Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

Лебедев Алексей Викторович

УЧЕБНЫЕ МАТЕРИАЛЫ
для семинарских занятий по курсу Д.Д.Соколова «ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ»

Москва — 2018

Рекомендуемая литература

[ФЛ] Л.Н.Фадеева, А.В.Лебедев "Теория вероятностей и математическая статистика". М.: Рид-групп, 2011 (гл. 9).
[МП] Б.М.Миллер, А.Р.Панков "Теория случайных процессов в примерах и задачах". М.: Физматлит, 2007.
[Гм] В.Е.Гмурман "Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике". М.: Высшая школа, 1998 (часть 5).

1 Среднеквадратическая теория

Случайный процесс $\xi(t,\omega)$ представляет собой функцию двух аргументов: времени t и случайного исхода ω. Но обычно удобнее рассматривать процесс, когда один аргумент зафиксирован, а другой пробегает все возможные значения. Тогда каждому моменту времени t соответствует случайная величина (случайное значение процесса в данный момент), а каждому элементарному исходу ω соответствует случайная функция (траектория процесса)[1]. Будем писать $\xi(t)$, в смысле первого соответствия.

Подобно тому, как для случайной величины определяются математическое ожидание и дисперсия, для случайного процесса определяются *функция математического ожидания*

$$m(t) = \mathbf{M}\xi(t)$$

и *ковариационная функция*[2]

$$B(t,s) = \mathrm{cov}(\xi(t), \xi(s)).$$

[1] Допускаются как непрерывные, так и кусочно-непрерывные траектории (с множеством точек разрыва меры нуль).

[2] В книге [МП] ковариационная функция обозначается через R, в книге [Гм] через K.

Можно также определить *функцию дисперсии*

$$d(t) = \mathbf{D}\xi(t) = B(t,t).$$

Примеры.

1) Пусть $\xi(t) = U + Vt$, где U, V — некоррелированные случайные величины, тогда

$$m(t) = \mathbf{M}U + \mathbf{M}V \cdot t$$

по свойствам математического ожидания,

$$\begin{aligned}&B(t,s) = \operatorname{cov}(U+Vt, U+Vs) =\\ &= \operatorname{cov}(U,U) + \operatorname{cov}(U,Vs) + \operatorname{cov}(Vt,U) + \operatorname{cov}(Vt,Vs) = \mathbf{D}U + \mathbf{D}V \cdot ts\end{aligned}$$

по свойствам ковариации.

2) Пусть $\xi(t) = U\cos t + V\sin t$, где U, V — некоррелированные случайные величины с $\mathbf{M}U = \mathbf{M}V = 0$ и $\mathbf{D}U = \mathbf{D}V = \sigma^2$, тогда $m(t) \equiv 0$ и

$$\begin{aligned}&B(t,s) = \operatorname{cov}(U\cos t + V\sin t, U\cos s + V\sin s) =\\ &= \operatorname{cov}(U\cos t, U\cos t) + \operatorname{cov}(U\cos t, V\sin s) +\\ &+ \operatorname{cov}(V\sin t, U\cos s) + \operatorname{cov}(V\sin t, V\sin s) =\\ &= \mathbf{D}U\cos t\cos s + \mathbf{D}V\sin t\sin s = \sigma^2\cos(t-s).\end{aligned}$$

Если $m(t) \equiv const$ и $B(t,s)$ — функция от $t-s$, то процесс называется *стационарным в широком смысле*. В этом случае вводится другое обозначение ковариационной функции, тоже через B, но от одного аргумента: $B(t,s) = B(t-s)$. При этом функция всегда получается четная (в силу симметрии ковариации). В примере 2 возникает процесс, стационарный в широком смысле, с $B(t) = \sigma^2\cos t$.

Важное значение в теории случайных процессов имеет то, как при различных преобразованиях случайного процесса преобразуются его характеристики.

Пусть $\eta(t) = f(t)\xi(t)$, где $f(t)$ — детерминированная (не случайная) функция, тогда

$$m_\eta(t) = f(t)m_\xi(t), \quad B_\eta(t,s) = f(t)f(s)B_\xi(t,s).$$

Пусть

$$\eta(t) = \int_0^t \xi(u)\,du,$$

тогда

$$m_\eta(t) = \int_0^t m_\xi(u)\,du, \quad B_\eta(t,s) = \int_0^t\int_0^s B_\xi(u,v)\,dv\,du.$$

Здесь надо отметить, что интегрирование случайного процесса производится потраекторно, т.е. мы заменяем каждую траекторию исходного процесса ξ на интеграл с переменным верхним пределом от нее, и таким образом получаем новый процесс η.

Примеры.

1) Пусть $m_\xi(t) = 2t-1$, $B_\xi(t,s) = 25(ts)^4+1$, тогда для интегрального процесса

$$m_\eta(t) = \int_0^t (2u-1)\,du = \left(2\frac{u^2}{2} - u\right)\Big|_0^t = t^2 - t,$$
$$B_\eta(t,s) = \int_0^t \int_0^s (25u^4v^4+1)\,dv\,du = 25\int_0^t u^4\,du \int_0^t v^4\,dv + ts =$$
$$= 25\,\frac{u^5}{5}\Big|_0^t\,\frac{v^5}{5}\Big|_0^s + ts = (ts)^5 + ts.$$

2) Пусть $m_\xi(t) = 3\cos t - 2\sin t$, $B_\xi(t,s) = \cos(t-s)$, тогда

$$m_\eta(t) = \int_0^t (3\cos u - 2\sin u)\,du = (3\sin u + 2\cos u)|_0^t = 3\sin t + 2\cos t - 2,$$
$$B_\eta(t,s) = \int_0^t \int_0^s \cos(u-v)\,dv\,du = \int_0^t \int_0^s (\cos u\cos v + \sin u \sin v)\,dv\,du =$$
$$= \int_0^t \cos u\,du \int_0^s \cos v\,dv + \int_0^t \sin u\,du \int_0^s \sin v\,dv =$$
$$= \sin u|_0^t \sin v|_0^s + (-\cos u)|_0^t\,(-\cos v)|_0^s =$$
$$= \sin t\sin s + (\cos t - 1)(\cos s - 1) = \cos(t-s) - \cos t - \cos s + 1.$$

Рассмотрим некоторые простые приложения.

1. Оценка полезного сигнала. Пусть имеется полезный сигнал с постоянным уровнем a и накладывающийся на него случайный шум $\xi_0(t)$ с нулевым средним и ковариационной функцией $B(t,s)$. Тогда суммарный наблюдаемый сигнал

$$\xi(t) = a + \xi_0(t).$$

Для оценивания сигнала предлагается оценка

$$\hat{a} = \frac{1}{T}\int_0^T \xi(t)\,dt,$$

т.е. усреднение сигнала по времени. Отсюда

$$\hat{a} = a + \frac{1}{T}\int_0^T \xi_0(t)\,dt,$$

и поскольку среднее второго слагаемого равно нулю, то $\mathbf{M}\hat{a} = a$, т.е. оценка несмещенная. Вопрос в том, является ли она состоятельной, т.е. стремится ли ее дисперсия к нулю. Интересно также, как быстро это происходит. Ответы на эти вопросы зависят о конкретного вида $B(t,s)$.

В общем случае имеем

$$\mathbf{D}\hat{a} = \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T B(t,s)\,ds\,dt.$$

Пусть, например, $B(t,s) = e^{-|t-s|}$, тогда

$$\int_0^T\int_0^T e^{-|t-s|}\,ds\,dt = 2\int_0^T dt\int_0^t e^{-t+s}\,ds = 2\int_0^T dt\left(e^{-t}\int_0^t e^s\,ds\right) =$$
$$= 2\int_0^T \left(e^{-t}(e^t-1)\right)\,dt = 2\int_0^T (1-e^{-t})\,dt =$$
$$= 2\left(t+e^{-t}\right)\Big|_0^T = 2(T+e^{-T}-1),$$

откуда

$$\mathbf{D}\hat{a} = \frac{2(T+e^{-T}-1)}{T^2} \sim \frac{2}{T}, \quad T\to\infty.$$

В данном случае можно было использовать более простую формулу. А именно, если $B(t,s) = B(t-s)$ (как в определении стационарного в широком смысле процесса), то

$$\mathbf{D}\int_0^T \xi(t)\,dt = 2\int_0^T (T-t)B(t)\,dt.$$

В рассмотренном случае было $B(t) = e^{-|t|}$.

