УДК 512.543.12+512.543.52+512.543.14+512.544.23 MSC: 20E05, 20E06, 20E08, 20E15, 05C25

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОДГРУПП В ПОЧТИ СВОБОДНЫХ ГРУППАХ И ПОЧТИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

Антон А. Клячко Анастасия Н. Понфиленко

Механико-математический факультет Московского государственного университета

Москва 119991, Ленинские горы, МГУ

klyachko@mech.math.msu.su stponfilenko@gmail.com

Эта заметка содержит (короткое) доказательство следующего обобщения теоремы Минеева–Фридмана (ранее известной как гипотеза Ханны Нейман): если A и B — нетривиальные свободные подгруппы почти свободной группы, содержащей свободную подгруппу индекса n, то

$$\operatorname{rank}(A\cap B)-1\leqslant n\cdot(\operatorname{rank}(A)-1)\cdot(\operatorname{rank}(B)-1).$$

Мы получаем также аналог этого утверждения для почти свободных произведений.

1. Введение

Гипотеза Ханны Нейман (1957), доказанная Минеевым ([Mi12a], [Mi12b]) и Фридманом [Fr14], утверждает что

для любых нетривиальных подгрупп A и B свободной группы выполнено неравенство

$$\operatorname{rank}(A\cap B)-1\leqslant(\operatorname{rank}(A)-1)\cdot(\operatorname{rank}(B)-1).$$

Мы получаем следующее обобщение этого утверждения.

Теорема 1. *Для любых нетривиальных свободных подгрупп A, B и F любой группы G выполняется неравенство*

$$\operatorname{rank}(A\cap B)-1\leqslant|G{:}F|\cdot(\operatorname{rank}(A)-1)\cdot(\operatorname{rank}(B)-1). \tag{1}$$

Это неравенство можно понимать в смысле кардинальной арифметики, но очевидно, что нетривиальный случай возникает только тогда, когда все три величины в правой части: ранг подгруппы A, ранг подгруппы B и индекс подгруппы F — конечны.

Ранее были известны следующие неравенства:

$$\operatorname{rank}(A\cap B)-1\leqslant 6|G{:}F|(\operatorname{rank}(A)-1)(\operatorname{rank}(B)-1) \qquad \text{[Za14]};$$
$$\operatorname{rank}(A\cap B)-1\leqslant |G{:}F|^2(\operatorname{rank}(A)-1)(\operatorname{rank}(B)-1)+|G{:}F|-1 \qquad \text{[ASS15]}.$$

Оценка из [ASS15], разумеется, асимптотически хуже оценки из [Za14], но бывает лучше при маленьких значениях индекса. Теорема 1 улучшает оба эти неравенства, и дальнейшие улучшения уже невозможны:

для любых $k,l,n\in\mathbb{N}$ найдётся группа G, содержащая свободные подгруппы A, B и F такие, что $\operatorname{rank}(A)=k$, $\operatorname{rank}(B)=l$, $|G{:}F|=n$, и неравенство (1) является равенством.

Действительно, рассмотрим эпиморфизм $\varphi\colon x\mapsto\big(\alpha(x),\beta(x)\big)$ из свободной группы F ранга два на свободную абелеву группу $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ и положим

$$A=\alpha^{-1}\big((k-1)\mathbb{Z}\big),\quad B_0=\beta^{-1}\big((l-1)\mathbb{Z}\big),\quad G=F\times(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\supset B=\Big\{\Big(b,\ \beta(b)/(l-1)\Big)\ \Big|\ b\in B_0\Big\}.$$

Таким образом,

$$B\cap F=\beta^{-1}\big(n(l-1)\mathbb{Z}\big)\quad\text{и}\quad B\cap A=\varphi^{-1}\big((k-1)\mathbb{Z}\times n(l-1)\mathbb{Z}\big).$$

Ясно, что $|G{:}F|=n$. Кроме того $|F{:}A|=k-1$, $|F{:}B_0|=l-1$ и $|F{:}B\cap A|=n(l-1)(k-1)$. Ранги этих подгрупп равны k, l и $n(l-1)(k-1)+1$, соответственно, по формуле Шрайера: $\operatorname{rank}(H)-1=|F{:}H|(\operatorname{rank}(F)-1)$ (справедливой для любой подгруппы H, имеющий конечный индекс в свободной группе F). Осталось заметить, что $\operatorname{rank}(B)=\operatorname{rank}(B_0)$, поскольку проекция $\Big(b,\ \beta(b)/(l-1)\Big)\mapsto b$ является изоморфизмом из B в B_0.

