

Программа курса "Теория случайных процессов", экономический поток 3 курса
механико-математического факультета МГУ, осень 2013

1. Понятие случайного элемента и его распределения. Пространство вещественнозначных функций, цилиндрическая σ -алгебра.
2. Определения случайного процесса как семейства случайных величин и как одного случайного элемента, их эквивалентность.
3. Конечномерные распределения. Теорема Колмогорова.
4. Характеристические функции случайных векторов. Условия согласованности конечномерных распределений в терминах характеристических функций.
5. Процессы с независимыми приращениями, критерий существования. Пуассоновский и винеровский процессы.
6. Гауссовские случайные векторы, их эквивалентные определения и основные свойства.
7. Гауссовские случайные процессы. Неотрицательно определенные функции. Второе определение винеровского процесса.
8. Реализации случайного процесса. Эквивалентность случайных процессов. Теорема Колмогорова о непрерывной модификации (без доказательства). Непрерывность траекторий винеровского процесса.
9. Существование неубывающей модификации для стохастически неубывающего случайного процесса. Эквивалентные определения пуассоновского процесса (б.д.).
10. Закон повторного логарифма для винеровского процесса и недифференцируемость его траекторий (б.д.). Локальный закон повторного логарифма.
11. Цепи Маркова со счетным числом состояний. Переходные матрицы.
12. Однородные цепи Маркова, эргодическая теорема.
13. Следствия эргодической теоремы (уравнение для стационарного распределения).
14. Стандартные и консервативные цепи Маркова, прямая и обратная система уравнений Колмогорова (б.д.).
15. Фильтрации, марковские моменты. Естественная фильтрация случайного процесса.
16. Условное математическое ожидание, его основные свойства.
17. Равномерная интегрируемость условных математических ожиданий.
18. Мартингалы и субмартингалы, примеры.
19. Теорема Дуба об остановке для мартингалов с дискретным временем.
20. Теорема Дуба об остановке для мартингалов с непрерывным временем и непрерывными траекториями.

21. Простейшие применения теоремы Дуба (решение задачи о разорении).
22. Максимальные неравенства для мартингалов.
23. Понятия многомерного винеровского процесса и винеровского процесса относительно фильтрации. Стохастический интеграл (по винеровскому процессу) от простой случайной функции. Изометричность.
24. Стохастический интеграл по винеровскому процессу. Интегрируемость непрерывного случайного процесса с непрерывной ковариационной функцией.
25. Свойства стохастического интеграла (непрерывность, мартингальность).
26. Лемма об интегральных суммах.
27. Процессы Ито. Формула Ито.
28. Задача о возвратности двумерного винеровского процесса (выход из кольца).
29. Применение формулы Ито к вычислению распределений функционалов от траекторий винеровского процесса (выход из полосы).
30. Понятие о стохастических дифференциальных уравнениях. Теорема существования и единственности решения (б.д.). Пример решения стохастического дифференциального уравнения.
31. Самофинансируемость портфеля, вывод уравнения Блэка-Шоулса.
32. Нахождение цены европейского опциона в модели Блэка-Шоулса.
33. Стационарные в широком смысле процессы. Простейшие свойства (связь со свойствами ковариационной функции). Теоремы Герглотца и Бохнера-Хинчина (б.д.).
34. Ортогональные случайные меры. Стохастический интеграл по такой мере.
35. Спектральное представление стационарного процесса.
36. Линейные преобразования стационарных процессов, изменение спектральной меры.
37. Решение линейных дифференциальных уравнений в классе стационарных процессов.
38. Процессы авторегрессии. Закон больших чисел для стационарных процессов.
39. Строго марковское свойство винеровского процесса.
40. Теорема Башелье.