Вопросы к экзамену по курсу "Теория вероятностей"

лектор — доцент Д. А. Шабанов

весна 2015

1. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Простейшие свойства вероятностной меры. Теорема о непрерывности вероятностной меры.

2. Дискретные вероятностные пространства. Классическое определение вероятности. Примеры. Геометрические вероятности. Пример использования геометрической вероятности: задача о встрече. Условные вероятности. Формула полной вероятности. Пример применения: задача о "сумашедшей" старушке. Формула Байеса.

3. Системы множеств: алгебры, σ-алгебры, π- и λ-системы. Связь π- и λ-систем с σ-алгебрами. Лемма о существовании наименьшей алгебры (σ-алгебры, π- или λ-системы), порожденной произвольной системой подмножеств. Борелевские σ-алгебры в $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^\infty$.

4. Теорема о монотонных классах. Следствие из нее.

5. Независимость конечного набора событий: попарная и в совокупности. Пример Бернштейна. Независимость конечного набора систем событий. Критерий независимости для конечного набора σ-алгебр. Независимость бесконечного набора систем событий.

6. Теорема Каратеодори о продолжении вероятностной меры (б/д). Лемма о совпадении вероятностных мер на σ-алгебре. Доказательство единственности продолжения вероятностной меры в теореме Каратеодори.

7. Функция распределения вероятностной меры на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, ее основные свойства. Теорема о взаимно-однозначном соответствии вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и функций распределения.

8. Классификация вероятностных мер и функций распределения на прямой. Примеры дискретных распределений: равномерное, биномиальное, пуассоновское. Примеры абсолютно непрерывных распределений: равномерное, нормальное, гамма. Пример сингулярного распределения: "канторова лестница". Теорема Лебега (б/д).

9. Вероятностные меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$. Многомерная функция распределения, ее основные свойства. Теорема о построении вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ по функции распределения (б/д). Примеры многомерных функций распределения, плотность многомерного распределения. Теорема Колмогорова о продолжении меры на $(\mathbb{R}^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}^\infty))$ (б/д).

10. Случайные величины в дискретных вероятностных пространствах. Независимость случайных величин. Математическое ожидание случайной величины, его основные свойства. Дисперсия случайной величины, ковариация двух случайных величин. Основные свойства дисперсии и ковариации.

11. Случайные элементы, случайные величины и векторы на вероятностном пространстве. Достаточное условие измеримости отображения. Следствие для случайных величин и векторов: критерий измеримости отображений в $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ и $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$.

12. Действия над случайными величинами. Борелевские функции в $\mathbb{R}^n$, доказательство того, что борелевская функция от случайного вектора есть случайный вектор. Арифметические операции над случайными величинами, взятие пределов, максимумов и минимумов у последовательности случайных величин

13. Характеристики случайной величины и случайного вектора: распределение вероятностей, функция распределения, порожденная σ-алгебра. Классы случайных величин: простые, дискретные, непрерывные, абсолютно непрерывные и сингулярные. Теорема о приближении случайной величины ξ простыми $\mathcal{F}_\xi$-измеримыми случайными величинами.

14. Математическое ожидание случайной величины: определение для простых, неотрицательных и произвольных случайных величин. Проверка корректности определений. Основные свойства математического ожидания для простых случайных величин.

15. Свойства математического ожидания в общем случае: линейность, сохранение отношения порядка, совпадение математических ожиданий при совпадении п.н. случайных величин (свойства 1-5).

16. Свойства математического ожидания в общем случае: следствие из равенства нулю $\mathsf{E}\xi$ для неотрицательной с.в. ξ, соотношения между случайными величинами при условии соотношений между математическими ожиданиями вида $\mathsf{E}(\xi\, I_A)$ для всех событий A (свойства 6-9). Теорема о математическом ожидании произведения независимых случайных величин.

17. Независимость произвольного набора случайных величин. Критерий независимости в терминах совместной функции распределения. Теорема о независимости борелевских функций от независимых случайных векторов.

