1 Сходимость случайных последовательностей.

1. Показать, что из $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi$ при $n \to \infty$ следует, что $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$ при $n \to \infty$.

2. Пусть c — константа, и $\xi_n \xrightarrow{D} c$. Показать, что в таком случае $\xi_n \xrightarrow{P} c$.

3. Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. Покажите, что последовательность ξ_n фундаментальна (по вероятности). (Предварительно дайте определение фундаментальной последовательности).

4. Пусть $\varphi(\cdot)$ — непрерывная функция, $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. Покажите, что $\varphi(\xi_n) \xrightarrow{P} \varphi(\xi)$.

5. Пусть $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$, $\eta_n \xrightarrow{P} \eta$, причем все эти величины заданы на одном пространстве элементарных исходов. Покажите, что a) $\xi_n + \eta_n \xrightarrow{P} \xi + \eta$, b) $\xi_n\eta_n \xrightarrow{P} \xi\eta$.

6. Пусть $\xi_n = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$, где S_n — число успехов в n испытаниях Бернулли, где p — вероятность успеха в единичном испытании, $q = 1 - p$. Показать, что последовательность ξ_n не имеет предела (в смысле сходимости по вероятности).

7. Пусть ξ_n — целочисленные случайные величины. Покажите, что $\xi_n \xrightarrow{D} \xi$ тогда и только тогда, когда $\mathsf{P}(\xi_n = m) \to \mathsf{P}(\xi = m)$ для любого m.

2 Статистические модели.

1. Предположим, что время работы X некоторого прибора до его отказа (поломки) распределенно по показательному закону

$$\mathsf{P}(X > u) = \exp(-u/\theta) \quad \text{для } u \geq 0,$$

где $\theta > 0$ — параметр. Построить статистические модели (т. е. указать выборочные пространства и распределения на этих пространствах) для следующих экспериментов (эти испытания проводят ради определения неизвестного θ):

a) испытывают n приборов — до отказа их всех

b) испытывают n приборов в течение времени T

c) испытывают n приборов до появления заданного числа r отказов.

2. В условиях предыдущей задачи пусть $0 < t_1 < t_2 < \ldots$ суть последовательные моменты отказов (при испытании n приборов). Покажите, что случайные величины $t_1, t_2 - t_1, t_3 - t_2, \ldots$ независимы и распределены по показательным законам (укажите, каковы параметры этих законов).

3. Рассмотрим партию из N однородных изделий. Неизвестное число $M = \theta N$ из этих изделий имеют дефекты. Чтобы оценить θ, извлекают наудачу n изделий ($n < N$). a) Предложите статистическую модель. b) Пусть μ — число дефектных изделий в выборке объема n. Вычислите $\mathsf{E}\mu/n$, $\mathsf{D}(\mu/n)$. c) Предложите другие планы эксперимента (ради оценивания θ).

4. Пусть случайные величины $x_1, \ldots, x_m$ независимы и одинаково распределены по показательному закону с параметром $\theta > 0$. Найти плотность распределения a) $x_1 + x_2$; b) $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$.

5. Используя результаты предыдущей задачи, выведите формулу свертки для плотностей Γ-распределений (гамма-распределений). Попутно покажите, что $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ (здесь Γ и B суть гамма- и бета-функции Эйлера).

6. Выведите формулу для плотности (центрального) распределения χ^2 (хи-квадрат), с m степенями свободы.

3 Неравенства Крамера – Рао.

1. Выведите неравенство Крамера – Рао для семейства дискретных распределений.

2. Покажите, что частота является эффективной оценкой вероятности успеха в испытаниях Бернулли.

3. Пусть $x_1, \ldots, x_m$ — выборка из показательного распределения с параметром $\theta > 0$. (Это значит, что плотность случайной величины x_i равна $\theta^{-1} \exp\{-\theta^{-1}x\}$ для $x \geq 0$). Покажите, что $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ — эффективная оценка θ.

4. В условиях предыдущей задачи рассмотрите для θ другую оценку, например, полученную таким моментным методом:
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i^2 = \mathsf{E}_\theta x_1^2.$$
Для этой оценки составьте неравенство Крамера – Рао.

