Обратные вторая и третья леммы Уайтхеда

П. Зусманович
Tallinn University of Technology
pasha.zusmanovich@ttu.ee

Первая (соответственно, вторая) лемма Уайтхеда гласит, что первые (соответственно, вторые) когомологии конечномерной полупростой алгебры Ли над полем характеристики 0 с коэффициентами в конечномерном модуле равны нулю. Для третьих и более высоких когомологий это уже неверно, однако верно близкое утверждение, которое можно назвать третьей леммой Уайтхеда: если дополнительно потребовать чтобы представление было неприводимым и нетривиальным, то и высшие когомологии равны нулю.

Все это хорошо известные классические результаты. Естественно задаться вопросом, верны ли обратные утверждения: будет ли из равенства нулю соответствующих когомологий следовать полупростота алгебры. Для первой леммы Уайтхеда обращение хорошо и давно известно.

Странно, что до недавнего времени никто не задавался тем же самым вопросом для второй и третьей лемм.

Мы покажем, что эти обращения “почти верны”, а именно:

- Если вторые когомологии конечномерной алгебры Ли над полем характеристики 0 в любом конечномерном модуле равны нулю, то алгебра либо одномерна, либо полупроста, либо есть прямая сумма полупростой и одномерной.
- Если все третьи и более высокие когомологии конечномерной алгебры Ли размерности > 3 над полем характеристики 0 в любом неприводимом нетривиальном модуле равны нулю, то алгебра есть прямая сумма полупростой и нильпотентной.

Доказательство получается несложной комбинацией классических разультатов о структуре (разложение Леви–Мальцева) и когомологиях (спектральная последовательность Хохшильда–Серра) алгебр Ли, а также двойственности Хазевинкеля [1].

По мотивам работ [2] и [3].

Список литературы

[1] М. Хазевинкель. Теорема двойственности для когомологии алгебр Ли. Матем. сб., 1970, т. **83**, с. 639–644.

[2] P. Zusmanovich. A converse to the Second Whitehead Lemma. J. Lie Theory, 2008, vol. **18**, pp. 295–299, see also arXiv: `math.RA/0704.3864v2`.
[3] P. Zusmanovich. A converse to the Whitehead Theorem. J. Lie Theory, 2008, vol. **18**, pp. 811–815, see also arXiv: `math.RA/0808.0212v3`.