ПРОГРАММА курса "Теория вероятностей"

Лектор – профессор А.В.Булинский

(2013-2014 учебный год)

1. Случайные эксперименты. Пространство элементарных исходов. Примеры. Системы подмножеств некоторого множества (алгебра, σ-алгебра, π- и λ-системы). Примеры. Определение меры и вероятности. Вероятностное пространство. Статистическая интерпретация вероятности.

2. Дискретные вероятностные пространства (с конечным или счетным числом исходов). Общий способ задания меры. Примеры. Классическое определение вероятности. Примеры.

3. Элементарные свойства вероятности. Вероятностная мера на алгебре подмножеств. Теорема, связывающая свойства конечной аддитивности, непрерывности и счетной аддитивности неотрицательной функции, заданной на алгебре подмножеств некоторого множества.

4. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры применения.

5. Независимость событий (в совокупности и попарная). Независимость систем подмножеств Ω. Независимость σ-алгебр, порожденных независимыми π-системами. Лемма о независимости σ-алгебр $\{\varnothing, A_i, \overline{A}_i, \Omega\}$, $i = 1, \ldots, n$, когда независимы события $A_1, \ldots, A_n$. Формула Эйлера из теории чисел.

6. Функция распределения меры на прямой, свойства этой функции. Построение меры на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ по функции, обладающей свойствами функции распределения. Понятие плотности распределения вероятности.

7. Основные распределения: равномерное на отрезке, экспоненциальное, гауссовское (нормальное), Коши. Определение $\sigma-$конечной меры. Произведение вероятностных пространств. Мера Лебега на прямой и в евклидовом пространстве. Геометрические вероятности. Парадокс Бертрана.

8. Доказательство леммы Бореля-Кантелли.

9. Измеримые отображения. Доказательство того, что для $\mathcal{F}|\mathcal{B}$-измеримости отображения X достаточно потребовать, чтобы $X^{-1}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{F}$, если $\sigma\{\mathcal{M}\} = \mathcal{B}$. Свойства измеримых отображений. Распределение случайной величины (случайного элемента).

10. Доказательство (классической) теоремы Пуассона. Модель пуассоновского случайного поля в евклидовом пространстве.

11. Три этапа построения интеграла Лебега по вероятностной мере (математического ожидания случайной величины). Свойства интеграла. Пространство $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Теорема о монотонной сходимости. Теорема Лебега о мажорируемой сходимости.

12. Ковариация и ее свойства (в частности, свойства дисперсии). Гильбертово пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Неравенство Коши - Буняковского - Шварца. Коэффициент корреляции.

13. Закон больших чисел Бернулли и его обобщения. Вероятностное доказательство теоремы Вейерштрасса об аппроксимации многочленами функции, непрерывной на отрезке.

14. Виды сходимости случайных величин, соотношения между ними. Усиленный закон больших чисел для ортогональных величин, дисперсии которых ограничены константой.

15. Теорема Эрдеша-Реньи. Критерий интегрируемости случайной величины X (в терминах сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(|X| \geq n)$).

16. Усиленный закон больших чисел Этемади. Усиленный закон больших чисел Колмогорова для независимых одинаково распределенных величин. Формулировка усиленного закона больших чисел Колмогорова для независимых случайных величин с конечной дисперсией.

17. Произведение вероятностных мер. Теорема Фубини.

18. Теорема Радона-Никодима (формулировка). Переход от интеграла Лебега по мере μ к интегралу по мере ν, где μ абсолютно непрерывна относительно ν. Плотность распределений компонент вектора, имеющего плотность. Плотность вектора, компоненты которого независимы и имеют плотности. Вычисление $\mathsf{E}h(X)$ (если существует), где случайный вектор $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ имеет плотность $p_X(\cdot)$ и борелевская функция $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Свертка вероятностных распределений.

