Veni, vide, vince

1. Сколько существует пар целых чисел (a, b), при которых все корни (включая комплексные) многочлена $x^3 + ax^2 + bx + 2$ по модулю больше единицы?

2. Пусть A и B — такие квадратные комплексные матрицы, что B эрмитова положительно определенная, AB кососимметрична. Доказать, что если матрица A ненулевая, то она имеет чисто мнимое собственное число.

3. В квадрате со стороной длины 1 в плоскости даны n точек. (a) Доказать, что найдется содержащий их связный граф (данные точки могут быть его вершинами или находиться на ребрах, могут быть и другие вершины), сумма длин ребер которого не больше $3\sqrt{n}$. (b) Доказать, что ни при каком $n > 1$ нельзя гарантировать оценку $2^{-1}\sqrt{n}$.

4. Прочитав курс из 30 лекций по теории конечных множеств, профессор Наблюдательный задумался: на каждой лекции не менее 10 студентов занимали не те места, на которых они сидели в прошлый раз; означает ли это, что для некоторого непустого множества студентов X множество мест, занимаемых студентами из X, изменялось на каждой лекции? Предполагается, что мест столько же, сколько студентов, причем нет прогульщиков.

5. Пусть функция f непрерывна на $[1, +\infty)$, $f > 1$ и

$$f(yx) \geq f(x)^{y^2} \quad \forall\, x \geq 1,\ \forall\, y \geq 1.$$

Доказать, что для всех $x \geq 1$ имеем

$$\int_1^x f(y)\, dy \leq C\frac{f(x)}{x},$$

где C — постоянная.

Veni, vide, vince

1. Сколько существует пар целых чисел (a, b), при которых все корни (включая комплексные) многочлена $x^3 + ax^2 + bx + 2$ по модулю больше единицы?

2. Пусть A и B — такие квадратные комплексные матрицы, что B эрмитова положительно определенная, AB кососимметрична. Доказать, что если матрица A ненулевая, то она имеет чисто мнимое собственное число.

3. В квадрате со стороной длины 1 в плоскости даны n точек. (a) Доказать, что найдется содержащий их связный граф (данные точки могут быть его вершинами или находиться на ребрах, могут быть и другие вершины), сумма длин ребер которого не больше $3\sqrt{n}$. (b) Доказать, что ни при каком $n > 1$ нельзя гарантировать оценку $2^{-1}\sqrt{n}$.

4. Прочитав курс из 30 лекций по теории конечных множеств, профессор Наблюдательный задумался: на каждой лекции не менее 10 студентов занимали не те места, на которых они сидели в прошлый раз; означает ли это, что для некоторого непустого множества студентов X множество мест, занимаемых студентами из X, изменялось на каждой лекции? Предполагается, что мест столько же, сколько студентов, причем нет прогульщиков.

5. Пусть функция f непрерывна на $[1, +\infty)$, $f > 1$ и

$$f(yx) \geq f(x)^{y^2} \quad \forall\, x \geq 1,\ \forall\, y \geq 1.$$

Доказать, что для всех $x \geq 1$ имеем

$$\int_1^x f(y)\, dy \leq C\frac{f(x)}{x},$$

где C — постоянная.