Задачи, предлагавшиеся на зачете по предмету "Теория вероятностей и математическая статистика"(4 курс отделения механики механико-математического факультета МГУ).

1. Пусть $X_1, ..., X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностью Коши. Найти плотность случайной величины $\frac{X_1+...+X_n}{n}$.

2. Пусть X_1, X_2 – независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением. Найти плотность ${X_1}^2 + {X_2}^2$.

3. Найти вероятность приобретения "счастливого"автобусного билета, считая появление каждого билета равновероятным (билет состоит из шести цифр, билет является "счастливым если сумма первых трех его цифр равна сумме последних трех цифр).

4. Пусть X_1, X_2 – независимые случайные величины со стандартным нормальным распределением. Найти плотность X_1/X_2.

5. Пусть X – случайная величина со стандартным нормальным распределением. Найти $\mathrm{E}X^n, n = 1, 2, ...$

6. Пусть X – случайная величина с распределением Коши. Найти плотность $1/X$.

7. Найти коэффициент корреляции между числом выпадений трех очков и шести очков при n бросаниях игральной кости.

8. При 10000 бросаниях монеты герб выпал 5400 раз. Следует ли считать, что монета несимметрична?

9. Чтобы найти процент женщин p в некотором обществе, производится выборка. Найти такой объем выборки n, чтобы с вероятностью не меньшей 0.99, ошибка при оценке p была не больше 0.005.

10. Пусть (X, Y) – нормальный вектор. Доказать, что X и

Y – независимые случайные величины тогда и только тогда, когда их ковариация равна 0.

11. Для параметра θ в равномерном законе распределения $R\,[0, \theta]$ по выборке $X_1, ..., X_n$ получены две оценки: $(n + 1/n) \max\limits_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}$ и $(2/n) \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$. Какая из оценок предпочтительнее?

12. Используя закон больших чисел, показать, что если $f(x)$ – непрерывная функция на отрезке $[0, 1]$, то, так называемые полиномы Бернштейна $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1 - x)^{n-k}$ будут равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$ к функции $f(x)$ при $n \to \infty$.

13. Доказать, что слабая сходимость эквивалента сходимости по распределению.

14. Доказать, что из сходимости по вероятности следует сходимость по распределению.

15. Доказать, что из сходимости случайных величин по распределению к константе следует их сходимость к этой константе по вероятности.

16. Найти математическое ожидание числа фрагментов 110 в 20 испытаниях Бернулли.

17. Найти математическое ожидание первой и второй серий в схеме Бернулли.

18. Сколько различных результатов может быть получено при бросании 20-ти неразличимых игральных костей? Тот же вопрос для 20-ти различимых игральных костей. Считая все результаты равновероятными, в обоих случаях найти вероятность того, что результат не содержит двойку.

19. Брошено две игральных кости. Пусть X_1 – количество очков на первой кости, X_2 – количество очков на второй кости. A обозначает событие $\max\{X_1, X_2\} < 5$, B – $\min\{X_1, X_2\} >$

3. Зависимы или нет эти события? Найти $\mathrm{P}\left(A \middle| B\right)$.

20. Найти методом максимума правдоподобия оценку вероятности успеха p при n испытаниях Бернулли. Проверить ее несмещенность и состоятельность.

21. Пусть $X_1, ..., X_n$ – выборка и X_i распределены по закону Пуассона с неизвестным параметром λ. Проверить эффективность оценки $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ параметра λ.

22. Случайная величина X имеет показательное распределение с параметром 2. Найти плотность распределения случайной величины e^X.

23. Случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке $[-1, 2]$. Найти дисперсию $|X|$.