выполняются во всех свободных группах F_r и даже в F_∞ .

Доказательство. Это утверждение немедленно вытекает из результата Ли и следующего простого факта:

свободная группа F_∞ вкладывается в F_2 в качестве мальнормальной подгруппы,

то есть такой подгруппы $S \subset F_2$, что $S^f \cap S = \{1\}$ для всех $f \in F_2 \setminus S$. Этот факт следует, например, из результата Вайза [14]:

в свободной группе всякое множество, удовлетворяющее условию малого сокращения $C(5)$, свободно порождает мальнормальную подгруппу.

Таким образом, слово Ли для свободной группы ранга два является универсальным, то есть годится и для группы F_∞ . \square

Приступим к доказательству теоремы. Итак, мы считаем, что вербально замкнутая подгруппа H группы G почти свободна, не содержит бесконечных нециклических абелевых подгрупп и содержит нормальную (в H) неабелеву свободную подгруппу F индекса N (в H). Воспользовавшись леммой 3, мы можем считать, что система (1) имеет решение в G . Мы хотим показать, что эта система имеет решение в H .

Пусть $L(z_1, \dots, z_{2m+2})$ — это универсальное слово Ли от $2m+2$ переменных. Воспользовавшись леммой 1, для каждого элемента h_i выберем в H такой элемент f_i , что порядки элементов $h_i f_i$ и f_i бесконечны. Выберем ещё в F два некоммутирующих элемента u_1, u_2 .

Уравнение

$$L((w_1(x_1, \dots, x_n)y_1)^N, \dots, (w_m(x_1, \dots, x_n)y_m)^N, y_1^N, \dots, y_m^N, z_1^N, z_2^N) = f,$$

где $f = L((h_1 f_1)^N, \dots, (h_m f_m)^N, f_1^N, \dots, f_m^N, u_1^N, u_2^N) \in F$, имеет решение в G по построению (его решением служит следующий набор: решение системы (1) в качестве x_i , элементы f_i в качестве y_i и u_i в качестве z_i).

Подгруппа H вербально замкнута в G и $f \in H$, значит последнее уравнение имеет некоторое решение $\hat{x}_i, \hat{y}_j, \hat{z}_k$ в H .

В правой части уравнения стоит значение слова Ли на некоторых элементах свободной группы F (поскольку $h^N \in F$ для всех $h \in H$), причём элементы u_1^N и u_2^N не коммутируют (поскольку элементы свободной группы u_1 и u_2 выбраны не коммутирующими), значит, они не лежат в одной циклической подгруппе и поэтому из свойства 2) слов Ли следует, что $f \neq 1$. Согласно свойству 1) это влечёт равенства

$$(w_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\hat{y}_i)^{Nw} = (h_i f_i)^N, \quad \hat{y}_i^{Nw} = f_i^N \quad \text{и} \quad \hat{z}_i^{Nw} = u_i^N \quad \text{для некоторого } w \in F.$$

Поскольку извлечение корня из элементов бесконечного порядка в H однозначно (по лемме 2), мы имеем равенства

$$(w_i(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)\hat{y}_i)^w = h_i f_i, \quad \hat{y}_i^w = f_i, \quad \text{и} \quad \hat{z}_i^w = u_i,$$

то есть \hat{x}_i^w — это решение системы (1) в H , что и требовалось.

Литература

- [1] С. И. Адян, Проблема Бернсайда и тождества в группах, М.: Наука, 1975.
- [2] М.И. Каргаполов, Ю.И. Мерзляков, Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
- [3] А.Г. Курош, Теория групп. М.: Наука, 1967.

- [4] В. А. Романьков, Н. Г. Хисамиев, Вербально и экзистенциально замкнутые подгруппы свободных нильпотентных групп, *Алгебра и логика*, **52:4** (2013), 502-525.
- [5] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Remeslennikov, Algebraic geometry over groups I. Algebraic sets and ideal theory. *J. Algebra*. **219** (1999), 16-79.
- [6] G. Baumslag, A. Myasnikov, V. Roman'kov. Two theorems about equationally noetherian groups. *J. Algebra*. **194** (1997), 654-664.
- [7] A. Karrass, A. Pietrowski, D. Solitar, Finitely generated groups with a free subgroup of finite index, *J. Austral. Math. Soc.* 16 (1973), 458-466.
- [8] D. Lee, On certain C-test words for free groups. *J. Algebra*. **247** (2002), 509-540.
- [9] A. M. Mazhuga, On free decompositions of verbally closed subgroups of free products of finite groups, *Journal of Group Theory* (в печати). См. также arXiv:1605.01766
- [10] A. Myasnikov, V. Roman'kov, Verbally closed subgroups of free groups, *Journal of Group Theory* **17** (2014), 29-40. Смотрите также arXiv:1201.0497.
- [11] V. A. Roman'kov, Equations over groups, *Groups Complexity Cryptology* **4:2** (2012), 191-239.
- [12] J.-P. Serre. Arbres, amalgames, SL_2 , Rédigé avec la collaboration de Hyman Bass. Astérisque, No. 46. Société Mathématique de France, Paris, 1977. (English translation: Trees. Springer-Verlag, 1980).
- [13] J. Stallings, Group theory and three-dimensional manifolds, Yale Math. Monographs (1971).
- [14] D. T. Wise, The residual finiteness of positive one-relator groups, *Comment. Math. Helv* **76** (2001), 314-338.