5. Примените многомерное неравенство Крамера – Рао к паре $(\overline{x}, s^2)$, как оценке (a, σ^2) по выборке из $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$, и убедитесь, что $(\overline{x}, s^2)$ не является эффективной оценкой (a, σ^2).

6. Пусть случайная величина $X = \theta + \xi$, где θ — постоянная, случайная величина ξ имеет плотность f, причем f' существует. Найти $I_X(\theta)$.

7. Пусть $X = (x_1, \ldots, x_m)$ — выборка из распределения Пуассона с параметром $\theta \in [0, \infty)$. Пусть $T = \sum_{i=1}^n x_i$. Покажите, что $I_X(\theta) = I_T(\theta)$.

4 Условное математическое ожидание.

1. Дайте пример, когда $\mathsf{E}(\xi|\eta) = \mathsf{E}\xi$, но случайные величины ξ и η не независимы.

2. Условной дисперсией относительно σ-алгебры $\mathcal{J}$ называют
$$\mathsf{D}(\xi|\mathcal{J}) = \mathsf{E}\left((\xi - \mathsf{E}(\xi|\mathcal{J}))^2 \,|\mathcal{J}\right) \;-$$
по аналогии с обычным определением дисперсии. Покажите, что
$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{E}\mathsf{D}(\xi|\mathcal{J}) + \mathsf{D}\mathsf{E}(\xi|\mathcal{J}).$$

3. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ и τ — независимые случайные величины, причем $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — одинаково распределены, а τ принимет только натуральные значения. Введем $S_\tau = \xi_1 + \ldots + \xi_\tau$. Показать, что
$$\mathsf{E}\left(S_\tau|\tau\right) = \tau\mathsf{E}\xi_1, \quad \mathsf{D}\left(S_\tau|\tau\right) = \tau\mathsf{D}\xi_1,$$
$$\mathsf{E}\left(S_\tau\right) = \left(\mathsf{E}\tau\right)\left(\mathsf{E}\xi_1\right), \quad \mathsf{D}\left(S_\tau\right) = \left(\mathsf{E}\tau\right)\left(\mathsf{D}\xi_1\right) + \left(\mathsf{D}\tau\right)\left(\mathsf{E}\xi_1^2\right).$$

4. Пусть ξ и η — случайные величины. Показать, что

$$\inf_{f(\cdot)} \mathsf{E}\left(\eta - f(\xi)\right)^2$$

достигается при $f(\xi) = \mathsf{E}\left(\eta | \xi\right)$.

5. Пусть ν — случайные величина, распределенная по закону Пуассона. Проводится ν испытаний Бернулли, вероятность успеха в которых постоянна и не зависит от ν. Пусть X — число успехов, Y — число неудач.

   a) Показать, что X и Y — независимы.

   b) Найти $\mathsf{E}\left(\nu | X\right)$.

5 Достаточные статистики, несмещенные оценки.

1. Пусть $X = (x_1, \ldots, x_n)$ — выборка из распределения Пуассона с параметром $\theta > 0$. Покажите, что статистика $T = \sum_{i=1}^n x_i$ — достаточна для θ.

   a) вычислив условное распределение X при заданном T;

   b) применив теорему факторизации.

   Покажите, что T — полная достаточная статистика.

2. Из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$, $\theta > 0$, извлечена выборка $X = (x_1, \ldots, x_n)$.

   a) Применив теорему факторизации, убедитесь, что $x_{(n)} = \max(x_1, \ldots, x_n)$ — достаточная статистика для θ.

   b) Найдите условное распределение x_1 при данном $x_{(n)}$.

   c) Покажите, что $x_{(n)}$ — полная достаточная статистика.

3. Укажите достаточная статистику для пары (a, σ^2) по выборке из $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

4. Пусть X — случайный вектор (столбец), $X \sim \mathcal{N}(l, \sigma^2 Q)$, где Q — заданная невырожденная матрица; вектор l и скаляр σ^2 — неизвестны (суть параметры распределения X).

   a) Покажите, что Q — положительно определенная матрица;

   b) Укажите для l, σ^2 достаточные статистики когда: b1) $Q = I$ — единичная матрица; b2) Q — произвольна.

5. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — выборка из показательного распределения с параметром $\theta > 0$.

   a) Покажите, что $T = \sum_{i=1}^n x_i$ — полная достаточная статистика для θ.

   b) Найдите наилучшую несмещенную оценку для θ по правилу $\mathsf{E}_\theta\left(x_1 | T\right)$, предварительно убедившись, что $\mathsf{E}_\theta\left(x_1\right) = \theta$.

   c) Пусть $x_{(1)} < x_{(2)} < \ldots < x_{(n)}$ — порядковые статистики указанной выше выборки. Предположим, что наблюдаемы лишь r первых порядковых статистик: $x_{(1)}, \ldots, x_{(r)}$. Укажите в этих условиях достаточную статистику для θ и несмещенную оценку θ.

6 Наилучшие несмещенные оценки.

1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка, $\mathsf{D}x_i = \sigma^2$. Покажите, что $\frac{1}{2n(n-1)} \sum_{1 \le i \ne j \le n} (x_i - x_j)^2$ — несмещенная оценка σ^2.

2. Как оценить σ по выборке из $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$?

   a) Покажите, что можно подобрать независящие от a, σ^2 множители $k_1(n)$, $k_2(n)$ так, чтобы

   $$\sigma_1^* = k_1(n) \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2}, \quad \sigma_2^* = k_2(n) \left(\frac{1}{n} \sum_{1 \le i \ne j \le n} |x_i - x_j| \right)$$

   несмещенно оценивали σ.

   b) Какая из двух оценок предпочтительнее (точнее)?

3. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка из распределения Пуассона. Найдите наилучшую несмещенную оценку для $\mathsf{P}(X = m)$, где m — задано a) в случае $n = 1$, b) в общем случае.

4. Рассмотрим n испытаний Бернулли, вероятность успеха в которых обозначим через θ, $\theta \in (0, 1)$ — неизвестный параметр.

   a) Покажите, что число успехов есть полная достаточная статистика.

   b) Найдите наилучшую несмещенную оценку для $\theta(1 - \theta)$.

   c) Покажите, что для $\frac{\theta}{1-\theta}$ не существует несмещенной оценки.

   d) Какие функции от θ можно оценить несмещенно?

5. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка из показательного распределения с параметром $\theta > 0$. Найдите наилучшую несмещенную оценку для функции распределения $F(y; \theta) = \mathsf{P}_\theta(x_1 \le y)$.

7 Линейные гауссовские модели, оценки наименьших квадратов.

1. Пусть α, β и γ суть результаты независимых измерений углов треугольника A, B и C:

   $$\alpha \sim \mathcal{N}\left(A, \sigma^2\right), \ \beta \sim \mathcal{N}\left(B, \sigma^2\right), \ \gamma \sim \mathcal{N}\left(C, \sigma^2\right).$$

   Укажите для A, B и C оценки более точные, чем α, β и γ.

2. Пусть $X \sim \mathcal{N}(l, \sigma^2 \Lambda)$, где $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \ldots, \lambda_n^2)$ — заданная диагональная матрица, l и σ^2 — неизвестные параметры, причем $l \in L$, L — заданное линейное подпространство. Покажите, что наилучшую несмещенную оценку для l нужно искать по правилу

   $$\widehat{l} = \arg\min_{l \in L} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - l_i^2\right) / \lambda_i^2.$$

3. Пусть $X \sim \mathcal{N}(l, \sigma^2 I)$, причем $l \in L$, L — задано. Пусть M — некоторое линейное подпространство, более широкое, нежели $L: \ L \subset M$. Рассмотрим для l две оценки:

   $$\widehat{l}_1 = \operatorname{proj}_L X \quad \text{и} \quad \widehat{l}_2 = \operatorname{proj}_M X.$$

   Какая из этих двух несмещенных оценок точнее?

4. *Простая линейная регрессия.* Наблюдаем случайные величины y_i, $i = 1, \ldots, n$, где

$$y_i = A + Bx_i + \varepsilon_i,$$

причем $x_1, \ldots, x_n$ — заданы, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ суть независимые $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-величины.

a) Почему предпочтительнее модель

$$y_i = a + b\,(x_i - \overline{x}) + \varepsilon_i?$$

b) Найти для a, b наилучшие несмещенные оценки $\widehat{a}$, $\widehat{b}$.

c) Указать их распределения, и показать, что $\widehat{a}$ и $\widehat{b}$ независимы (как случайные величины).