2. Движение материальной точки. Пусть на материальную точку единичной массы на прямой действуют случайная сила $\xi(t)$, с нулевым средним и ковариационной функцией $B(t,s)$, и сила трения, пропорциональная скорости с коэффициентом $\alpha > 0$, тогда для скорости $X(t)$ получаем дифференциальное уравнение

$$X' + \alpha X = \xi(t).$$

При начальном условии $X(0) = 0$ это уравнение имеет явное решение

$$X(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-u)}\xi(u)\,du,$$

откуда

$$\begin{aligned}\mathbf{D}X(t) &= \int_0^t \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} e^{-\alpha(t-v)} B(u,v)\,dv\,du = \\ &= e^{-2\alpha t} \int_0^t \int_0^t e^{\alpha(u+v)} B(u,v)\,dv\,du.\end{aligned}$$

Пусть $B(t,s) = e^{-|t-s|}$ и $\alpha \neq 1$, тогда

$$\begin{aligned}&\mathbf{D}X(t) = e^{-2\alpha t} \int_0^t \int_0^t e^{\alpha(u+v)} e^{-|u-v|}\,dv\,du = 2e^{-2\alpha t} \int_0^t du \int_0^u e^{\alpha u + \alpha v - u + v}\,du = \\ &= 2e^{-2\alpha t} \int_0^t du \left(e^{(\alpha-1)u} \int_0^u e^{(\alpha+1)v}\,dv \right) = 2e^{-2\alpha t} \int_0^t du \left(e^{(\alpha-1)u} \frac{e^{(\alpha+1)u} - 1}{\alpha+1} \right) = \\ &= \frac{2e^{-2\alpha t}}{\alpha+1} \int_0^t \left(e^{2\alpha u} - e^{(\alpha-1)u} \right) = \frac{2e^{-2\alpha t}}{\alpha+1} \left(\frac{e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha} - \frac{e^{(\alpha-1)t} - 1}{\alpha - 1} \right) = \\ &= \frac{2}{\alpha+1} \left(\frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} - \frac{e^{-(\alpha+1)t} - e^{-2\alpha t}}{\alpha - 1} \right) \to \frac{1}{\alpha(\alpha+1)}, \quad t \to \infty.\end{aligned}$$

Таким образом, дисперсия (в данном случае, это и средний квадрат) скорости стабилизируется на ненулевом значении, и чем больше трение, тем меньше скорость, и наоборот.

Если траектории случайного процесса $\xi(t)$ гладкие[3] (с вероятностью единица), то их можно заменить на их производные, т.е. провести потраекторное дифференцирование, и таким образом получить процесс производной $\xi'(t)$. В этом случае получаем

$$m_{\xi'}(t) = m'_{\xi}(t), \quad B_{\xi'}(t,s) = \frac{\partial^2 B_{\xi}(t,s)}{\partial t\,\partial s},$$

в предположении, что производные в правых частях существуют.

Пример. Пусть $m_{\xi}(t) = 2t - 1$, $B_{\xi}(t,s) = 25(ts)^4 + 1$, тогда для процесса производной

$$\begin{aligned}&m_{\xi'}(t) = (2t-1)' = 2, \\ &B_{\xi'}(t) = \frac{\partial^2 (25t^4 s^4 + 1)}{\partial t\,\partial s} = 25 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial (t^4 s^4)}{\partial s} = 25 \frac{\partial (4t^4 s^3)}{\partial t} = 400(ts)^3.\end{aligned}$$

В теории случайных процессов кроме потраекторных производных часто рассматривают среднеквадратические производные, т.е. удовлетворяющие условию

$$\mathbf{M} \left| \frac{\xi(t+h) - \xi(t)}{h} - \xi'(t) \right|^2 \to 0, \quad h \to 0.$$

[3]Допускаются также кусочно-гладкие траектории, по которым получаем кусочно-непрерывные производные (с множеством точек разрыва меры нуль).

Если есть потраекторная производная, то она является и среднеквадратической, но бывает, что потраекторной производной нет, а среднеквадратическая есть.

Критерии проверки на дифференцируемость по ковариационной функции (в предположении, что функция математического ожидания гладкая и не влияет на существование производной) следующие:

1) если $\partial^2 B_\xi(t,s)/\partial t\,\partial s$ непрерывна на $[a,b]^2$, то существует потраекторная производная на $[a,b]$ (с вероятностью единица);

2) если обобщенная $\partial^2 B_\xi(t,s)/\partial t\,\partial s$ существует в точке (t_0,t_0) в смысле сходимости предела

$$\lim_{h,\delta\to 0}\frac{B_\xi(t_0+h,t_0+\delta)-B_\xi(t_0+h,t_0)-B_\xi(t_0,t_0+\delta)+B_\xi(t_0,t_0)}{h\delta},$$

то среднеквадратическая производная $\xi'(t)$ существует в точке t_0.

Если не существует даже среднеквадратической производной, бывает возможно определить обобщенную производную случайного процесса (в смысле теории обобщенных функций), но об этом позже.

Для стационарных в широком смысле процессов получаем

$$m_{\xi'}(t)\equiv 0,\quad B_{\xi'}(t)=-B''_\xi(t),$$

и для существования среднеквадратической производной здесь необходимо и достаточно существования $B''_\xi(0)$.

Примеры.

1) Пусть $B_\xi(t)=\cos t$, тогда $B'_\xi(t)=-\sin t$, $B''_\xi(t)=-\cos t$, откуда $B_{\xi'}(t)=\cos t$.

2) Пусть $B_\xi(t)=e^{-t^2}$, тогда $B'_\xi(t)=-2te^{-t^2}$,

$$B''_\xi(t)=-2\left(e^{-t^2}+t(-2t)e^{-t^2}\right)=-2(1-2t^2)e^{-t^2},$$

откуда $B_{\xi'}(t)=2(1-2t^2)e^{-t^2}$.

3) Пусть $B_\xi(t)=e^{-|t|}$, такая функция не дифференцируема в нуле даже один раз, так что процесс не дифференцируем в среднеквадратическом смысле.

Домашнее задание.

1. Решить задачи из [Гм]: 789–791 (математическое ожидание и ковариационная функция), 798, 799 (производная), 819аб (интеграл).

2. Пусть $\xi(t)=U\cos(\lambda t+\varphi)$, где $\lambda>0$, $\mathbf{M}U^2=\mu>0$, φ имеет равномерное распределение на отрезке $[0,2\pi]$, U и φ независимы. Найти

математическое ожидание и ковариационную функцию процесса, проверить на стационарность.

Ответ: $m_\xi(t) \equiv 0$, $B_\xi(t,s) = (\mu/2)\cos\lambda(t-s)$, процесс стационарный в широком смысле.

3. В задаче оценивания полезного сигнала найти дисперсию оценки и ее асимптотику при $T \to \infty$, если: а) $B(t) = 1/(1+|t|)$; б) $B(t) = 1/(1+t^2)$; в) $B(t) = 1/\sqrt{1+|t|}$.

Ответы:

а)

$$\frac{2((T+1)\ln(T+1)-T)}{T^2} \sim \frac{2\ln T}{T}, \quad T \to \infty;$$

б)

$$\frac{2T\operatorname{arctg} T - \ln(1+T^2)}{T^2} \sim \frac{\pi}{T}, \quad T \to \infty;$$

в)

$$\frac{4(2(T+1)^{3/2}-3T+1)}{3T^2} \sim \frac{8}{3\sqrt{T}}, \quad T \to \infty.$$

4. Найти ковариационную функцию производной стационарного в широком смысле процесса, если а) $B_\xi(t) = e^{-t^2}\cos t$; б) $B_\xi(t) = 1/(1+t^2)$, в) $B_\xi(t) = e^{-|t|}(1+|t|)$.

Ответы: а) $((3-4t^2)\cos t - 4t\sin t)e^{-t^2}$; б) $2(1-2t^2)/(1+t^2)^3$; в) $e^{-|t|}(1-|t|)$.

2 Винеровский процесс

Гауссовским процессом называется случайный процесс $\xi(t)$, у которого любые вектора $(\xi(t_1),\ldots,\xi(t_n))$, $0 \le t_1 < \ldots < t_n$, имеют многомерные нормальные распределения. Гауссовский процесс однозначно определяется функциями $m(t)$ и $B(t,s)$, поскольку многомерное нормальное распределение однозначно определяется вектором средних и ковариационной матрицей.

Для *винеровского процесса* $w(t)$ существуют два эквивалентных определения:

1. Как гауссовского процесса: $w(t)$ — гауссовский процесс с $m(t) \equiv 0$, $B(t,s) = \min\{t,s\}$.

2. Как *процесса с независимыми приращениями*:

а) $w(0) = 0$;

б) $w(t_1)$, $w(t_2)-w(t_1)$,..., $w(t_n)-w(t_{n-1})$, где $0\le t_1<t_2<\ldots<t_n$, независимы (это и есть приращения);

в) $w(t)-w(s)\sim N(0,t-s)$, $t>s$.

Траектории винеровского процесса непрерывны, но нигде не дифференцируемы (с вероятностью единица).

