Простейший вариант формулы Ито и формулы Каца-Фейнмана.

Формула Ито.

Пусть $w(t)$ - винеровский процесс. Тогда случайная величина $w(s)-w(t)$, для любых $0 \le t < s < \infty$, имеет нормальное распределение с нулевым средним и дисперсией равной $s-t$. Поэтому $\Delta w = w(t+\Delta t) - w(t)$ имеет порядок $\sqrt{\Delta t}$.
Пусть $F(x)$ - гладкая детерминированная функция. Рассмотрим функцию $F(w(t))$. Нас интересует её дифференциал. В классическом смысле, дифференциал - линейная часть приращения фунции. Если воспользуемся формулой для дифференциала сложной функции получим $dF = F'dw$, но это величина порядка квадратного корня от приращения. Будем считать дифференциалом часть приращения порядка не больше линейного. Тогда, помня что $(dw)^2$ порядка dt, видно, что

$$dF(w(t)) = F'(w(t))dw(t) + \frac{1}{2}F''(w(t))dt$$

Эта формула называется формулой Ито.

Формула Каца-Фейнмана.

Рассмотрим уравнение теплопроводности в движущейся среде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\mathbf{V}\nabla)u = \nu\Delta u,$$
$$u(0,\mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}).$$

Покажем, что

$$u(t,x) = M_x[u_0(\xi_t)]$$

-решение этой задачи (формула Каца-Фейнмана). Здесь $\xi(t)$-случайная величина, являющаяся решением интегрального уравнения (интересно рассматривать трехмерный случай, поэтому уравнение векторное)

$$\xi_t = \mathbf{x} - \int_0^t \mathbf{V}(t-s,\xi_s)ds + \sqrt{2\nu}\mathbf{w}_t. \qquad (*)$$

Здесь M_x-среднее по распредлению $\mathbf{w}_t$. Покажем, что формула Каца-Фейнмана является решением уравнения теплопроводности. В силу независимости приращений винеровского процесса

$$u(\mathbf{x}, t + \Delta t) = M_x[u(\xi_{\Delta t}, t)] =$$
$$= M_x[u(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial u}{\partial x_i}(\xi_{\Delta t} - x)_i + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\xi_{\Delta t} - x)_i(\xi_{\Delta t} - x)_j].$$

Чтобы сохранить члены порядка Δt, мы учли и вторые производные при разложении в ряд Тейлора (формула Ито). Интегральное уравнение (*)-уравнение Вольтерра. Для нахождения $\xi_{\Delta t}$ воспользуемся методом последовательных приближений. Тогда

$$(\xi_{\Delta t} - x)_i = -V_i \Delta t + \sqrt{2\nu} w_{\Delta t} + o(\Delta t).$$

Воспользуемся также тем, что

$$M_x w_t = 0,$$
$$M_x(w_{ti} w_{tj}) = \delta_{ij} t.$$

Окончательно получим:

$$u(\mathbf{x}, t + \Delta t) = u(\mathbf{x}, t) - V_i \frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta t + \nu \Delta u \Delta t + o(\Delta t).$$

Деля на Δt и переходя к пределу получим, что формула Каца-Фейнмана является решением нашей задачи.