5. *Оценки наименьших модулей.*

a) Пусть ξ — случайная величины. Показать, что решением экстремальной задачи $\mathsf{E}\,|\xi - a| \to \min_a$ служит медиана μ случайной величины, т. е. такое число, что $\mathsf{P}\,(\xi < \mu) = \mathsf{P}\,(\xi > \mu) = 1/2$. (Считаем, что функция распределения $F_\xi(x)$ такова, что $F'_\xi(\mu) > 0$.)

b) Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка. Покажите, что $\arg\min_a \sum_{i=1}^n |x_i - a| = \mathrm{med}(x_1, \ldots, x_n)$.

6. Двухфакторная модель, одно наблюдение в клетке. Наблюдаемы случайные величины x_{ij}, где $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, s$, причем $x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$ для некоторых неизвестных μ, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$ таких, что $\sum_{i=1}^r \alpha_i = 0 = \sum_{j=1}^s \beta_j$, ε_{ij} — неизвестные в совокупности $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$-величины, σ^2 — неизвестно.

a) Доказать тождество

$$\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (x_{ij} - \mu - \alpha_i - \beta_j)^2 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (x_{ij} - x_{i\cdot} - x_{\cdot j} + x_{\cdot\cdot})^2 +$$

$$s \sum_{i=1}^r (x_{i\cdot} - x_{\cdot\cdot} - \alpha_i)^2 + r \sum_{j=1}^s (x_{\cdot j} - x_{\cdot\cdot} - \beta_i)^2 + rs\,(x_{\cdot\cdot} - \mu)^2\,,$$

в предположении, что

$$x_{i\cdot} = s^{-1} \sum_{j=1}^s x_{ij},\ x_{\cdot j} = r^{-1} \sum_{i=1}^r x_{ij},\ x_{\cdot\cdot} = (rs)^{-1} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s x_{ij}.$$

b) Показать, что описанная двухфакторная модель идентифицируема, т. е., что решение системы уравнений относительно μ, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$

$$\begin{cases} \mu + \alpha_i + \beta_j = a_i + b_j, & ,1 \le i \le r,\ 1 \le j \le s, \\ \sum_{i=1}^r \alpha_i = 0, \\ \sum_{j=1}^s \beta_j = 0 \end{cases}$$

существуют и единственно для заданных чисел a_i, b_j, $1 \le i \le r$, $1 \le j \le s$.

c) Найти для неизвестных μ, $\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, σ^2 оценки наименьших квадратов (они же — наилучшие несмещенные оценки).

7. Пусть $(x_1, \dots, x_m)$ и $(y_1, \dots, y_n)$ — две независимые выборки из $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ и $\mathcal{N}(2a, \sigma^2)$ соответственно. Найти для a, σ^2

   a) достаточные статистики;

   b) наилучшие несмещенные оценки;

   c) оценки наибольшего правдоподобия.

8. Каждый из углов треугольника был измерен дважды (измерен $n \geq 2$ раз). Примем статистическую модель: результаты измерений суть независимые случайные величины, отличающиеся от истинных значений за счет случайных слагаемых (случайных ошибок) вида $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, σ^2 — неизвестно. Предложите статистическое правило для проверки утверждения евклидовой геометрии, что $A + B + C = \pi$.

9. На дороге соединяющей города A и D, находятся поселки B и C. (Порядок следования: A, B, C, D.) Были измерены расстояния между A и C, между B и C, между B и D, а также между A и D, которые дали результаты x, y, z и w соответственно. Будем считать результаты измерений независимыми случайными величинами, отличающимися от истинных расстояний за счет случайных слагаемых (ошибок измерения) вида $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Укажите наилучшие оценки для расстояний между B и C и между A и D. Найдите их дисперсии, а также оценку для неизвестной величины σ^2.

8 Доверительные интервалы.