Винеровский процесс обладает рядом интересных свойств, в частности:

1) процесс $\tilde w(t)=w(t+T)-w(T)$, $T>0$, также является винеровским (*марковское свойство*);

2) процесс $\tilde w(t)=w(ct)/\sqrt{c}$, $c>0$, также является винеровским (*самоподобие*);

3) процесс

$$\tilde w(t)=\begin{cases} tw(1/t), & t>0,\\ 0, & t=0,\end{cases}$$

также является винеровским (*инверсия*);

4) процесс

$$\tilde w(t)=\begin{cases} w(t), & t\le T,\\ 2w(T)-w(t+T), & t>T,\end{cases}\qquad T\ge 0,$$

также является винеровским (*принцип отражения*).

5) $\mathbf{P}(\max\limits_{u\in[0,t]} w(u)>x)=2\mathbf{P}(w(t)>x)$, $x>0$;

6)

$$\mathbf{P}\left(\limsup_{t\to+\infty}\frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=1\right)=1,\quad \mathbf{P}\left(\liminf_{t\to+\infty}\frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}}=-1\right)=1$$

(*закон повторного логарифма*)

Докажем первые два свойства с помощью первого определения (как гауссовского процесса). Поскольку указанные преобразования сохраняют нулевое среднее и гауссовость, достаточно проверить ковариационные функции:

1)

$$\begin{aligned}
&B_{\tilde w}(t,s)=\operatorname{cov}(w(t+T)-w(T),w(s+T)-w(T))=\\
&=\operatorname{cov}(w(t+T),w(s+T))-\operatorname{cov}(w(t+T),w(T))-\\
&-\operatorname{cov}(w(T),w(s+T))+\operatorname{cov}(w(T),w(T))=\\
&=\min\{t+T,s+T\}-\min\{t+T,T\}-\min\{T,s+T\}+T=\\
&=\min\{t,s\}+T-T-T+T=\min\{t,s\};
\end{aligned}$$

2)
$$B_{\tilde{w}}(t,s) = \operatorname{cov}\left(\frac{w(ct)}{\sqrt{c}}, \frac{w(cs)}{\sqrt{c}}\right) = \frac{\operatorname{cov}(w(ct), w(cs))}{c} =$$
$$= \frac{\min\{ct, cs\}}{c} = \frac{c\min\{t,s\}}{c} = \min\{t,s\}.$$

Рассмотрим некоторые важные процессы, которые можно получить из винеровского.

1. Процесс Орнштейна-Уленбека. Введем процесс

$$\eta(t) = \sigma e^{-\alpha t} w(e^{2\alpha t}), \quad \sigma, \alpha > 0,$$

тогда $m_\eta(t) \equiv 0$ и

$$B_\eta(t,s) = \sigma^2 e^{-\alpha t} e^{-\alpha s} \min\{e^{2\alpha t}, e^{2\alpha s}\} = \sigma^2 e^{\alpha(2\min\{t,s\} - (t+s))} = \sigma^2 e^{-\alpha|t-s|}.$$

Гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией вида $\sigma^2 e^{-\alpha|t-s|}$, $\sigma, \alpha > 0$, называется *процессом Орнштейна-Уленбека.* Таким образом, мы получили, как такой процесс можно построить конструктивно из винеровского.

Из вида ковариационной функции следует, что процесс Орнштейна-Уленбека является стационарным в широком смысле, и можно написать $B(t) = \sigma^2 e^{-\alpha|t|}$.

Имеем

$$\eta(0) = \sigma w(1),$$
$$\eta(t) = \sigma e^{-\alpha t}(w(e^{2\alpha t}) - w(1) + w(1)) = \sigma e^{-\alpha t}(w(e^{2\alpha t}) - w(1)) + e^{-\alpha t}\eta(0),$$

где первое слагаемое в правой части не зависит от $\eta(0)$. Таким образом, при условии $\eta(0) = x_0$ получаем

$$\eta(t) \sim N(x_0 e^{-\alpha t}, \sigma^2(1 - e^{-2\alpha t})).$$

Значит, зависимость от начального условия экспоненциально убывает.

2. Белый шум. Введем процесс

$$\eta(t) = \frac{w(t+h) - w(t)}{h}, \quad h > 0.$$

Такой процесс должен был бы сходиться к производной винеровского процесса при $h \to 0$. Однако известно, что его траектории не дифференцируемы, так что потраекторной производной нет. Среднеквадратической производной тоже нет, поскольку функция $B(t,s) = \min\{t,s\}$ не дифференцируема, и второй производной $\partial^2 B_\xi(t,s)/\partial t\,\partial s$ не существует ни в какой точке (t_0,t_0). Что же происходит?

Изучим сначала ковариационную функцию процесса $\eta(t)$.

Пусть $|t-s|>h$, тогда либо $t<t+h<s<s+h$, либо $s<s+h<t<t+h$. Приращения $w(t)$ на отрезках $[t,t+h]$ и $[s,s+h]$ независимы, следовательно, $B_\eta(t,s)=0$ при $|t-s|>h$.

Пусть теперь $|t-s|\le h$, и для определенности, $t>s$, тогда $s<t\le s+h<t+h$. Вычислим ковариацию

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cov}(w(t+h)-w(t),w(s+h)-w(s))=\\
&=\operatorname{cov}(w(t+h),w(s+h))-\operatorname{cov}(w(t+h),w(s))-\\
&-\operatorname{cov}(w(t),w(s+h))-\operatorname{cov}(w(t),w(s))=\\
&=\min\{t+h,s+h\}-\min\{t+h,s\}-\min\{t,s+h\}+\min\{t,s\}=\\
&=(s+h)-t-s+s=h-(t-s),
\end{aligned}$$

а при $t<s$ аналогично получаем $h-(s-t)$, так что в общем случае ответ здесь $h-|t-s|$. Следовательно,

$$B_\eta(t,s)=\begin{cases}\dfrac{h-|t-s|}{h^2}, & |t-s|\le h,\\ 0, & |t-s|>h.\end{cases}$$

Получается, что процесс $\eta(t)$ стационарный в широком смысле, и в терминах ковариационной функции от одного аргумента можем написать

$$B_\eta(t)=\begin{cases}\dfrac{h-|t|}{h^2}, & |t|\le h,\\ 0, & |t|>h.\end{cases}$$

График такой функции имеет вид треугольника с высотой $1/h$ в нуле и основанием $[-h,h]$. Его площадь при любом $h>0$ равна единице. Таким образом, для всех B_η верно:

1) $B_\eta(t)\to 0$ для всех $t\ne 0$ при $h\to 0$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} B_\eta(t)\,dt=1$.

Такие функции сходятся (в некотором смысле) к обобщенной функции, дельта-функции $\delta(t)$, формально удовлетворяющей условиям:

1) $\delta(t)=0$ для всех $t\ne 0$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,dt=1$.

Таким образом, можно считать, что существует обобщенная производная винеровского процесса, это обобщенный случайный процесс, стационарный в широком смысле, с ковариационной функцией $\delta(t)$. Такой процесс называется *белым шумом*. Обозначим его $n(t)=w'(t)$.

Для проверки проведем вычисление ковариационной функции интегрального процесса от $n(t)$ по определению дельта-функции:

$$B(t,s) = \int_0^t \int_0^s \delta(u-v)\,dv\,du = \int_0^t \mathbf{I}(u<s)\,du = \min\{t,s\}.$$

Считается, что гауссовость наследуется от винеровского процесса к белому шуму и наоборот.

Дельта-функцию можно рассматривать также как предел любых других функций, у которых пик в нуле растет, во всех остальных точках они стремятся к нулю, а полный интеграл от них равен единице. Если взять последовательность процессов с ковариационными функциями, удовлетворяющими этим условиям, то ковариационные функции соответствующих интегральных процессов будут сходиться к $\min\{t,s\}$.

Пусть $f(t)$ — детерминированная функция и

$$\eta(t) = \int_0^t f(u)\,dw(u) = \int_0^t f(u)n(u)\,du,$$

тогда

$$B_\eta(t,s) = \int_0^t \int_0^s f(u)f(v)\delta(u-v)\,dv\,du = \\ = \int_0^t f^2(u)\mathbf{I}(u<s)\,du = \int_0^{\min\{t,s\}} f^2(u)\,du,$$

откуда

$$\mathbf{D}\eta(t) = \int_0^t f^2(u)\,du.$$

Домашнее задание.

1. Решить задачи из [МП]: 3-6 (гл. 1, § 2, с. 49–50) (преобразования винеровского процесса), 8, 9 (гл. 3, §10, с. 210) (интегралы).

2. Доказать сходимость интегралов (с вероятностью единица)

а)

$$\int_1^{+\infty} \frac{w^2(t)}{t^3}\,dt;$$

б)

$$\int_0^1 \frac{w(t)}{t}\,dt.$$

Указание: использовать закон повторного логарифма и инверсию.