(Заметим в скобках, что из теоремы 1.8, сформулированной в [Mi12b] без доказательства, вытекала бы оценка (1) без множителя $|G{:}F|$; очевидно там какие-то опечатки…)

Следующую теорему можно рассматривать как обобщение теоремы 1. Напомним, что группа называется *левоупорядочиваемой*, если на ней существует линейный порядок, такой, что $x\leqslant y\implies zx\leqslant zy$ для любых элементов x,y,z.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 19-01-00591.

Теорема 2. *Пусть группа G обладает подгруппой F конечного индекса, раскладывающейся в свободное произведение левоупорядочиваемых групп: $F = \mathop{\ast}\limits_{i\in I} G_i$. Тогда для любых нетривиальных свободных подгрупп A и B в G, тривиально пересекающих все подгруппы, сопряжённые к G_i, выполняется неравенство*

$$\mathrm{rank}(A \cap B) - 1 \leqslant |G{:}F|(\mathrm{rank}(A) - 1)(\mathrm{rank}(B) - 1).$$

При $F = G$ это утверждение было доказано в [AMS14] (смотрите также [Iv17]).

Авторы благодарят А. О. Захарова, который прочитал предыдущую версию этого текста и предложил несколько исправлений и уточнений.

2. Инструменты

Под *графом* мы всегда понимаем ориентированный граф, петли и кратные рёбра допускаются. *Путь* в графе и *связность* графа определяются естественным образом (при этом ориентация игнорируется). *Приведённым рангом* $\bar{\mathbf{r}}(D)$ конечного графа D мы называем следующую величину: $\bar{\mathbf{r}}(D) \overset{\text{опр}}{=} \sum\limits_K \max(0, -\chi(K))$, где сумма распространяется на все компоненты связности K графа D, а $\chi(K)$ — *эйлерова характеристика* графа K, то есть разность числа вершин и числа рёбер.

Назовём (некоторое) множество E рёбер графа D *максимальным существенным*, если $\bar{\mathbf{r}}(D \setminus E) = \bar{\mathbf{r}}(D) - |E| = 0$. Другими словами, множество E рёбер графа D максимально существенно, если $D \setminus E$ является максимальным по включению подграфом в D, каждая компонента которого гомотопна точке или окружности.

Мы говорим, что граф *упорядочен*, если на множестве его рёбер зафиксирован частичный порядок, ограничение которого на каждую компоненту связности является линейным порядком. Ребро e упорядоченного леса называют *существенным относительно порядка*, если через e проходит бесконечный в обе стороны путь без самопересечений, состоящий из рёбер, не превосходящих e.

Действие группы на графе называют

- *кокомпактным*, если число орбит вершин и число орбит рёбер конечны;
- *свободным*, если стабилизатор каждой вершины тривиален (и, следовательно, стабилизаторы рёбер тоже тривиальны);
- *свободным на рёбрах*, если стабилизатор каждого ребра тривиален.

Теорема Минеева о существенных рёбрах ([Mi12b], теорема 1.6). *Пусть группа G свободно и кокомпактно действует на упорядоченном лесе T, сохраняя порядок. Тогда множество орбит существенных относительно порядка ребер является максимальным существенным множеством в факторграфе T/G. В частности, приведённый ранг $\bar{\mathbf{r}}(T/G)$ этого факторграфа равен числу орбит существенных относительно порядка ребер.*

Лемма о ранге группы. *Пусть свободная конечно порожденная группа A свободно кокомпактно и сохраняя порядок действует на упорядоченном лесе L, состоящем из n деревьев. Тогда число орбит существенных относительно порядка рёбер равно $n \cdot \overline{\mathrm{rk}}(A)$.*

Здесь и далее $\overline{\mathrm{rk}}(A) \overset{\text{опр}}{=} \max(\mathrm{rank}(A) - 1, 0)$ — это *приведённый ранг* свободной группы A.

Доказательство. Пусть $\mathbf{NO}(G, \Gamma)$ обозначает число G-орбит существенных относительно порядка рёбер в упорядоченном графе Γ (на котором группа G действует, сохраняя порядок).

Случай 1: $n = 1$. В этом случае утверждение (как замечено в [Mi12b], лемма 1.1) немедленно вытекает из теоремы Минеева о существенных рёбрах, поскольку $\bar{\mathbf{r}}(T/A) = \overline{\mathrm{rk}}(A)$, если T — дерево.