1. Даны результаты $n = 6$ незавиисимых измерений некоторой неизвестной величины a:

$$2.30;\ 1.96;\ 2.05;\ 2.15;\ 1.98;\ 1.93.$$

   Примем статистическую модель, согласно которой каждое измерение представляет собой сумму $a + \varepsilon$, где ε — случайная величина (ошибка), распределенная нормально, причем $\mathsf{E}\varepsilon = 0$, $\mathsf{D}\varepsilon = \sigma^2$. Дисперсия ошибки — σ^2 — неизвестна. Укажите для a доверительные интервалы, выбрав доверительные вероятности 0.90, 0.95 и 0.99.

2. Пусть наблюдения y_i, $i = 1, \dots, n$, образуют простую линейную регрессию по переменной x, т. е. $y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$, где a и b — неизвестные параметры, $x_1, \dots, x_n$ — заданы, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ суть независимые $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, причем σ^2 неизвестна.

   a) Указать правило для интервального оценивания b (коэффициента наклона).

   b) Для данного значения x рассмотрим прогноз для y: $\widehat{y} = \widehat{a} + \widehat{b}x$, где $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ — оценки, полученные по указанным выше наблюдениям. Указать доверительные интервалы для $a + bx$, основываясь на свойствах $\widehat{a} + \widehat{b}x$.

3. По выборке объема n из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$, где $\theta > 0$ — неизвестный параметр, построить для θ доверительные интервалы, основанные на статистике $\max(x_1, \dots, x_n)$.

4. По выборке из показательного распределения с параметром $\theta > 0$ построить для неизвестного θ нижнюю доверительную границу (заданной доверительной вероятности).

9 Проверка статистических гипотез.

1. О распределении случайной величины X есть две гипотезы: H_1 и H_2.

   Гипотеза H_1: X распределено по нормальному закону $\mathcal{N}(0, 3)$.

   Гипотеза H_2: X распределено равномерно на отрезке $[-3, 3]$.

   Каков вид допустимых решающих правил, если решение (выбрать H_1 или H_2) надо принять по одному наблюдению?

2. Дана выборка из распределения Пуассона с параметром θ, $\theta > 0$. Укажите вид наиболее мощного критерия для проверки гипотезы $H_0 : \ \theta \le \theta_0$ (θ_0 — задано) против $H_1 : \ \theta > \theta_0$.

3. В схеме простой линейной регрессии с гауссовскими ошибками предложите критерии для проверки гипотез $H_a : \ a = 0$, $H_b : \ b = 0$, где a, b — коэффициенты пересечения и наклона соответственно.

4. В однофакторной моели наблюдений x_{ij} следуют модели $x_{ij} = a_j + \varepsilon_{ij}$, где $j = 1, \ldots, k$, $i = 1, \ldots, n$, $a_1, \ldots, a_k$ — неизвестные параметры, ε_{ij} — независимые $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$–величины. Укажите вид критерия для проверки $H_0 : \ a_1 = \ldots = a_k$ и распределение критериальной статистики (при гипотезе и при альтернативе $H_1 :$ среди чисел $a_1, \ldots, a_k$ сеть различные).

5. Пусть $W_{m,n}$ — статистика ранговых сумм Уилкоксона, где m — объем первой выборки, n — объем второй выборки.

   a) Вычислить распределение $W_{m,n}$ для $m = 3$, $n = 2$ в случае, когда выборки однородны.

   b) Доказать, что для однородных выборок распределение $W_{m,n}$ симметрично.

   c) Вычислить $\mathsf{E}_0 W_{m,n}$ и $\mathsf{D}_0 W_{m,n}$.

   d) Каково предельное распределение статистики $W_{m,2}$ (если нужно, нормированное) при $m \to \infty$: d1) для однородных выборок? d2) для выборок, отличающихся сдвигом?

6. Пусть $x_1, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_m$ — две независимые выборки из непрерывных распределений. Как известно, для проверки их однородности в гауссовском случае применяют статистику Стьюдента
$$t = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{s} \sqrt{\frac{mn}{m+n}}.$$
   Рассмотрите аналог статистики t, который возникает при замене наблюдений их рангами (в объединенной совокупности). Покажите, что эта статистика эквивалентна статистике ранговых сумм Уилкоксона.