3*. Проверить, что ковариационные функции интегральных процессов сходятся к $\min\{t,s\}$, если ковариационные функции исходных процессов, стационарных в широком смысле, имеют вид:

а)

$$B(t) = \begin{cases} \dfrac{h-|t|}{h^2}, & |t| \le h, \\ 0, & |t| > h, \end{cases} \qquad h \to 0;$$

б)

$$B(t) = \frac{\alpha}{2} e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha \to +\infty.$$

3 Спектральная теория

Согласно теореме Бохнера-Хинчина, непрерывная ковариационная функция стационарного в широком смысле случайного процесса допускает *спектральное представление*

$$B(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\, dF(\lambda),$$

где F называется *спектральной функцией*. Это ограниченная, неубывающая, непрерывная справа функция, $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = B(0) > 0$. Если ее можно представить в виде

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\lambda} f(u)\, du,$$

то $f(\lambda)$ называется *спектральной плотностью*, тогда $f(\lambda) \ge 0$ (в точках непрерывности) и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda)\, d\lambda = B(0) < \infty.$$

Разница между функцией распределения и спектральной функцией только в том, что первая растет от 0 до 1, а вторая — до $B(0) > 0$, но если положить $F_0(\lambda) = F(\lambda)/B(0)$, $f_0(\lambda) = f(\lambda)/B(0)$, то получим функцию и плотность некоторого распределения F_0, тогда $B(t) = B(0)\varphi_0(t)$, где $\varphi_0(t)$ — характеристическая функция F_0.

Применим обратное преобразование Фурье:

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t} B(t)\, dt$$

— если в результате получается интегрируемая неотрицательная функция, то она и есть спектральная плотность.

Поскольку $B(t)$ — четная действительная функция, то

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} B(t) \cos \lambda t \, dt,$$

и $f(\lambda)$ тоже четная, поэтому верна формула

$$B(t) = 2 \int_0^{+\infty} f(\lambda) \cos \lambda t \, d\lambda.$$

Содержательная интерпретация спектрального представления заключается в следующем. Как мы видели ранее, одно случайное колебание с частотой λ дает ковариационную функцию вида $D \cos \lambda t$. Здесь предполагается, что случайный процесс получается сложением множества случайных колебаний на разных частотах, при этом $f(\lambda)$ отражает вклад каждой частоты в общую дисперсию процесса.

Примеры.

1) Пусть

$$f(\lambda) = \begin{cases} c, & |\lambda| \le \lambda_0, \\ 0, & |\lambda| > \lambda_0, \end{cases} \qquad c, \lambda_0 > 0,$$

тогда

$$B(t) = 2 \int_0^{+\infty} f(\lambda) \cos \lambda t \, d\lambda = 2c \int_0^{\lambda_0} \cos \lambda t \, d\lambda = \frac{2c}{t} \sin \lambda_0 t.$$

2) Поставим вопрос, может ли быть ковариационной функцией некоторого процесса

$$B(t) = \begin{cases} \sigma^2, & |t| \le t_0, \\ 0, & |t| > t_0, \end{cases} \qquad \sigma, t_0 > 0.$$

Вычисляем

$$f(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} B(t) \cos \lambda t \, dt = \frac{\sigma^2}{\pi} \int_0^{t_0} \cos \lambda t \, dt = \frac{\sigma^2}{\pi \lambda} \sin \lambda t_0,$$

для этой функции не выполняется условие неотрицательности, значит, такого не может быть.

3) Пусть $B(t)=De^{-\alpha|t|}$, $D,\alpha>0$, тогда

$$\begin{aligned}
f(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}B(t)\,dt = \frac{D}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t-\alpha|t|}\,dt = \\
&= \frac{D}{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(i\lambda+\alpha)t}\,dt + \int_{-\infty}^{0} e^{-(i\lambda-\alpha)t}\,dt\right) = \\
&= \frac{D}{2\pi}\left(\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+i\lambda)t}\,dt + \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha-i\lambda)t}\,dt\right) = \\
&= \frac{D}{2\pi}\left(\frac{1}{\alpha+i\lambda}+\frac{1}{\alpha-i\lambda}\right) = \frac{D\alpha}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)}.
\end{aligned}$$

4) Пусть $B(t)=e^{-\alpha t^2}$, $\alpha>0$. Воспользуемся методом характеристических функций. Известно, что у нормального распределения с плотностью

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

характеристическая функция

$$\varphi(t)=\exp\left\{iat-\frac{\sigma^2t^2}{2}\right\}.$$

Возьмем $\sigma^2/2=\alpha$, $a=0$, тогда $B(t)=\varphi(t)$ и $f(\lambda)=p(\lambda)$. Подставляя $\sigma=\sqrt{2\alpha}$ в формулу плотности, получаем

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{4\alpha}\right\}.$$

Спектральную плотность можно определить и для обобщенных процессов, например, для белого шума. Вычислим спектральную плотность процесса с $B(t)=\delta(t)$. Получаем

$$f(\lambda)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\lambda t}\delta(t)\,dt=\frac{1}{2\pi}.$$

Спектральная плотность оказывается постоянной. Строго говоря, она не является спектральной плотностью, поскольку не интегрируема, но тем не менее используется на практике (как будет описано далее). Тот же результат можно получить, если при $B(t)=De^{-\alpha|t|}$ положить $D=\alpha/2$ и $\alpha\to+\infty$ (т.е. создав семейство ковариационных функций, сходящихся к дельта-функции).

Белый шум потому и называется “белым”, что в него в равной мере входят случайные колебания на всех частотах, как в белый свет в равной мере входят световые лучи всех цветов радуги.

Домашнее задание.

1. Решить задачи из [МП]: 9, 10(1,2) (гл. 3, § 9, с. 186–187).

2. При каких значениях параметров $B(t) = e^{-\alpha|t|}(1 + \beta|t|)$, $\alpha > 0$, может быть ковариационной функцией некоторого процесса?

Ответ: $|\beta| \leq \alpha$.

3. Найти ковариационную функцию, если:

а)

$$f(\lambda) = \begin{cases} \cos\lambda, & |\lambda| \leq \pi/2, \\ 0, & |\lambda| > \pi/2, \end{cases}$$

б)

$$f(\lambda) = \begin{cases} 1 - \lambda^2, & |\lambda| \leq 1, \\ 0, & |\lambda| > 1. \end{cases}$$

Ответы:

а)

$$\frac{2}{1-t^2}\cos\frac{\pi t}{2};$$

б)

$$\frac{4(\sin t - t\cos t)}{t^3}.$$

4. Найти спектральную плотность, если:

а) $B(t) = 1/(1+t^2)$; б) $B(t) = e^{-\alpha t^2}\cos\beta t$, $\alpha > 0$.

Указание: использовать метод характеристических функций.

Ответы:

а) $e^{-|\lambda|}/(2\pi)$;

б)

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi\alpha}}\left(\exp\left\{-\frac{(\lambda-\beta)^2}{4\alpha}\right\} + \exp\left\{-\frac{(\lambda+\beta)^2}{4\alpha}\right\}\right).$$

4 Линейные преобразования и дифференциальные уравнения

Для стационарного в широком смысле процесса имеет место спектральное представление:

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} Z_\xi(d\lambda),$$

где Z_ξ — случайная *спектральная мера*, описывающая колебания на разных частотах.

Линейным преобразованием процесса называется его преобразование в новый процесс по формуле

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t}\psi(\lambda) Z_\xi(d\lambda),$$

где функция $\psi(\lambda)$ называется *частотной характеристикой* преобразования. Тогда

$$f_\eta(\lambda) = |\psi(\lambda)|^2 f_\xi(\lambda),$$

если f_η при этом получается интегрируемой.

Возникает вопрос, как такое преобразование провести физически, имея дело с реальным процессом, а не с его спектральной мерой, которая не наблюдаема?

Пусть задана функция $K(t)$, такая что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |K(t)|\, dt < \infty.$$

Определим процесс

$$\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t-u)\xi(u)\, du,$$

где мы предполагаем уже, что процесс $\xi(t)$ начинается по времени не от нуля, а от $-\infty$, тогда это будет линейное преобразование с частотной характеристикой

$$\psi(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) e^{-i\lambda t}\, dt.$$

Функция K в данном случае называется *весовой функцией* или *импульсным откликом*. Подходящую весовую функцию можно получить из ψ обратным преобразованием:

$$K(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\lambda) e^{i\lambda t}\, d\lambda.$$

Физический смысл обычно имеют только весовые функции, равные нулю при $t < 0$, если мы строим процесс $\eta(t)$ в реальном времени и нам известны значения $\xi(u)$ лишь до момента t, а заглядывать в будущее мы не можем. Если же мы строим $\eta(t)$ по заранее накопленным данным за большой промежуток времени, это ограничение можно снять.