19. Слабая сходимость мер, заданных на метрическом пространстве S, снабженном борелевской σ-алгеброй. Сходимость случайных величин (со значениями в S) по распределению. Теорема А.Д.Александрова (необходимые и достаточные условия слабой сходимости вероятностных мер). Критерий слабой сходимости вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ в терминах их функций распределения.

20. Интеграл Лебега для комплекснозначных функций. Доказательство неравенства $|\mathsf{E}Z| \leq \mathsf{E}|Z|$, где $Z = X + iY$, а X, Y – действительные случайные величины. Характеристическая функция вероятностной меры, заданной на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Вычисление характеристической функции стандартного нормального закона.

21. Свойства характеристических функций ($\varphi(0) = 1$, $|\varphi(t)| \leq 1$ для $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(\cdot)$ – равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, а также является неотрицательно определенной). Формулировка теоремы Бохнера - Хинчина.

22. Формула обращения. Плотность вероятностной меры, имеющей интегрируемую характеристическую функцию. Теорема единственности (взаимно однозначное соответствие между характеристическими функциями вероятностных мер и мерами).

23. Вывод следующих свойств характеристической функции $\varphi(\cdot)$ случайной величины X: 1) $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$, $t \in \mathbb{R}$; 2) распределение X симметрично тогда и только тогда, когда $\varphi(\cdot)$ действительна; 3) формула для характеристической функции $aX + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$. Характеристическая функция суммы конечного числа независимых случайных величин.

24. Доказательство теоремы Леви, описывающей слабую сходимость вероятностных мер на языке характеристических функций.

25. Схема серий независимых случайных величин (центрированных и с конечными вторыми моментами). Пренебрежимая малость слагаемых. Доказательство теоремы Линдеберга. Формулировка теоремы Феллера.

26. Центральная предельная теорема для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией (как следствие теоремы Линдеберга). Медленно меняющиеся функции. Необходимые и достаточные условия центральной предельной теоремы для независимых одинаково распределенных случайных величин (формулировка).

27. Теорема Хелли. Лемма о характеризации слабой сходимости вероятностных мер на прямой в терминах сходимости их функций распределения на счетном всюду плотном подмножестве $\mathbb{R}$. Доказательство теоремы Прохорова для вероятностных мер на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

28. Характеристическая функция вероятностной меры на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, характеристическая функция случайного вектора со значениями в $\mathbb{R}^n$. Многомерное нормальное (гауссовское) распределение $N(a, C)$, где $a \in \mathbb{R}^n$, C – симметричная и неотрицательно определенная матрица порядка n.

29. Критерий независимости компонент вектора в терминах характеристических функций этих компонент. Следствие для гауссовского вектора. Лемма о (смешанных) производных характеристической функции вектора при наличии должного момента у всех его компонент, а также соответствующее обратное утверждение для вторых производных характеристической функции в точке $0 \in \mathbb{R}^n$. Доказательство того, что если $X \sim N(a, C)$, то a – вектор средних, а C – ковариационная матрица.

30. Условное математическое ожидание интегрируемой случайной величины относительно σ-алгебры. Пример нахождения $\mathsf{E}(X|\mathcal{A})$, где $\mathcal{A}$ – есть σ-алгебра, порожденная разбиением вероятностного пространства. Свойства условного математического ожидания. Определение $\mathsf{E}(X|Z)$, где X – интегрируемая величина, Z – случайный вектор. Доказательство того, что $\mathsf{E}(X|Z) = \psi(Z)$, где ψ – борелевская функция.

31. Доказательство основных (девяти) свойств условного математического ожидания.

32. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые случайные величины, $X_k \sim Exp(\lambda_k)$, $\lambda_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Определим $Z_n := \min_{1 \le k \le n} X_k$, $J_n := \min\{k \in \{1, \ldots, n\} : X_k = Z_n\}$. С помощью аппарата условных математических ожиданий доказать, что Z_n и J_n – независимые величины, а также найти их распределения.