Случай 2: действие группы A на множестве деревьев (компонент) леса L транзитивно. Пусть T — одно из деревьев леса L. Тогда $\mathbf{NO}(A, L) \overset{t}{=} \mathbf{NO}(\mathrm{St}(T), T) \overset{1}{=} \overline{\mathrm{rk}}(\mathrm{St}(T)) \overset{S}{=} |A : \mathrm{St}(T)| \cdot \overline{\mathrm{rk}}(A) = n \cdot \overline{\mathrm{rk}}(A)$, где равенство $\overset{t}{=}$ вытекает из транзитивности действия на множестве деревьев, равенство $\overset{1}{=}$ — это уже разобранный случай 1, равенство $\overset{S}{=}$ — это формула Шрайера, а последнее равенство вытекает из того, что длина орбиты равна, как известно, индексу стабилизатора.

Случай 3: общий случай. Пусть $L = P_1 \sqcup \ldots \sqcup P_k$ и на на каждом (инвариантном) лесе P_i, состоящем из l_i деревьев, действие транзитивно. Тогда

$$\mathbf{NO}(A, L) = \mathbf{NO}(A, P_1) + \ldots + \mathbf{NO}(A, P_k) \overset{2}{=} l_1 \cdot \overline{\mathrm{rk}}(A) + \ldots + l_k \cdot \overline{\mathrm{rk}}(A) = (l_1 + \ldots + l_k) \cdot \overline{\mathrm{rk}}(A) = n \cdot \overline{\mathrm{rk}}(A),$$

где равенство $\overset{2}{=}$ — это случай 2. Лемма доказана.

Следующую простую лемму можно найти, например, в [Za14] (лемма 2).

Лемма о пересечении орбит. *Пусть A и B — подгруппы группы G, свободно действующей на множестве X, содержащем A-инвариантное подмножество $Y \subseteq X$ и B-инвариантное подмножество $Z \subseteq X$. Тогда*

$$(\text{число } (A \cap B)\text{-орбит в } Y \cap Z) \leqslant (\text{число } A\text{-орбит в } Y) \cdot (\text{число } B\text{-орбит в } Z).$$

Лемма об индуцированном действии. *Пусть группа G обладает подгруппой F конечного индекса n, которая действует на некотором упорядоченном дереве T, сохраняя порядок. Тогда G способна сохраняя порядок действовать на упорядоченном лесе, состоящем из n деревьев, причём стабилизаторы вершин и рёбер при этом действии будут сопряжены стабилизаторам вершин и рёбер при исходном действии F на T.*

Доказательство. Пусть $S \ni 1$ — система представителей левых смежных классов G по F (то есть $|S| = n$). Таким образом, каждый элемент $g \in G$ однозначно раскладывается в произведение $g = \mathbf{s}(g)\mathbf{f}(g)$ элемента $\mathbf{s}(g) \in S$ и элемента $\mathbf{f}(g) \in F$.

Возьмём упорядоченный лес $L = \bigcup\limits_{s \in S} sT$, состоящий из n копий sT упорядоченного дерева T (считая, что рёбра из разных копий несравнимы) и рассмотрим обычное индуцированное действие группы G на лесе L: $g \circ st \overset{\text{опр}}{=} \mathbf{s}(gs)\Big(\mathbf{f}(gs) \circ t\Big)$. Ясно, что это действие удовлетворяет всем требованиям.

Лемма об инвариантном лесе. *Пусть конечно порождённая группа G действует на лесе L с конечным числом компонент связности. Тогда всякое конечное множество X вершин леса L содержится в некотором G-инвариантном подлесе $L_X \supseteq X$, пересечение которого с каждой компонентой леса L связно, а действие группы G на L_X кокомпактно.*

Доказательство. Для каждой компоненты T леса L выберем конечное множество порождающих S в стабилизаторе дерева T (этот стабилизатор конечно порождён, поскольку его индекс в конечно порождённой группе G конечен), после чего сделаем следующее:

- соединим все точки множества $X \cap T$ (кратчайшими) путями;
- соединим полученное дерево R путями с деревьями $s^{\pm 1}R$ для всех $s \in S$ и добавим эти пути к R.

После этого мы добавим к полученному конечному лесу $R' \supseteq X$ все его сдвиги gR', где $g \in G$. Понятно, что получится G-инвариантный лес $R'' = \bigcup\limits_{g \in G} gR'$, действие группы G на котором кокомпактно.

