Программа курса “Случайные гиперграфы”

лектор — к.ф.-м.н., ассистент Д. А. Шабанов

полугодовой спецкурс для студентов 2–5 курсов,
осень 2011

1. Основные модели случайных гиперграфов: равномерная $H(n,k,m)$ и биномиальная $H(n,k,p)$. Необходимые определения из теории гиперграфов.

2. Теорема о двойном скачке в эволюции случайного графа $G(n,p)$ (б/д). Закон больших чисел для размера максимальной компоненты в $G(n,p)$ для случая $np = c > 1$ (б/д).

3. Понятие связной компоненты в гиперграфе, понятие гипердерева. Лемма об оценке вероятности существования большой связной компоненты в $H(n,k,p)$ для случая $p\binom{n-1}{k-1}(k-1) = c \leq 1$. Лемма о числе остовных гипердеревьев на n помеченных вершинах. Лемма о числе среднем числе гипердеревьев в $H(n,k,p)$, $p\binom{n-1}{k-1}(k-1) = c$ (три случая: $c < 1$, $c = 1$, $c > 1$).

4. Понятие сложной компоненты и ее циклического индекса. Лемма о среднем числе связных компонент на s вершинах и с циклическим индексом t в $H(n,k,p)$ при $p\binom{n-1}{k-1}(k-1) = c \leq 1$. Лемма о среднем числе циклов в $H(n,k,p)$ при $p\binom{n-1}{k-1}(k-1) = c \leq 1$.

5. Теорема о размере максимальной компоненты в случайном гиперграфе $H(n,k,p)$ при $p\binom{n-1}{k-1}(k-1) = c = const$. Три случая: $c < 1$, $c = 1$, $c > 1$.

6. Закон больших чисел для $N(H(n,k,p))$, размера наибольшей компоненты в $H(n,k,p)$ при $p\binom{n-1}{k-1}(k-1) = c > 1$ (б/д). Центральная предельная теорема для $N(H(n,k,p))$ в тех же условиях (б/д).

7. Доказательство Боллобаша–Риордана центральной предельной теоремы для размера максимальной компоненты случайного графа $G(n,p)$ в случае $np = c > 1$. Метод сведения к ветвящимся процессам, анализ процесса "набора компонент". Центральная предельная теорема для мартингалов в схеме серий (б/д), условие Линдеберга. Применение ЦПТ для мартингалов в доказательстве ЦПТ для $N(G(n,p))$.

8. Гиперграфы–клики, тривиальные и нетривиальные клики. Теорема Эрдеша–Ко–Радо (б/д). Сильное и слабое EKR свойство. Лемма о покрытии семейством графов нетривиальных гиперграфов–клик. Теорема о том, что в условиях $p \gg \ln n/(k\binom{n-2}{k-2})$ и $k < (n/2)^{1/3}$ случайный гиперграф $H(n,k,p)$ с вероятностью, стремящейся к 1, обладает сильным EKR свойством.

9. Корреляционные неравенства. FKG–неравенство в простейшем случае, неравенство Янсона (оба б/д). Следствие из них. Лемма о пороговой вероятности того, что максимальная степень вершины в $H(n,k,p)$ не превосходит фиксированного $d \geq 3$.

10. Понятие (t,j)-симплекса в гиперграфе. Три леммы об оценках пороговой вероятности содержания (t,j)-симплекса в $H(n,k,p)$. Теорема о том, что в условиях $p\binom{n-1}{k-1} = o(1)$ и $k = o(n^{1/4})$ случайный гиперграф $H(n,k,p)$ с вероятностью, стремящейся к 1, обладает сильным EKR свойством.

11. Теорема о том, что в условиях $p\binom{n-1}{k-1} = o(1)$ и $n^{1/3} \ll k \ll n^{1/4}$ случайный гиперграф $H(n,k,p)$ с вероятностью, стремящейся к 1, обладает слабым EKR свойством.

Список литературы

[1] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] S. Jansen, T. Łuczak, A. Rucinski, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.

[3] J. Schmidt-Prusan, E. Shamir, “Component structure in the evolution of random hypergraphs”, *Combinatorica*, **5**:1 (1985), 81–94.

[4] B. Bollobas, O. Riordan, “Asymptotic normality of the size of the giant component via a random walk”, arXiv: 1010.4595v2.

[5] J. Balogh, T. Bohman, D. Mubayi, “Erdős–Ko–Rado in random hypergraphs”, *Combinatorics, Probability and Computing*, **18** (2009), 629–646.