ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Лектор: профессор А.В.Булинский
Статус курса: основной
Предназначен для студентов 3 курса, 6-й семестр
Продолжительность: полгода (весна)
Форма отчетности: зачет, экзамен
Программа на 2014/2015 учебный год

1. Случайная функция $X = \{X_t, t \in T\}$, отвечающая семейству измеримых пространств $(S_t, \mathcal{B}_t)_{t\in T}$. Случайный процесс (с дискретным и непрерывным временем), случайное поле. Траектории. Формулировка теоремы Ломницкого - Улама. Примеры случайных процессов: случайное блуждание, процесс восстановления $\{N(t), t \geq 0\}$, процесс Крамера - Лундберга. Доказательство того, что $N(t)/t \to 1/\mu$ при $t \to \infty$, где μ – математическое ожидание длины промежутка между соседними моментами восстановления.

2. Ветвящийся процесс Гальтона - Ватсона. Производящие функции. Нахождение вероятности вырождения процесса Гальтона - Ватсона.

3. Процессы с независимыми приращениями. Доказательство того, что пуассоновский процесс интенсивности λ (введенный как процесс восстановления) имеет независимые приращения. Парадокс времени ожидания автобуса.

4. Пространственный пуассоновский процесс с σ-конечной ведущей мерой. Явная конструкция. Пространственный пуассоновский процесс как точечный процесс, образованный последовательностью измеримых случайных элементов.

5. Функционал Лапласа точечного процесса. Характеризация пуассоновского пространственного процесса с помощью функционала Лапласа. Маркированный пуассоновский процесс.

6. Система массового обслуживания $M|G|\infty$. Теорема, дающая распределение числа X_t обслуживающих приборов, занятых в произвольный момент времени t $(t \geq 0)$. Нахождение предельного распределения X_t при $t \to \infty$ в случае, когда среднее время обслуживания конечно.

7. Фильтрация, естественная фильтрация случайного процесса. Расширение фильтрации классом нулевых множеств. Марковский момент. Примеры. Лемма, утверждающая, что если τ – марковский момент, то найдутся марковские моменты, принимающие счетное число различных значений, и для которых $\tau_n \searrow \tau$ на Ω при $n \to \infty$. Введение σ-алгебры $\mathcal{F}_\tau$ для марковского момента τ.

8. Строго марковское свойство процессов со стационарными независимыми приращениями. Пусть $N = \{N(B), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\}$ – точечный пуассоновский процесс с мерой интенсивности $\lambda \cdot mes$. Доказательство того, что интервалы между скачками процесса $\{N((0,t]), t \geq 0\}$ независимы и экспоненциально распределены с параметром λ.

9. Винеровский процесс (броуновское движение) как процесс с независимыми приращениями. Гауссовские процессы. Винеровский процесс как гауссовский процесс.

10. Построение винеровского процесса на отрезке $[0,1]$ (конструкция Чисельского) по функциям Хаара и Шаудера, а также по последовательности независимых стандартных нормальных величин. Построение винеровского процесса на $[0,\infty)$.

11. Теорема Винера – Зигмунда – Пэли о недифференцируемости траекторий винеровского процесса.

12. Принцип отражения. Теорема Башелье (распределение максимума броуновского движения на отрезке $[0, T]$). Закон повторного логарифма (формулировка теоремы Хинчина).

13. Слабая сходимость вероятностных мер в метрических пространствах. Теорема Александрова. Теорема Прохорова (формулировка). Сходимость случайных элементов по распределению. Сохранение слабой сходимости случайных элементов под действием непрерывных отображений.

14. Слабая сходимость вероятностных распределений в пространстве $C[0, 1]$ (слабая сходимость конечномерных распределений и плотность семейства мер). Принцип инвариантности Донскера - Прохорова (идея доказательства). Получение обычной центральной предельной теоремы из функциональной.

15. Ортогональная случайная мера на полукольце и ее σ-конечная структурная мера. Случайные процессы с ортогональными приращениями и их связь со случайными мерами. Продолжение ортогональной случайной меры с полукольца на δ-кольцо. Построение центрированной ортогональной случайной меры по заданной структурной мере.

16. Стохастический интеграл от неслучайной функции по ортогональной случайной мере. Теорема Карунена.

17. Условия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости (по неслучайной мере) в среднем квадратичном L^2-процесса.