7. Пусть $(x_1, \ldots, x_m)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ — две независимые выборки из $\mathcal{N}(a, \sigma^2)$ и $\mathcal{N}(2a, \sigma^2)$ соответственно. Укажите статистический критерий для проверки гиипотезы $H_0 : \ a = 1$ против альтернативы $H_1 : \ a > 1$

   a) считая σ^2 известным;

   b) считая σ^2 неизвестным.

10 Оценки наибольшего правдоподобия.

1. Испытания Бернулли.

   a) По результатам n испытаний Бернулии найти для вероятности успеха оценку наибольшего правдоподобия.

   b) Рассмотрим испытания Бернулли с $m \geq 2$ исходами, которые обозначим через $A_1, \ldots,$ A_m, а их (неизвестные) вероятности — через $\theta_1, \ldots, \theta_m$, $\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$. Пусть $X_1, \ldots, X_m$ обозначают (случайные) количества зарегистрированных в n испытаниях исходов $A_1, \ldots, A_m$ соответственно. Найти для $\theta_1, \ldots, \theta_m$ оценки наибольшего правдоподобия.

   c) Таблицы сопряженности. Каждый объект некоторой (бесконечной) совокупности может быть классифицирован по признакам A и B. Признак A принимает r значений — $A_1, \ldots, A_r$; признак B — s значений — $B_1, \ldots, B_s$. Каждый объект обладает некоторой комбинацией A_iB_j, $1 \leq i \leq r$, $1 \leq s \leq s$, признаков A и B. Пусть p_{ij} обозначает вероятность того, что случайно выбранный объект обладает комбинацией признаков A_iB_j: $p_{ij} = \mathsf{P}(A_iB_j)$. Пусть μ_{ij} — зарегистрированные частоты (числа появлений) комбинаций A_iB_j при случайном выборе n объектов. Таблицу частот $\|\mu_{ij},\ i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s\|$ называют таблицей сопряженности признаков. Важная статистическая гипотеза — о независимости признаков A и B. В этом случае $p_{ij} = p_{i\cdot}p_{\cdot j}$, где $p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^s p_{ij}$, $p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^r p_{ij}$. Задача: отправляясь от таблицы сопряженности, найти для $p_{i\cdot}$, $p_{\cdot j}$ $(i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, s)$ оценки наибольшего правдоподобия в предположении, что признаки независимы.

2. Испытания на надежность. Случайное время службы прибора до его отказа распределено по показательному закону с неизвестным параметром $\theta > 0$, ($\mathsf{P}(X > u) = \exp(-u/\theta)$ для $u \geq 0$). Для определения θ на испытании поставили n приборов. Рассмотрите три плана испытаний, и в каждом найдите для θ оценку наибольшего правдоподобия:

   a) испытание проводят до отказа всех приборов;

   b) испытание проводят в течении заранее установленного времени T;

   c) испытание останавливают в момент регистрации r-го отказа.

3. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — выборка из равномерного распределения на отрезке $[a, b]$. Найти оценки наибольшего правдоподобия

   a) для a, b;

   b) для b, считая $a = 0$;

   c) для a, считая $b = 1 + a$.

4. Дана выборка из двустороннего показательного распределения с плотностью

   $$p(x, a, \lambda) = \lambda \exp(-\lambda|x - a|)/2,$$

   где a, λ — неизвестные параметры, $\lambda > 0$. Найти для a и λ оценки наибольшего правдоподобия.

5. Мы наблюдаем величины $y_1, \ldots, y_n$, которые следуют статистической модели

   $$y_i = \theta x_i + \varepsilon_i,\ i = 1, \ldots, n,$$

   где $x_1, \ldots, x_n$ — известные константы, параметр $\theta \in \mathbb{R}$ неизвестен; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Дать для θ оценку наибольшего правдоподобия в каждом из трех случаев:

a) $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, σ^2 — неизвестно;

b) ε_i распределено по двустороннему показательному закону — с плотностью

$$p(x) = \lambda e^{-\lambda|x|}/2,$$

где $\lambda > 0$ — неизвестный параметр;

c) ε_i распределены равномерно на отрезке $[-1, 1]$.