КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА N2
ПО КУРСУ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Лектор Е.В.Чепурин

CHEPUR \ K_ RAB \ N2 \ N2 \ vopros.txt

Пусть $y = (y_1, \dots y_n)^T$, $y_i \in R^1$, y_i - н.о.р. случайные величины, $i = \overline{1,n}$,

$$\mathcal{L}'(y_i) = f(u;\theta_0), \quad \theta_0 \in \Theta,$$

Θ - параметрическое пространство.

1. Нарисуйте график плотности распределения случайной величины y_1 для тех значений θ , которые представляют все возможные его формы.

2. Какова у данной статистической модели минимальная достаточная статистика?

   2.1. Полна ли она?

   2.2. Найдите ее распределение.

3. Рассматривается задача точечного оценивания значения $g(\theta_0)$ функции g в классе оценок $\mathcal{K} = \{t(y)\}$ при квадратической функции потерь $W(g,t) = (t-g)^2$.

   3.1. Найдите $\hat{t}^0$ – НОРМД и $\check{t}$ – ОМП функции g .

   3.2. Вычислите R_1 и R_2 квадратические риски оценок $\hat{t}^0$ и $\check{t}$ соответственно.

   3.3. Существует ли в $\mathcal{K}$ оценка, миниминизирующая среднеквадратический риск

   $$R(t,g;\theta) = \mathbf{E}\{(t(y) - g(\theta))^2;\theta\}$$

   равномерно по всем $\theta \in \Theta$, если $\mathcal{K} = \{\hat{t}^0, \quad \check{t}\}$?

4. Для рассматриваемой статистической модели найдите следующие характеристики

   4.1. Информационную функцию (матрицу) Фишера.

   4.2. Границу Крамера-Рао для несмещенных оценок функций $g(\theta)$ и $\mathbf{E}\{\check{t};\theta\}$ соответственно.

5. Достигает ли риск оценки $\hat{t}^0$ нижней границы Крамера-Рао или какой-либо границы Бхаттачария порядка два?

6. Для параметров рассматриваемой модели постройте γ -доверительное множество.

   6.1. Существует ли центральная функция? Если она существует, то каков ее вид и каково ее распределение?

   6.2. Какую статистику $t(y)$ следует взять для построения γ -доверительных множеств методом сечений, если центральной статистики не существует?

      6.2.1. К какому семейству принадлежит $\mathbf{P}\{t(y) \le v;\theta_0\} = F(v;\theta_0)$ – функция распределения статистики $t(y)$, $\theta_0 \in \Theta$?

      6.2.2. Является ли $F(\cdot;\theta)$ монотонной функцией параметра θ ?

      6.2.3. Как видоизменяются уравнения для определения границ доверительных интервалов в зависимости от типа монотонности $F(\cdot;\theta)$ по параметру θ ?

      6.2.4. Предложите способ вычисления доверительных границ для параметра θ_0 .

   6.3. Постройте для $g(\theta_0)$ нижнюю консервативную γ -доверительную границу.

7. Исследуйте асимптотические свойства ОМП и оценок по методу моментов для θ_0 и $g(\theta_0)$ при $n \to \infty$.

   7.1. Покажите, что эти оценки состоятельны.

   7.2. Найдите предельные распределения оценок и параметры предельных распределений.

   7.3. В случае асимптотической нормальности оценок найдите асимптотическую эффективность по Леману оценок по методу моментов относительно ОМП.

8. Предположим, что необходимо построить при $n \to \infty$ асимптотические γ-доверительные множества для θ_0 и $g(\theta_0)$.

   8.1. Посоройте асимптотическое γ-доверительное множество для параметра θ_0 и для его отдельных компонент, если $dim\,\theta_0 > 1$. В качестве базовой статистики используйте $\check{\theta}_n$ - ОМП параметра θ_0.

   8.2. Постройте асимптотические γ-доверительные интервалы для $g(\theta_0)$ на основе ОМП и оценок по методу моментов для $g(\theta_0)$.

   8.3. Каков из методов пункта 8.2 представляется предпочтительным, если в качестве показателя качества взять предел при $n \to \infty$ отношения средних длин γ-доверительных интервалов.

9. Пусть необходимо проверить гипотезу $\Gamma_1 \ : \ g(\theta_0) \ \leq \ a_1$ против альтернативы $\Gamma_2 : g(\theta_0) \geq a_2, a_1 < a_2$.

   9.1. Существует ли для сформулированной выше задачи РНМ-критерий?

   9.2. Является ли предложенный Вами критерий несмещенным?

   9.3. Считая, что $n \to \infty$, постройте для сформулированнной выше задачи критерий асимптотического размера α_1 на основе ОМП для $g(\theta_0)$.