Проверим, что пересечение $R'' \cap T$ связно для каждой компоненты T леса L. Действительно, дерево $R' \cap T$ по построению соединено путём с деревом $s^{\pm 1}R' \cap T$, значит, дерево $gR' \cap T$ соединено путём с деревом $gs^{\pm 1}R' \cap T$ для всех $g \in \mathrm{St}(T)$ и $s \in S$; в частности, деревья $gR' \cap T$ и $g'R' \cap T$ лежат в одной компоненте леса $R'' \cap T$, где длина элемента $g' = gs^{\pm 1} \in \mathrm{St}(T)$ (в образующих S) меньше длины элемента g. Очевидная индукция завершает доказательство.

2. Доказательство теорем 1 и 2

Пусть F — подгруппа группы G, которая либо является свободной, либо, по крайней мере, раскладывается в свободное произведение левоупорядочиваемых групп. Как известно, свободная группа способна свободно действовать на некотором дереве T, а свободное произведение $F = \mathop{\ast}\limits_{i \in I} G_i$ способно действовать на некотором дереве T таким образом, что стабилизатор каждой вершины будет сопряжён одному из сомножителей G_i.

Дерево T можно упорядочить: порядок на рёбрах дерева T определяется левоинвариантным порядком на группе F (который, как известно, существует [Ви49], [DŠ14]). Таким образом, действие F на T сохраняет порядок и свободно на рёбрах (в обоих случаях).

По лемме об индуцированном действии группа G действует на некотором упорядоченном лесе L свободно на рёбрах. При этом действия групп A и B на L свободны. По лемме об инвариантном лесе выберем A-инвариантный подлес $\mathcal{A} \subseteq L$ и B-инвариантный подлес $\mathcal{B} \subseteq L$ таким образом, что

- действия групп A и B на этих лесах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ кокомпактно (и, следовательно, действие группы $A \cap B$ на $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ тоже кокомпактно по лемме о пересечении орбит);
- пересечение каждой компонентой леса L с каждым из лесов $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ непусто и связно.

Положив в лемме о пересечении орбит

$$X = \{\text{рёбра леса } L\}, \qquad Y = \{\text{рёбра леса } \mathcal{A}, \text{ существенные относительно порядка (в } \mathcal{A})\},$$
$$Z = \{\text{рёбра леса } \mathcal{B}, \text{ существенные относительно порядка (в } \mathcal{B})\}$$

и заметив, что каждое существенное относительно порядка ребро леса $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ заведомо является существенным относительно порядка в лесах $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, мы получим $\mathbf{NO}(A \cap B, \mathcal{A} \cap \mathcal{B}) \leqslant \mathbf{NO}(A, \mathcal{A}) \cdot \mathbf{NO}(B, \mathcal{B})$. По лемме о ранге группы левая часть полученного неравенства равна $n \cdot \overline{\mathrm{rk}}(A \cap B)$, а правая часть равна $n^2 \cdot \overline{\mathrm{rk}}(A) \cdot \overline{\mathrm{rk}}(B)$. Сокращая на n, получаем то, что требовалось.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[Ви49] А. А. Виноградов, О свободном произведении упорядоченных групп, Матем. сб., 25(67):1 (1949), 163-168.

[AMS14] Y. Antolin, A. Martino, and I. Schwabrow, Kurosh rank of intersections of subgroups of free products of right-orderable groups, Mathematical Research Letters, 21:4 (2014), 649-661. См. также arXiv:1109.0233.

[ASS15] V. Araújo, P. V. Silva, M. Sykiotis, Finiteness results for subgroups of finite extensions, J. Algebra, 423 (2015), 592-614. См. также arXiv:1402.0401.

[DŠ14] W. Dicks, Z. Šunić, Orders on trees and free products of left-ordered groups, arXiv:1405.1676.

[Fr14] J. Friedman, Sheaves on graphs, their homological invariants, and a proof of the Hanna Neumann conjecture. With an appendix by Warren Dicks, Mem. Amer. Math. Soc. 233:1100 (2014). См. также arXiv:1105.0129.

[Iv17] S. V. Ivanov, Intersecting free subgroups in free products of left ordered groups, Journal of Group Theory, 20:4 (2017), 807-821. См. также arXiv:1607.03010.

[Mi12a] I. Mineyev, Submultiplicativity and the Hanna Neumann conjecture, Ann. Math., 175 (2012), 393-414.

[Mi12b] I. Mineyev, Groups, graphs, and the Hanna Neumann conjecture, J. Topol. Anal., 4:1 (2012), 1-12.

[Za14] A. Zakharov, On the rank of the intersection of free subgroups in virtually free groups, J. Algebra, 418 (2014), 29-43. См. также arXiv:1301.3115.