

Контрольная работа N1

Параметры задания $l, m, n, q, r, \alpha_1, \alpha_2, \gamma, \theta, \nu, \psi_0$.

Обозначим r , $1 \leq r \leq 100$, идентификационный номер студента (ИНС). Он присваивается студенту преподавателем. Значения величин параметров контрольной работы для студента с идентификационным номером r полагаются равными

$$\begin{aligned} l &= \left[\frac{n+q}{3} \right], & \alpha_1 &= 0.01 + \frac{r}{1000}, & \psi_0 &= 0.25 + \frac{r}{100}, \\ m &= 5 + (8r) \bmod 11, & \alpha_2 &= \alpha_1 + (-1)^r 0.01, & \nu &= 0.05 + \frac{r}{100}, \\ n &= m + (-1)^r 2, & \gamma &= 0.9 + (-1)^r \frac{r-1}{1000}, & \mu_0 &= (-1)^{r \bmod 2} \left\{ 2(r \bmod 2) + \frac{1}{r} \right\}, \\ q &= \left[\frac{m+n}{2} \right], & \theta_0 &= 2 + \frac{r}{20}, \end{aligned}$$

Пусть $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ – независимая выборка из стандартной нормальной совокупности, т.е. x_i – н.о.р. случайные величины, $x_i \stackrel{d}{=} N(0, 1)$, $i = \overline{1, m}$; $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ и $z = (z_1, \dots, z_q)^T$ – независимые выборки из равномерного распределения на $[0, 1]$, т.е. y_i и z_j – независимые случайные величины, $y_i \stackrel{d}{=} U(0, 1)$, $i = \overline{1, n}$, $z_j \stackrel{d}{=} U(0, 1)$, $j = \overline{1, q}$; n, m, q – целые положительные числа.

1. Постройте графики эмпирической функции распределения $\hat{F}_k(u)$ и $F_0(u)$ в одной и той же координатной системе для

1.1. данных $x, k = m$ и $F_0(u) = \Phi(u)$, где $\Phi(u) = \int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{v^2}{2}\} dv$;

1.2. данных $y, k = n$ и

$$F_0(u) = \begin{cases} 0, & u \leq 0 \\ u, & 0 < u \leq 1 \\ 1, & u > 1. \end{cases}$$

1.3. Прокомментируйте наблюдаемое различие в поведении графиков \hat{F}_k и F_0 .

2. При ошибке первого рода α_1 на основе использования критериев Колмогорова или одностороннего критерия Смирнова проверьте

2.1. гипотезу $\Gamma_1 : x_1 \stackrel{d}{=} N(0, 1)$ против альтернативы $\Gamma_2 : x_1 \stackrel{d}{\neq} N(0, 1)$;

2.2. гипотезу $\Gamma_1 : x_1 \stackrel{d}{=} N(\frac{1}{r}, 1)$ против альтернативы $\Gamma_2 : x_1 \stackrel{d}{\neq} N(\frac{1}{r}, 1)$;

2.3. гипотезу $\Gamma_1 : x_1 \stackrel{d}{=} N(0, 1)$ против альтернативы $\Gamma_2 : x_1 \stackrel{d}{=} N(\mu, 1)$.

2.4. Вычислите наблюдаемый уровень значимости соответствующих критериев.

3. При ошибке первого рода α_1 на основе использования двусторонних критериев Смирнова проверьте

3.1. гипотезу Γ_1 об однородности выборок x и y ;

3.2. гипотезу Γ_1 об однородности выборок y и z .

3.3. Вычислите наблюдаемые уровни значимости критериев.