18. Дисперсия, ковариация и коэффициент корреляции. Основные свойства дисперсии и ковариации, неравенство Коши – Буняковского. Следствие для дисперсии суммы независимых случайных величин. Матрица ковариаций случайного вектора, ее неотрицательная определенность.

19. Неравенство Маркова. Неравенство Чебышева. Неравенство Йенсена. Закон больших чисел в форме Чебышева.

20. Виды сходимости случайных величин: с вероятностью 1 (почти наверное), по вероятности, в среднем порядка $p > 0$, по распределению. Критерий сходимости с вероятностью 1. Теорема о взаимоотношении различных видов сходимостей.

21. Фундаментальность с вероятностью 1 последовательности случайных величин. Критерий Коши для сходимости с вероятностью 1. Неравенство Колмогорова. Теорема о сходимости почти наверное ряда из случайных величин.

22. Леммы Теплица и Кронекера. Усиленный закон больших чисел в форме Колмогорова – Хинчина для независимых случайных величин с ограниченными дисперсиями. Смысл усиленного закона больших чисел.

23. Предельный переход под знаком интеграла Лебега. Теорема о монотонной сходимости, лемма Фату, теорема Лебега о мажорируемой сходимости.

24. Лемма Бореля – Кантелли. Усиленный закон больших чисел Колмогорова для независимых одинаково распределенных случайных величин с ограниченным математическим ожиданием.

25. Математическое ожидание как интеграл Лебега по вероятностной мере. Теорема о замене переменных в интеграле Лебега. Следствия из нее: формулы для вычисления математических ожиданий функций от случайной величины (вектора) с помощью распределения и плотности распределения.

26. Прямое произведение вероятностных пространств. Теорема Фубини (б/д). Совместное распределение независимых случайных величин как прямое произведение. Лемма о свертке распределений. Формула свертки для вычисления плотности суммы независимых случайных величин.

27. Слабая сходимость и сходимость в основном вероятностных мер и функций распределения. Теорема Александрова (б/д). Теорема об эквивалентности слабой сходимости и сходимости в основном для вероятностных мер и соответствующих им функций распределения. Следствие для сходимости по распределению случайных величин.

28. Схема Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли: теорема Пуассона и теорема Муавра – Лапласа (б/д). Интерпретация теорем Пуассона и Муавра – Лапласа в терминах сходимости по распределению случайных величин.

29. Характеристические функции случайных величин, функций распределения и вероятностных мер. Многомерные характеристические функции. Основные свойства характеристических функций случайных величин.

30. Теорема о производных характеристических функций. Разложение характеристической функции в ряд в окрестности нуля. Вычисление характеристической функции для стандартного нормального распределения.

31. Теорема единственности для характеристических функций распределений на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Формула обращения для характеристических функций (б/д).

32. Критерий независимость компонент случайного вектора в терминах характеристических функций. Неотрицательная определенность комплекснозначных функций на прямой. Теорема Бохнера – Хинчина (только док-во необходимости).

33. Плотность и относительная компактность семейств вероятностных мер. Теорема Прохорова (б/д). Три леммы о свойствах плотных последовательностей вероятностностных мер на прямой.

34. Теорема непрерывности для характеристических функций. Центральная предельная теорема для независимых одинаково распределенных случайных величин, следствия из нее. Теорема Берри–Эссеена об оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме (б/д).

35. Виды сходимостей случайных векторов. Теорема о наследовании сходимости. Многомерная центральная предельная теорема.

36. Гауссовские случайные векторы (многомерное нормальное распределение). Теорема о трех эквивалентных определениях. Основные свойства гауссовских случайных векторов, критерий независимости компонент.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ширяев А. Н., *Вероятность*. В 2-х кн. — 5-е изд. — М.: МЦНМО, 2011.

2. Гнеденко Б. В., *Курс теории вероятностей.* — 8-е изд. — М.: УРСС, 2005.

3. Боровков А. А., *Теория вероятностей.* — 4-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2003.

4. Биллингсли П., *Сходимость вероятностных мер.* — М.: Наука, 1977.