Пример. Пусть

$$K(t) = \begin{cases} e^{-t}, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

и $B_\xi(t) = e^{-2|t|}$, тогда

$$f_\xi(\lambda) = \frac{2}{\pi(4+\lambda^2)}, \quad \psi(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-t} e^{-i\lambda t}\, dt = \frac{1}{1+i\lambda}.$$

Получаем

$$f_\eta(\lambda) = |\psi(\lambda)|^2 f_\xi(\lambda) = \frac{2}{\pi(1+\lambda^2)(4+\lambda^2)} =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1/3}{1+\lambda^2} + \frac{-1/3}{4+\lambda^2}\right) = \frac{2}{3}\frac{1}{\pi(1+\lambda^2)} - \frac{1}{3}\frac{2}{\pi(4+\lambda^2)}.$$

Чтобы перейти к $B_\eta(t)$, приводим слагаемые к виду $D\alpha/(\pi(\alpha^2+\lambda^2))$. Таким образом,

$$B_\eta(t) = \frac{2}{3}e^{-|t|} - \frac{1}{3}e^{-2|t|}.$$

Вернемся к спектральному представлению

$$\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda t} Z_\xi(d\lambda),$$

Формально дифференцируя экспоненту под знаком интеграла, получаем спектральное представление для производной:

$$\xi'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} i\lambda e^{i\lambda t} Z_\xi(d\lambda).$$

Аналогично, для n-ой производной получаем

$$\xi^{(n)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (i\lambda)^n e^{i\lambda t} Z_\xi(d\lambda).$$

В общем случае, если $P(\lambda) = p_n\lambda^n + \ldots p_0$, то можно взять процесс

$$\eta(t) = P\left(\frac{d}{dt}\right)\xi(t) = p_n\xi^{(n)}(t) + \ldots p_0\xi(t) =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(p_n(i\lambda)^n + \ldots p_0\right) e^{i\lambda t} Z_\xi(d\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(i\lambda) e^{i\lambda t} Z_\xi(d\lambda).$$

Такой процесс представляет собой линейное преобразование с частотной характеристикой $\psi(\lambda) = P(i\lambda)$, отсюда

$$f_\eta(\lambda) = |P(i\lambda)|^2 f_\xi(\lambda).$$

Пусть теперь задано дифференциальное уравнение со случайной правой частью
$$P\left(\frac{d}{dt}\right)X(t) = \xi(t),$$
где $P(\lambda)$ — многочлен, $\xi(t)$ — стационарный в широком смысле процесс со спектральной плотностью $f_\xi(\lambda)$, тогда
$$|P(i\lambda)|^2 f_X(\lambda) = f_\xi(\lambda),$$
откуда
$$f_X(\lambda) = \frac{f_\xi(\lambda)}{|P(i\lambda)|^2}.$$

Рассмотрим модель маятника, на который действуют возвращающая сила, пропорциональная отклонению от точки равновесия, сила трения, пропорциональная скорости, и некоторая случайная сила. Получаем дифференциальное уравнение для отклонения
$$X'' + \alpha X' + \beta X = \xi(t),$$
в данном случае $P(\lambda) = \lambda^2 + \alpha\lambda + \beta$.

Примеры.

1) Пусть
$$X'' + 5X' + 6X = \xi(t), \quad B_\xi(t) = e^{-|t|},$$
тогда $f_\xi(\lambda) = 1/(\pi(1+\lambda^2))$, $P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 6$. Имеем
$$\begin{aligned}&|P(i\lambda)|^2 = |-\lambda^2 + 5i\lambda + 6|^2 = (6-\lambda^2)^2 + 25\lambda^2 = \\ &= \lambda^4 - 12\lambda^2 + 36 + 25\lambda^2 = \lambda^4 + 13\lambda^2 + 36 = (\lambda^2+4)(\lambda^2+9).\end{aligned}$$

Отсюда
$$f_X(\lambda) = \frac{1}{\pi(1+\lambda^2)(4+\lambda^2)(9+\lambda^2))} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1/24}{1+\lambda^2} + \frac{-1/15}{4+\lambda^2} + \frac{1/40}{9+\lambda^2}\right).$$

Чтобы перейти к $B_X(t)$, приведем слагаемые к виду $D\alpha/(\pi(\alpha^2+\lambda^2))$:
$$f_X(\lambda) = \frac{1}{24}\frac{1}{\pi(1+\lambda^2)} - \frac{1}{30}\frac{2}{\pi(4+\lambda^2)} + \frac{1}{120}\frac{3}{\pi(9+\lambda^2)},$$
откуда
$$B_X(t) = \frac{1}{24}e^{-|t|} - \frac{1}{30}e^{-2|t|} + \frac{1}{120}e^{-3|t|}.$$

2) Пусть имеется маятник без трения: $X'' + X = \xi(t)$, тогда $P(\lambda) = \lambda^2 + 1$, $|P(i\lambda))|^2 = (1-\lambda^2)^2$ и

$$f_X(\lambda) = \frac{f_\xi(\lambda)}{(1-\lambda^2)^2} = \frac{f_\xi(\lambda)}{(1-\lambda)^2(1+\lambda)^2}.$$

Если $f_\xi(\lambda)$ отлична от нуля в точках ± 1 или имеет там нули менее чем 2-го порядка, там возникают полюса, спектральная плотность неинтегрируема. Это означает, что стационарного решения нет, возникает резонанс, маятник идет вразнос. Если $f_\xi(\lambda)$ имеет в точках ± 1 нули не менее чем 2-го порядка, стационарное решение существует.

3) Пусть в задаче о движении материальной точки с трением на нее действует белый шум: $X' + \alpha X = cn(t)$, $c, \alpha > 0$, тогда $f_\xi(\lambda) = c^2/(2\pi)$ и

$$f_X(\lambda) = \frac{c^2}{2\pi}\frac{1}{|i\lambda + \alpha|^2} = \frac{c^2}{2\alpha}\frac{\alpha}{\pi(\alpha^2 + \lambda^2)}.$$

Соответственно, $B_X(t) = De^{-\alpha|t|}$, где $D = c^2/(2\alpha)$, так что $X(t)$ оказывается процессом Орнштейна-Уленбека (гауссовость наследуется от винеровского процесса). Это уравнение называется *уравнением Ланжевена.*

Домашнее задание.

1. Решить задачи из [Гм]: 916, 917 (уравнения).

2. По весовой функции линейного преобразования $K(t) = e^{-2t}\cos 3t$, $t \geq 0$, найти квадрат модуля частотной характеристики $|\psi(\lambda)|^2$.

Ответ:

$$\frac{4+\lambda^2}{(4+(\lambda-3)^2)(4+(\lambda+3)^2)}.$$

3. Найти ковариационную функцию процесса $X(t)$, если

$$X'' + 4X' + 3X = \xi(t), \quad B_\xi(t) = e^{-4|t|}.$$

Ответ:

$$\frac{1}{30}e^{-|t|} - \frac{1}{42}e^{-3|t|} + \frac{1}{105}e^{-4|t|}.$$

4. Найти ковариационную функцию процесса $X(t)$, если

$$X'' + 5X' + 6X = 2n(t).$$

Ответ:

$$\frac{1}{5}e^{-2|t|} - \frac{2}{15}e^{-3|t|}.$$

5 Цепи Маркова

Марковским процессом называется случайный процесс, в котором будущее не зависит от прошлого, при условии, что известно настоящее (см. [ФЛ, гл. 9]).

Цепью Маркова называется марковский процесс, если время или множество возможных значений дискретны.

Далее будем предполагать, что множество возможных значений дискретно, а время сначала дискретно (0, 1, 2,...), потом непрерывно.

Здесь имеется своя специфическая терминология. Вместо "множества возможных значений" говорят о "пространстве состояний" цепи Маркова. Вместо "процесс принимает такое-то значение" говорят "цепь Маркова находится в таком-то состоянии" (в данный момент), вместо "процесс меняет значение с одного на другое" — "цепь Маркова переходит из одного состояния в другое".

Часто используется графическое изображение. Состояния обозначаются кружками, возможные переходы — стрелками с соответствующими вероятностями.

Рассмотрим *однородную цепь Маркова*, у которой вероятности переходов не зависят от времени, с конечным числом состояний m. Пусть $P = (p_{ij})$ — матрица переходных вероятностей (за один шаг), тогда n-ая степень этой матрицы $P^n = (p_{ij}^{(n)})$ оказывается матрицей переходных вероятностей за n шагов.

Пусть $p_i(n)$ — вероятность того, что цепь Маркова находится в состоянии i в момент n, тогда вектор $p(n) = (p_1(n), \ldots, p_m(n))$ задает распределение цепи Маркова в момент n, а $p(0)$ — *начальное распределение.* Они связаны следующей векторно-матричной формулой:

$$p(n) = p(0)P^n.$$

Важное значение имеет классификация состояний цепи Маркова.

Состояние i называется несущественным, если из него можно перейти в такое состояние j, из которого уже нельзя вернуться в состояние i.

Состояния i и j называются *сообщающимися*, если из каждого из них можно перейти в другое. Все существенные состояния разбиваются на классы сообщающихся состояний. Если имеется один класс сообщающихся состояний, то цепь Маркова называется *неразложимой.*

Класс сообщающихся состояний называется *периодическим* с периодом $d \geq 2$, если для любого состояния i из данного класса возможные времена возвращения в это состояние (т.е. такие n, что $p_{ij}^{(n)} > 0$) кратны d. Иначе класс называется *апериодическим.* Если у цепи Маркова нет периодических классов, то она вся называется апериодичной.