- 3.4. Прокомментируйте полученные статистические выводы.
4. Продолжим анализ данных x . Пусть для проверки гипотезы $\Gamma_1 : x_1 \stackrel{d}{=} N(0, 1)$ при альтернативе $\Gamma_2 : x_1 \stackrel{d}{=} N(\frac{1}{r}, 1)$ используется критерий Неймана-Пирсона с ошибкой первого рода α_1 .
- 4.1. Будет ли принята для данных x гипотеза Γ_1 ?
- 4.2. Как часто будет приниматься гипотеза Γ_2 этим критерием, когда Γ_2 верна?
- 4.3. Каков наблюдаемый уровень значимости данных x для критерия отношения правдоподобий в задаче проверки Γ_1 против Γ_2 ?
- 4.4. Каков объем выборки m необходимо было бы взять, чтобы ошибка второго рода при проверке гипотезы Γ_1 против гипотезы Γ_2 не превзошла α_2 ?
5. Постройте γ -доверительную полосу $H_\gamma(y)$ для порождающего распределения выборки y .
- 5.1. Проверьте графически, накрывается ли γ -доверительной полосой для порождающего распределения выборки y функция распределения случайной величины $N(\frac{1}{r}, 1)$.
- 5.2. Если такое событие произойдет, то как это объяснить в свете предположения о равномерной распределенности случайных величин $y_i, i = \overline{1, n}$?
- 5.3. Гипотезу $\Gamma_1 : y_1 \stackrel{d}{=} U(0, 1)$ против альтернативы $\Gamma_2 : y_1 \stackrel{d}{\neq} U(0, 1)$ будем проверять на основе следующего критерия:
- если γ -доверительная полоса $H_\gamma(y)$ накрывает функцию распределения $\mathcal{L}(U(0, 1))$, то Γ_1 принимается; в противном случае Γ_1 отвергается в пользу Γ_2 .*
- Определите, какова ошибка первого рода сформулированного выше критерия при проверке Γ_1 против Γ_2 .
6. Используя данные y , породите независимую выборку $w = (w_1, \dots, w_n)^T$ из n наблюдений над пуассоновской случайной величиной с параметром θ_0 , т.е. $w_i = POIS(\theta_0), i = \overline{1, n}$. На основе полученных данных w
- 6.1. Проверьте гипотезу $\Gamma_1 : \theta_0 = 1$ против альтернативы $\Gamma_2 : \theta_0 = 5$, используя *равномерно наиболее мощный* критерий (РНМ-критерий). Примите ошибку первого рода равной α_1 .
- 6.1.1. Какова ошибка второго рода РНМ-критерия для сформулированной выше статистической задачи?
- 6.1.2. Каково значение функции мощности РНМ-критерия для значения параметра $\theta = 2$?
- 6.2. Как Вы прокомментируете результат принятия гипотезы Γ_1 или Γ_2 на основе полученных Вами данных?
- 6.3. Постройте методом сечений γ -доверительный интервал для параметра θ_0 . Как будет изменяться длина этого интервала в зависимости от изменения значения доверительной вероятности γ .

- 6.4. Проиллюстрируйте графически процесс построения γ -доверительного множества для параметра θ_0 .
- 6.5. На основе полученного доверительного интервала постройте γ -доверительный интервал для вероятности $\mathbf{P}\{POIS(\theta_0) > \frac{r}{10}; \theta_0\}$.
- 6.6. Вычислите значения ОМП и оценки по методу моментов для $g_1(\theta_0) = D(\check{\theta}; \theta_0)$ и $g_2(\theta_0) = \mathbf{P}\{POIS(2\theta_0) > \frac{r}{30}; \theta_0\}$.
- 6.6.1. Являются ли полученные оценки несмещенными?
- 6.6.2. Найдите дисперсию ОМП для $g_1(\theta_0)$.
7. Используя данные y и z породите независимую выборку $t = (t_1, \dots, t_l)$, где $t_i \stackrel{d}{=} BIN(1; \psi)$, $0 < \psi < 1$, $i = \overline{1, l}$.
- 7.1. Постройте методом сечений верхние γ -доверительные границы для параметра ψ_0 и функции $g(\psi_0) = \mathbf{P}\{BIN(40; \psi_0) > 20\}$ на основе полученных данных t .
- 7.1.1. Проиллюстрируйте графически процесс построения верхних γ -доверительных границ для параметра ψ_0 на основе метода сечений.
- 7.2. Будет ли принята простая гипотеза $\Gamma_1 : \psi_0 = \nu$, $0 < \nu < 1$, против сложной альтернативы $\Gamma_2 : \psi_0 \neq \nu$ критерием значимости с критической функцией
- $$\varphi(t) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \bar{\in} (\underline{\theta}(t; \gamma), \bar{\theta}(t; \gamma)) \\ 0, & \frac{1}{2} \in (\underline{\theta}(t; \gamma), \bar{\theta}(t; \gamma)) \end{cases}$$
- Здесь $(\underline{\theta}(t; \gamma), \bar{\theta}(t; \gamma))$ – γ -доверительный симметричный по вероятности интервал для ψ_0 , построенный для полученной выше выборки t .
- 7.2.1. Какова формула для ошибки первого рода рассматриваемого критерия?
- 7.2.2. Какой альтернативный критерий с ошибкой первого рода α_1 для проверки гипотезы Γ_1 против Γ_2 можно предложить? Будет ли критерий на основе $T(t) = \sum_{i=1}^l t_i$ несмещенным РНМ-критерием?
8. Для x – независимой выборки из нормальной совокупности с неизвестными средним и дисперсией, т.е. $x_i \stackrel{d}{=} N(\mu_0, \sigma_0^2)$, $i = \overline{1, m}$,
- 8.1. Найдите несмещенные оптимальные оценки для μ_0 и σ_0^2 . Достигают ли они соответствующей нижней границы Крамера-Рао?
- 8.2. Постройте γ -доверительные симметричные по вероятности интервалы для μ_0 и σ_0^2 .
- 8.3. Считая, что ошибка первого рода равна α_1 , проверьте гипотезы
- 8.3.1. $\Gamma_1 : \mu_0 = 1.5$ против альтернативы $\Gamma_2 : \mu_0 \neq 1.5$;
- 8.3.2. $\Gamma_1 : \sigma_0^2 = 2$ против альтернативы $\Gamma'_2 : \sigma_0^2 > 2$ (для четных r) или против альтернативы $\Gamma''_2 : \sigma_0^2 < 2$ (для нечетных r).
- 8.3.3. Прокомментируйте полученные статистические выводы.