

Вопросы к экзаменам
СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ, 2013/2014 г.г.

лектор – профессор Е.В.Булинская

Обязательный курс для студентов 3 курса механико-математического факультета,
6 семестр, экзамен

1. Понятие случайного элемента со значениями в измеримом пространстве. Распределение случайного элемента.
2. Пространство R^T и σ -алгебра \mathcal{B}^T . Два определения случайного процесса, их эквивалентность.
3. Конечномерные распределения случайного процесса, условия симметрии и согласованности. Траектории (выборочные функции). Конечномерные распределения однозначно определяют меру любого борелевского множества в R^T .
4. Теорема Колмогорова о существовании процесса с заданным семейством конечномерных распределений.
5. Классификация случайных процессов.
6. Гауссовские процессы. Теорема существования гауссовского процесса с заданными средним и ковариационной функцией.
7. Процессы с независимыми приращениями. Эквивалентность двух определений винеровского процесса.
8. Пуассоновский процесс и его построение по семейству независимых показательно распределенных случайных величин.
9. Стационарность в узком и широком смысле, связь между ними.
10. Эквивалентность случайных процессов.
11. Различные определения непрерывности случайных процессов и связь между ними. Фиксированные и переменные точки разрыва.
12. Необходимые и достаточные условия существования эквивалентного процесса с непрерывными траекториями.
13. Теорема Колмогорова (достаточные условия существования непрерывной модификации). Условие для гауссовского процесса.
14. Теорема Пэли-Винера-Зигмунда.
15. Построение винеровского процесса на отрезке $[0, 1]$ с помощью функций Шаудера, как ряда из гауссовских случайных величин.
16. Понятия измеримости и сепарабельности процесса. Теорема об измеримости сепарабельного процесса непрерывного с вероятностью 1, кроме нулевого множества лебеговой меры.
17. Переформулировка теоремы Фубини в вероятностных терминах. Условное математическое ожидание и его свойства (без док-ва).
18. Фильтрация (или поток σ -алгебр). Адаптированность процесса к потоку. Определение марковского процесса. Марковость относительно фильтрации.
19. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Теорема о переходе от мартингала к субмартингалу с помощью выпуклой функции. Сохранение субмартингалности, если выпуклая функция неубывающая.

20. Теорема Дуба о представлении субмартингала в виде суммы мартингала и неубывающей функции (компенсатора).
21. Марковские моменты, безобидные и благоприятные последовательности. Сохранение мартингальности (субмартингальности) при рассмотрении процесса в марковские моменты.
22. Неравенства Дуба для максимума неотрицательного субмартингала.
23. Теорема Дуба для числа пересечений полосы субмартингалом.
24. Мартингалы и супермартингалы с непрерывным временем. Леммы о равномерной интегрируемости, поведении супремума и числе пересечений полосы. Теорема об отсутствии разрывов второго рода.
25. Винеровский процесс как мартингал. Марковское свойство винеровского процесса.
26. Строго марковское свойство винеровского процесса.
27. Распределение максимума винеровского процесса на отрезке.
28. Распределение момента достижения положительного уровня винеровским процессом. Неравенство Леви.
29. Закон повторного логарифма для винеровского процесса.
30. Локальный закон повторного логарифма.
31. Доказать, что при измельчении разбиения отрезка сумма модулей приращений стремится к бесконечности по вероятности, а сумма квадратов приращений сходится в среднем квадратичном к длине отрезка.
32. Определение интеграла Ито для простых прогрессивно измеримых функций из класса $L^2_{\Omega \times [0, T]}$ и его свойства.
33. Интеграл Ито для функций из класса M^2 , его свойства.
34. Стохастический дифференциал. Формула замены переменных Ито.
35. Теорема существования сильного решения стохастического дифференциального уравнения.
36. Теорема единственности непрерывного решения стохастического дифференциального уравнения.
37. Необходимое и достаточное условие того, что функция двух переменных является корреляционной.
38. Лемма о непрерывности скалярного произведения. Необходимое и достаточное условие сходимости в среднем квадратичном.
39. Теоремы о непрерывности процесса, дифференцируемости и интегрируемости (по неслучайной мере).
40. Существование эквивалентного процесса с непрерывными траекториями в случае непрерывности второй смешанной производной корреляционной функции.
41. Случайные меры. Связь между ортогональными случайными мерами и процессами с ортогональными приращениями непрерывными справа в среднем квадратичном. Структурная мера.
42. Стохастический интеграл от неслучайной функции по ортогональной случайной мере. Его свойства.

43. Спектральное представление случайного процесса (методами функционального анализа).
44. Теорема Бохнера-Хинчина.
45. Спектральное представление случайного процесса непрерывного в среднем квадратичном (с помощью теоремы Бохнера-Хинчина).
46. Линейные преобразования для неслучайных функций, однородность, физическая осуществимость. Импульсная переходная функция и частотная характеристика.
47. Допустимый фильтр для случайного процесса, стационарного в широком смысле.
48. Примеры допустимых фильтров: полосовые фильтры, дифференцирование, решение дифференциальных уравнений.
49. Пример стационарного гауссовского марковского процесса.
50. Теорема Котельникова-Шеннона.
51. Наилучший прогноз случайной величины по системе случайных величин.
52. Теорема Геглотца (без док-ва). Достаточное условие существования спектральной плотности.
53. Процесс на выходе физически осуществимого фильтра при подаче на вход белого шума.
54. Линейно сингулярные и регулярные стационарные процессы.
55. Представление стационарного в широком смысле процесса в виде суммы сингулярной и регулярной составляющих.
56. Разложение Вольда и наилучший линейный прогноз случайного процесса.
57. Цепи Маркова с непрерывным временем. Представление конечномерных распределений с помощью начального распределения и переходных вероятностей.
58. Эргодическая теорема для цепи Маркова.

Литература

А.В.Булинский, А.Н.Ширяев "Теория случайных процессов Москва, Физматлит, 2003.