Эргодическая теорема. *Если цепь Маркова неразложима и апериодична, то у нее существует предельное распределение* $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m)$*:*

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)},$$

которое определяется системой уравнений

$$\pi = \pi P, \quad \sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1.$$

Таким образом, неважно, с какого состояния i мы начинаем, — вероятность застать цепь Маркова в состоянии j через большой промежуток времени будет близка к π_j.

Если изначально задать $p(0) = \pi$, то так и и останется: $p(n) = \pi$ для всех $n \geq 1$. Предельное распределение является и *стационарным* (не меняющимся во времени).

Система линейных уравнений, определяемая $\pi = \pi P$, вырождена и имеет ранг $m - 1$, так что из нее достаточно взять $m - 1$ уравнений и дополнить уравнением нормировки $\sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1$.

Разобрать задачи из [ФЛ], гл. 9, с. 175–177.

В случае непрерывного времени вместо вероятностей перехода за единицу времени вводятся *интенсивности* $\lambda_{ij} > 0$, $i \neq j$. Это означает, что если в момент времени t цепь Маркова находится в состоянии i, то к моменту $t + \Delta t$ она перейдет в состояние j с вероятностью $\lambda_{ij}\Delta t + o(\Delta t)$, а вероятность более одного перехода за это время $o(\Delta t)$, $\Delta t \to 0$.

В результате получается, что в состоянии i цепь Маркова находится показательно распределенное время с параметром $r_i = \sum_{j\neq i} \lambda_{ij}$ (интенсивность выхода из состояния i), а по истечении этого времени переходит в состояние j с вероятностью λ_{ij}/r_i.

Пусть $\Lambda = (\lambda_{ij})$ — матрица интенсивностей, дополненная диагональными элементами $\lambda_{ii} = -r_i$, тогда система уравнений (при условии неразложимости)

$$\pi\Lambda = 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \pi_j = 1$$

дает предельное распределение.

Рассмотрим приложения в теории надежности и теории массового обслуживания.

Разобрать пример 2 из [ФЛ], гл. 9, с. 179–180.

Отметим, что если имеется m машин, которые выходят из строя и ремонтируются независимо друг от друга, и каждая находится в рабочем состоянии с вероятностью π_1, то число одновременно работающих машин имеет биномиальное распределение с числом испытаний m и вероятностью успеха π_1.

Рассмотрим далее однолинейную систему массового обслуживания с очередью. Она состоит из одного обслуживающего прибора с неограниченной очередью к нему, в которую поступают заявки. Это могут быть люди при обслуживании в кассе или офисе, документы в офисной работе, информационные пакеты в компьютерной сети и др.

Пусть заявки поступают через показательно распределенные промежутки времени с параметром λ, а обслуживаются за показательно распределенное время с параметром μ. Назовем λ *интенсивностью поступления* и μ *интенсивностью обслуживания*, обозначим $\theta = 1/\lambda$ — среднее время между поступлениями, $\tau = 1/\mu$ — среднее время обслуживания.

Величина $\rho = \lambda/\mu = \tau/\theta$ называется *загрузкой системы*. Если $\rho \geq 1$, длина очереди со временем стремится к бесконечности. Если $0 < \rho < 1$, то существует стационарный режим (предельное распределение).

Будем нумеровать состояния цепи Маркова по числу заявок, находящихся в системе (в данном случае число состояний счетно). Тогда отличны от нуля только интенсивности

$$\lambda_{i,i+1} = \lambda, \quad i \geq 0; \quad \lambda_{i,i-1} = \mu, \quad i \geq 1,$$

откуда получаем бесконечную матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \dots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

и бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned} &-\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0, \\ &\lambda\pi_{j-1} - (\lambda+\mu)\pi_j + \mu\pi_{j+1} = 0, \quad j \geq 1, \end{aligned}$$

откуда

$$\pi_1 = \lambda\pi_0/\mu = \rho\pi_0;$$
$$\mu\pi_2 = (\lambda+\mu)\pi_1 - \lambda\pi_0 = (\lambda+\mu)\rho\pi_0 - \lambda\pi_0 = \lambda\rho\pi_0, \quad \pi_2 = \rho^2\pi_0,$$
$$\ldots$$
$$\pi_j = \rho^j\pi_0, \quad j \geq 1.$$

Используем условие нормировки:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi_j = \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j = \frac{\pi_0}{1-\rho} = 1,$$

откуда

$$\pi_0 = 1-\rho, \quad \pi_j = \rho^j(1-\rho),$$

т.е. геометрическое распределение (начиная с нуля).

Найдем среднюю длину очереди. При числе заявок $j < 2$ очереди нет, при $j \geq 2$ длина очереди равна $j-1$.

Используем тот факт, что при $|x| < 1$ верно

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}, \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Получаем

$$L = \sum_{j=2}^{\infty}(j-1)\pi_j = \sum_{j=2}^{\infty}(j-1)\rho^j(1-\rho) =$$
$$= (1-\rho)\sum_{l=1}^{\infty} l\rho^{l+1} = \rho^2(1-\rho)\sum_{l=1}^{\infty} l\rho^{l-1} = \rho^2(1-\rho)\frac{1}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho^2}{1-\rho}.$$

Вероятность того, что длина очереди больше m, равна

$$v_m = \sum_{j=m+2}^{\infty} \pi_j = \sum_{j=m+2}^{\infty} \rho^j(1-\rho) = \rho^{m+2}.$$

Пример. Пусть среднее время между поступлениями заявок составляет 5 минут. Сколько в среднем времени должно занимать обслуживание заявки, чтобы:

а) средняя длина очереди не превышала 4 заявок?

б) вероятность очереди из более чем 4 заявок не превышала 10%?

Решение. Дано $\theta = 5$.

а) Из условия

$$L = \frac{\rho^2}{1-\rho} \leq 4$$

следует квадратичное неравенство $\rho^2 + 4\rho - 4 \leq 0$, решая которое, получаем $\rho \leq \sqrt{8} - 2 \approx 0,828$, откуда $\tau = \theta\rho \approx 4,14$ (мин).

б) Из условия

$$v_4 = \rho^6 \leq 0,1$$

получаем $\rho \leq 0,1^{1/6} \approx 0,681$, откуда $\tau = \theta\rho \approx 3,41$ (мин).

Домашнее задание.

1. Решить задачи из [ФЛ, гл. 9]: 1–8 (дискретное время), 12–15 (машины), 20 (очередь).

2. Пусть среднее время между поступлениями заявок составляет 10 минут. Сколько в среднем времени должно занимать обслуживание заявки, чтобы вероятность очереди более чем из 3 заявок составляла не более 10%?

Ответ: 6,31 мин.

6 Пуассоновский процесс

Пуассоновский процесс $N(t)$ можно рассматривать как цепь Маркова с непрерывным временем, счетным числом состояний (0, 1, 2,...), начальным состоянием 0 и интенсивностями переходов $\lambda_{i,i+1} = \lambda > 0$.

Есть также три других, эквивалентных определения:

1. Как *процесса восстановления.*

А именно, пусть ε_i, $i \geq 1$, — н.о.р. положительные случайные величины, определим

$$\tau_k = \sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i, \quad k \geq 1; \quad \xi(t) = \max\{k : \tau_k \leq t\}.$$

Название "процесс восстановления" возникло из теории надежности: предполагается, что некое изделие служит случайное время ε_1, потом выходит из строя, его заменяют на новое или мгновенно ремонтируют (так или иначе, восстанавливают его работоспособность), оно служит время ε_2 и т.д. Тогда $\xi(t)$ показывает число восстановлений, произошедших до момента t.

В случае пуассоновского процесса случайные величины ε_i, $i \geq 1$, имеют показательное распределение с параметром λ.

Таким образом, график процесса $N(t)$ имеет ступенчатый вид: сначала он равен нулю, затем через показательно распределенные промежутки времени увеличивается, каждый раз на единицу.

2. Как процесса с независимыми приращениями:

а) $N(0) = 0$;

б) $N(t_1)$, $N(t_2) - N(t_1)$,..., $N(t_n) - N(t_{n-1})$, где $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, независимы;

в) $N(t) - N(s) \sim Pois(\lambda(t-s))$, $t > s$.

3. Как *считающего процесса пуассоновского потока.*

Пуассоновским потоком называется набор бесконечного числа случайных точек на прямой, удовлетворяющих условиям:

а) распределение числа точек, попавших в некоторый интервал, зависит только от длины интервала, но не от его расположения;

б) числа точек, попавших в непересекающиеся интервалы, независимы;

в) вероятность попадания одной точки в интервал длины Δt равна $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$, а попадания туда более одной точки $o(\Delta t)$, $\Delta t \to 0$.