18. Стационарные в широком смысле процессы. Теорема Герглотца. Спектральное представление стационарной в широком смысле последовательности. Теорема Бохнера (идея доказательства). Теорема Крамера о спектральном представлении стационарного в широком смысле непрерывного в среднем квадратичном процесса. Спектральная мера и спектральная плотность.

19. Мартингалы, субмартингалы, супермартингалы. Примеры. Лемма о получении субмартингала $Y = \{h(X_t), t \in T\}$ из мартингала $X = \{X_t, t \in T\}$ с помощью выпуклой функции $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

20. Предсказуемые процессы. Разложение Дуба для стохастической последовательности интегрируемых величин.

21. Дискретный вариант формулы Танаки. Доказательство того, что $\mathsf{E} L_n(0) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi} n}$ при $n \to \infty$, здесь $L_n(0)$ – локальное время в нуле простейшего симметричного случайного блуждания.

22. Теорема Дуба об остановке или свободном выборе (для мартингалов). Следствие этой теоремы (когда для мартингала $(X_n)_{n \geq 0}$ и марковского момента τ имеем $|X_{\tau \wedge n}| \leq C$ при всех $n \geq 0$ и некоторой положительной константе C).

23. Первое тождество Вальда. Нахождение мартингальными методами вероятности разорения игрока в классической модели, описываемой случайным блужданием.

24. Марковские процессы с дискретным и непрерывным временем. Примеры. Теорема, утверждающая, что процессы с независимыми приращениями являются марковскими.

25. Марковские цепи с дискретным и непрерывным временем. Переходные вероятности и их четыре свойства. Конечномерные распределения марковской цепи (задаваемые начальным распределением и функциями, обладающими четырьмя свойствами переходных вероятностей).

26. Однородные марковские цепи. Неразложимые и апериодические цепи с конечным числом состояний. Примеры. Лемма, утверждающая, что если множество $A = \{a_1, a_2, \ldots\} \subset \mathbb{N}$ замкнуто относительно сложения и $gcd(A) = 1$ (gcd обозначает наибольший общий делитель), то найдется $N \in \mathbb{N}$, для которого $n \in A$ при всех $n \geq N$. Доказательство того, что для неразложимой апериодической цепи Маркова с конечным пространством состояний S существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что $p_{i,j}(n) > 0$ для всех $i, j \in S$ и $n \geq N$.

27. Стационарное распределение марковской цепи. Время $T_{i,j}$ достижения состояния j, если цепь в начальный момент времени $t = 0$ находилась в состоянии i. Лемма, согласно которой $T_{i,j} < \infty$ п.н. и $\tau_{i,j} := \mathsf{E}T_{i,j} < \infty$ для неразложимой апериодической цепи (с конечным пространством состояний). Теорема, показывающая, что для такой цепи существует стационарное распределение, задаваемое определенной формулой.

28. Построение марковской цепи, имеющей данное начальное распределение и переходные вероятности, с помощью последовательности неслучайных функций и последовательности независимых величин $U_0, U_1, \ldots$, равномерно распределенных на $[0, 1]$. Склеивание двух марковских цепей (метод каплинга), одна из которых имеет стационарное, а другая – произвольное начальное распределение. Теорема о предельном поведении $\mathsf{P}(X_n = j)$ при $n \to \infty$ ($j \in S$) для неразложимой апериодической цепи Маркова с конечным пространством состояний S. Единственность стационарного распределения для такой цепи.

29. Построение аппроксимации вероятностного распределения с помощью марковских цепей. Обратимые марковские цепи. Пример модели твердых шарообразных частиц, размещаемых (допустимым образом) на конечном подмножестве решетки $\mathbb{Z}^d$. Построение марковской цепи, имеющей в качестве (единственного) стационарного распределения равномерное распределение на множестве всех допустимых конфигураций. Алгоритм Метрополиса для произвольного распределения на конечных графах.

30. Простые функции. Определение для них интеграла Ито по винеровскому процессу. Свойства интеграла Ито для простых функций. Идея продолжения построенного интеграла на более общий класс функций, чем простые.

31. Стохастическое дифференциальное уравнение и его сильное решение. Теорема (формулировка) существования и единственности сильного решения стохастического уравнения $dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t, \quad t \in [0, T]$, с начальным условием $X_0 = Z$, когда его коэффициенты b и σ удовлетворяют должным условиям регулярности. Уравнение Ланжевена. Процесс Орнштейна-Уленбека. Теорема (формулировка) о марковости сильного решения стохастического дифференциального уравнения.