Тогда распределение числа точек, попавших в интервал длины l, оказывается пуассоновским с параметром λl. Величина λ называется *интенсивностью* пуассоновского потока.

Значение пуассоновского процесса $N(t)$ можно определить как число точек пуассоновского потока, попавших в промежуток $[0, t]$.

Если под прямой в определении пуассоновского потока имеется в виду время, то случайные точки — это моменты некоторых случайных событий. В качестве возможных приложений можно назвать радиоактивный распад атомов, поступление звонков на телефонную станцию, приход покупателей в магазин, движение машин по шоссе (без светофоров и достаточно редкое) и т.д.[4]

Напомним формулу распределения и характеристики пуассоновской случайной величины ν с параметром λ:

$$\mathbf{P}(\nu = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k \ge 0; \quad \mathbf{M}\nu = \lambda, \quad \mathbf{D}\nu = \lambda.$$

Отсюда выводятся характеристики пуассоновского процесса:

$$m_N(t) = \lambda t, \quad B_N(t, s) = \lambda \min\{t, s\}.$$

[4]Конечно, на практике предположение о постоянной интенсивности событий является грубым и применимо лишь на небольших промежутках времени, либо используются более сложные модели.

Заметим, что они такие же, как у процесса

$$\lambda t + \sqrt{\lambda} w(t).$$

Дело в том, что без предположения гауссовости математическое ожидание и ковариационная функция не определяют процесс однозначно.

Пример. Вероятность 2 точек пуассоновского потока на отрезке $[0, 1]$ равна вероятности 4 точек на том же отрезке. Найти эту вероятность.

Решение. Имеем

$$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda} = \frac{\lambda^4}{4!} e^{-\lambda}, \quad \lambda^2 = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12, \quad \lambda = \sqrt{12},$$

откуда искомая вероятность

$$p = \frac{12}{2} e^{-\sqrt{12}} = 6e^{-\sqrt{12}} \approx 0,188.$$

Важным свойством пуассоновского потока является следующее: при условии, что известно число n точек на интервале, они расположены как значения n независимых случайных величин, равномерно распределенных на этом интервале, в порядке возрастания (или, в терминах геометрической вероятности, как n точек, независимо брошенных на интервал наудачу). Применительно к пуассоновскому процессу речь идет о точках его скачков. Это свойство имеет различные применения.

Пример. Вычислить $\mathbf{P}(N(1) = 2 | N(2) = 5)$.

Решение. Если известно, что на отрезке $[0, 2]$ имеется 5 точек, они расположены как если бы их бросали на этот отрезок наудачу. Вероятность при этом попасть на отрезок $[0, 1]$ составляет $1/2$. Таким образом, условное распределение $N(1)$ (как числа точек, попавших на отрезок $[0, 1]$ из 5 брошенных) оказывается биномиальным с числом испытаний 5 и вероятностью успеха $1/2$. Следовательно,

$$\mathbf{P}(N(1) = 2 | N(2) = 5) = C_5^2 (1/2)^2 (1/2)^3 = C_5^2 (1/2)^5 = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}.$$

Рассмотрим некоторые процессы, связанные с пуассоновским.

1. Сложный пуассоновский процесс. Так называется случайный процесс вида

$$N^*(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \zeta_i,$$

где ζ_i, $i \geq 1$, — н.о.р.с.в., не зависимые с процессом $N(t)$, $t \geq 0$.

График такого процесса тоже ступенчатый, но он делает скачки не на единицу, а каждый раз на новую случайную величину.

Сложный пуассоновский процесс также является процессом с независимыми приращениями.

Используем следующие формулы для сумм случайного числа случайных величин. Пусть $\varkappa$ — случайная величина с значениями 0, 1, 2..., и ζ_i, $i \geq 1$, — независимые случайные величины, распределенные как ζ, и не зависящие от $\varkappa$, тогда:

$$\mathbf{M}\sum_{i=1}^{\varkappa}\zeta_i = \mathbf{M}\varkappa\mathbf{M}\zeta, \quad \mathbf{D}\sum_{i=1}^{\varkappa}\zeta_i = \mathbf{M}\varkappa\mathbf{D}\zeta + \mathbf{D}\varkappa(\mathbf{M}\zeta)^2.$$

Для сложного пуассоновского процесса получаем:

$$\mathbf{M}N^*(t) = (\lambda t)\mathbf{M}\zeta, \quad \mathbf{D}N^*(t) = (\lambda t)\mathbf{D}\zeta + (\lambda t)(\mathbf{M}\zeta)^2 = (\lambda t)\mathbf{M}\zeta^2.$$

Определим теперь процесс вида

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} f(\tau_k, t),$$

где f — детерминированная функция.

Тогда применяя свойство распределения на интервале известного числа точек, применительно к точкам τ_k, $k \geq 1$, получаем

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} f(\tau_k, t) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{N(t)} f(U_k, t),$$

где U_k, $k \geq 1$, независимы и равномерно распределены на $[0, t]$.

Пример. Пусть

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} \tau_k,$$

тогда

$$\eta(t) \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{N(t)} U_k.$$

Имеем

$$\mathbf{M}U = \frac{t}{2}, \quad \mathbf{D}U = \frac{t^2}{12}, \quad \mathbf{M}U^2 = \frac{t^2}{12} + \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{t^2}{3}.$$

Отсюда
$$\mathbf{M}\eta(t) = (\lambda t)\frac{t}{2} = \frac{\lambda t^2}{2}, \quad \mathbf{D}\eta(t) = (\lambda t)\frac{t^2}{3} = \frac{\lambda t^3}{3}.$$

2. Дробовой шум. В физике и теории связи рассматривают флуктуации тока в вакуумных трубках, возникающие в процессе попадания электронов на анод. Предполагается, что эти попадания происходят пуассоновским потоком и каждое попадание возбуждает затухающий ток, интенсивность которого через время u равна $I(u)$. Тогда суммарный ток можно описать *процессом дробового шума (дробового эффекта)*:

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} I(t - \tau_k).$$

Понятно, что такой процесс сводится к рассмотренному выше заменой $f(\tau_k, t) = I(t - \tau_k)$. Кроме того, дробовой шум обычно рассматривается в стационарном режиме, т.е. в пределе при $t \to \infty$. С помощью описанного выше подхода получаются формулы

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}\eta(t) = \lambda \int_0^{+\infty} I(u)\,du, \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{D}\eta(t) = \lambda \int_0^{+\infty} I^2(u)\,du,$$

в предположении, что указанные интегралы сходятся. Этот результат называется *теоремой Кэмпбелла.*

Дробовой шум и его обобщения имеют и другие различные приложения в природе и технике. Например, механическая система может испытывать какие-то толчки (удары) в случайные моменты времени и реагировать на них затухающим образом и т.п.

3. Телеграфный процесс. Так называется случайный процесс вида

$$\eta(t) = V(-1)^{N(t)},$$

где случайная величина V принимает значения ± 1 равновероятно и не зависит от процесса $N(t)$, $t \geq 0$.

Телеграфный процесс совершает скачки между ± 1 через показательно распределенные промежутки времени. Процесс назван так по аналогии с передачей телеграфного сигнала: электрический ток то идет $(+1)$, то не идет (-1). На самом деле реальный телеграфный сигнал устроен сложнее.

Очевидно,
$$m_\eta(t) = \mathbf{M}V\mathbf{M}(-1)^{N(t)} \equiv 0.$$

Для вычисления ковариационной функции используем следующую формулу. Если ν имеет распределение Пуассона с параметром λ, то для любого числа s верно:

$$\mathbf{M}s^{\nu} = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda s} = e^{\lambda(s-1)},$$

и в частности,

$$\mathbf{M}(-1)^{\nu} = e^{-2\lambda}.$$

Отсюда при $t > s$ получаем:

$$\begin{aligned} &B_{\eta}(t,s) = \mathbf{M}V^2(-1)^{N(t)+N(s)} = \mathbf{M}(-1)^{2N(s)+N(t)-N(s)} = \\ &= \mathbf{M}(-1)^{N(t)-N(s)} = e^{-2\lambda(t-s)}, \end{aligned}$$

а при $t < s$ в ответе t и s меняются местами, так что в общем случае

$$B_{\eta}(t,s) = e^{-2\lambda|t-s|}.$$

Таким образом, телеграфный процесс является стационарным в широком смысле и имеет такие же математическое ожидание и ковариационную функцию, что и процесс Орнштейна-Уленбека с $\alpha = 2\lambda$.

Домашнее задание.

1. Вероятность 4 точек пуассоновского потока на отрезке $[0,2]$ равна вероятности 6 точек на отрезке $[1,3]$. Найти вероятность 2 точек на пересечении этих отрезков.

Ответ: $(15/4)e^{-\sqrt{15/2}} \approx 0,242$.

2. Вычислить $\mathbf{P}(N(1) = 2|N(3) = 8)$.

Ответ: $1792/6561 \approx 0,273$.

3. Найти математическое ожидание и дисперсию процесса

$$\eta(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} e^{-\alpha\tau_k}, \quad \alpha > 0.$$

Ответ:

$$\mathbf{M}\eta(t) = \frac{\lambda(1-e^{-\alpha t})}{\alpha}, \quad \mathbf{D}\eta(t) = \frac{\lambda(1-e^{-2\alpha t})}{2\alpha}.$$

4. Вывести ковариационную функцию сложного пуассоновского процесса.

Ответ: $(\lambda \mathbf{M}\zeta^2)\min\{t,s\}$.

5. Доказать теорему Кэмпбелла о дробовом шуме.

6*. Найти математическое ожидание и дисперсию интеграла

$$J = \int_0^{+\infty} a^{N(t)}\, dt, \quad |a| < 1.$$

Ответ:

$$\mathbf{M}J = \frac{1}{\lambda(1-a)}, \quad \mathbf{D}J = \frac{1}{\lambda^2(1-a^2)}.$$

7 Формула Ито и СДУ

Ранее мы рассматривали дифференциальное уравнение Ланжевена

$$X' + \alpha X = cn(t),$$

решением которого был процесс Орнштейна-Уленбека. Умножив на дифференциал dt, его можно записать в виде

$$dX(t) = -\alpha X(t)\, dt + c\, dw(t),$$

который выглядит более корректным, поскольку производной $dw(t)/dt$, строго говоря, не существует.

В общем случае, уравнения вида

$$dX(t) = a(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dw(t)$$

называют *стохастическими дифференциальными уравнениями* (СДУ). Так, для уравнения Ланжевена $a(t,x) = -\alpha x$, $\sigma(t,x) = c$.

Формула Ито описывает, как преобразуется СДУ под действием преобразования $Y(t) = F(t, X(t))$, где F — детерминированная дважды дифференцируемая функция. А именно,

$$dY(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2(t,x)\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(t, X(t))dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, X(t))dX(t).$$

Пусть $X(t) = w(t)$, тогда $dX(t) = 0 \cdot dt + 1 \cdot dw(t)$, т.е. $a(t,x) \equiv 0$, $b(t,x) \equiv 1$, и для $Y(t) = \xi(t) = F(t, w(t))$ получаем

$$d\xi(t) = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)(t, w(t))dt + \frac{\partial F}{\partial x}(t, w(t))dw(t).$$

Примеры.

1) Пусть $\xi(t) = w^2(t)$, тогда

$$F(t,x) = x^2, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

откуда по формуле Ито

$$d\xi(t) = dt + 2w(t)dw(t).$$

Заметим, что интегрируя по отрезку $[0, t]$, можно получить формулу

$$w^2(t) = t + 2\int_0^t w(u)\,dw(u)$$

которая называется *интегральным представлением* для $w^2(t)$, и

$$\int_0^t w(u)\,dw(u) = \frac{w^2(t) - t}{2}.$$

2) Пусть $\xi(t) = w^3(t)$, тогда

$$F(t,x) = x^3, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

откуда по формуле Ито

$$d\xi(t) = 3w(t)dt + 3w^2(t)dw(t),$$

но это еще не совсем СДУ, поскольку правая часть выражается через $w(t)$, а должна через $\xi(t)$. Делая замену $w(t) = \xi^{1/3}(t)$, получаем

$$d\xi(t) = 3\xi^{1/3}(t)dt + 3\xi^{2/3}(t)dw(t),$$

и это уже СДУ, а $\xi(t) = w^3(t)$ — его решение с начальным условием $\xi(0) = 0$.

На основе формулы Ито можно предложить следующий метод решения СДУ: подобрать функцию $F(t,x)$ такую, чтобы получилось СДУ, которое нам надо решить (этот метод, конечно, работает не всегда).

В случае, если

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt + \sigma(\xi(t))dw(t),$$

т.е. нет зависимости коэффициентов a и σ от времени, следует искать функцию $F(x)$, удовлетворяющую обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 F}{dx^2} = a(F), \quad \frac{dF}{dx} = \sigma(F)$$

и начальному условию $F(0) = \xi_0$. Если она существует, то $\xi(t) = F(w(t))$ является решением СДУ с начальным условием $\xi(0) = \xi_0$.

Пример. Решим СДУ

$$d\xi(t) = -\frac{1}{2}\xi(t)dt + \sqrt{1-\xi^2(t)}dw(t).$$

Подходящая функция должна удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$F'' = -F, \quad F' = \sqrt{1-F^2}.$$

Решение первого из них хорошо известно: $F(x) = C\sin(x+\varphi)$, где для определенности положим $C > 0$, $\varphi \in [-\pi, \pi]$. Подставим это решение во второе уравнение:

$$C\cos(x+\varphi) = \sqrt{1 - C^2\sin^2(x+\varphi)},$$

откуда возводя в квадрат и вспомнив, что $\sin^2 x + \cos x^2 = 1$, получаем $C = 1$.

Здесь есть нюанс, что второе уравнение формально выполняется только при $\cos(x+\varphi) \geq 0$. Однако в силу принципа отражения $dw(t)$ в любой момент можно заменить на $-dw(t)$, и с вероятностной точки зрения, ничего не изменится (процесс останется винеровским), так что знак перед корнем можно считать любым, каким нам нужно.

Таким образом, общее решение СДУ имеет вид $\xi(t) = \sin(w(t)+\varphi)$. Из начального условия $\xi(0) = \sin\varphi = \xi_0$ можно найти φ, которое находится не однозначно: на периоде имеется два решения, которым соответствуют два решения $\xi(t)$, но с вероятностной точки зрения они равносильны с точностью до замены $w(t)$ на $-w(t)$ (тоже винеровский процесс), поэтому достаточно взять одно из них, положив $\varphi = \arcsin\xi_0$.

Еще один метод решения СДУ заключается в преобразовании уравнения к более простому виду (он тоже работает не всегда). Примем теперь за $X(t)$ в формуле Ито не винеровский процесс $w(t)$, а процесс $\xi(t)$, удовлетворяющий СДУ, и пусть $Y(t) = F(t, \xi(t))$.

Пример. Решим СДУ

$$d\xi(t) = \alpha\xi(t)dt + \beta\xi(t)dw(t).$$

Используем замену $Y(t) = \ln\xi(t)$, тогда

$$F(t,x) = \ln x, \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}, \quad \frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

откуда по формуле Ито

$$dY(t) = \frac{1}{2}\beta^2\xi^2(t)\left(-\frac{1}{\xi^2(t)}\right)dt + \frac{1}{\xi(t)}(\alpha\xi(t)dt + \beta\xi(t)dw(t)) =$$
$$= \left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)dt + \beta dw(t).$$

Интегрируя, получаем

$$Y(t) = \left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)t + \beta w(t) + C,$$

откуда общее решение

$$\xi(t) = \exp Y(t) = \exp\left\{\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)t + \beta w(t) + C\right\},$$

и с учетом начального условия

$$\xi(t) = \xi_0 \exp\left\{\left(\alpha - \frac{\beta^2}{2}\right)t + \beta w(t)\right\}.$$

Домашнее задание.

1. Найти

$$\int_0^t w^4(u)\,dw(u)$$

с помощью интегрального представления $w^5(t)$.

Ответ:

$$\frac{w^5(t)}{5} - 2\int_0^t w^3(u)\,du.$$

2. Показать, что процесс $\xi(t) = w(t)/(1+t)$ является решением СДУ

$$d\xi(t) = -\frac{\xi(t)dt}{1+t} + \frac{dw(t)}{1+t}$$

с начальным условием $\xi(0) = 0$.

3. Решить СДУ:

а)

$$d\xi(t) = dt + 2\sqrt{\xi(t)}dw(t)$$

с начальным условием $\xi(0) = \xi_0 > 0$;

б)

$$d\xi(t) = 3\xi^{1/3}(t)dt + 3\xi^{2/3}(t)dw(t)$$

с начальным условием $\xi(0) = \xi_0$;

в)

$$d\xi(t) = -8\xi(t)dt + 4\sqrt{16-\xi^2(t)}dw(t)$$

с начальным условием $\xi(0) = 2$.

Ответы: а) $\xi(t) = \left(w(t) + \xi_0^{1/2}\right)^2$, б) $\xi(t) = \left(w(t) + \xi_0^{1/3}\right)^3$, в) $\xi(t) = 4\sin(4w(t) + \pi/6)$.

4. Решить СДУ с начальным условием $\xi(0) = \xi_0$:

а)

$$d\xi(t) = 2t\xi(t)dt + \xi(t)dw(t);$$

б)

$$d\xi(t) = \xi(t)dt + 2t\xi(t)dw(t).$$

Ответы:

а)

$$\xi_0 \exp\left\{t^2 - \frac{t}{2} + w(t)\right\};$$

б)

$$\xi_0 \exp\left\{t - \frac{2}{3}t^3 + 2\int_0^t u\,dw(u)\right\}.$$