Задачи первой контрольной работы (ассистент П.А.Яськов).

1. *Неточность в решении.* На семинаре утверждалось

$$\bigcap_{n\geqslant 1}\{x:\rho_n(x,y)<1\}=\{x:\rho_\infty(x,y)<1\},\quad x=(x_1,x_2,...),\ y=(y_1,y_2,...),$$

где

$$\rho_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{|x_k-y_k|}{1+|x_k-y_k|}\,\frac{1}{2^k},\ \ n=1,2,...,\infty.$$

Последнее, конечно, неверно. Исправьте эту неточность, выразив $\{x:\rho_\infty(x,y)<1\}$ через счетное число шаров вида

$$\{x:\rho_n(x,y)<r\},\ r>0,\ n\in\mathbb{N}.$$

Решение. Имеем

$$\{x:\rho_\infty(x,y)<1\}=\bigcup_{m\geqslant 1}\bigcap_{n\geqslant 1}\left\{x:\rho_n(x,y)<1-\frac{1}{m}\right\}$$

2. *Первое попадание в A.* Пусть $\xi_1,\xi_2,\xi_3...$ независимы и одинаково распределены (*н.о.р.*) с $P(\xi\in A)>0$. Определим $\tau=\min\{i:\xi_i\in A\}$. Найти $P(\xi_\tau\in B)$, предполагая, что распределение ξ_1 известно.

Решение.

$$P(\xi_\tau\in B)=\sum_{n\geqslant 1}P(\xi_n\in B,\tau=n)=\sum_{n\geqslant 1}P(\xi_1\notin A,...,\xi_{n-1}\notin A,\xi_n\in A\cap B)=$$

$$=\sum_{n\geqslant 1}P(\xi_1\notin A)^{n-1}P(\xi_1\in A\cap B)=\frac{P(\xi_1\in A\cap B)}{1-P(\xi_1\notin A)}=P(\xi_1\in B|\xi_1\in A).$$

3. *Минимаксы в ковариациях.* Являются ли следующие функции ковариационными $t\wedge s,\ t\vee s,\ 1/(t\vee s)\ 1/(t\wedge s),\ (t\wedge s)(t\vee s),\ (t\wedge s)/(t\vee s)$ при $t,s>0$? Если да, то для каких процессов?

Решение. $t\vee s$ – нет, т.к. эта функция не является неотрицательно определенной

$$(1\vee 1)(-1)^2+(2\vee 2)1^2+2(1\vee 2)(-1)1=-1<0.$$

Аналогично показывается, что $1/(t\wedge s)$ не является ковариационной. Далее, если $\{B_t\}_{t\geqslant 0},\{W_t\}_{t\geqslant 0}$ – два независимых броуновских движения, то при $s,t>0$ имеем $cov(B_s,B_t)=t\wedge s$, $cov(sB_1,tB_1)=st=(t\wedge s)(t\vee s)$, а также

$$cov(W_{1/s},W_{1/t})=\frac{1}{t}\wedge\frac{1}{s}=\frac{1}{t\vee s},\ \ cov(B_sW_{1/s},B_tW_{1/t})=t\wedge s\cdot\frac{1}{t}\wedge\frac{1}{s}=\frac{t\wedge s}{t\vee s}.$$

4. *О вырожденной дисперсии.* Пусть ξ – случайный вектор. Доказать, что если матрица $D\xi$ вырождена, то компоненты ξ линейно зависимы п.н. (с точностью до константы).

Решение. Допустим, что $D\xi\cdot z=0$ для некоторого неслучайного вектора $z\neq 0$. Тогда $E|(\xi,z)-E(\xi,z)|^2=D(\xi,z)=z^TD\xi\,z=0$ и $(\xi,z)-E(\xi,z)=0$ п.н.

5. *Свойства Exp*(λ). Предположим, что ξ, η – н.о.р. экспоненциальные случайные величи-ны. Показать, что $\xi(\xi+\eta)^{-1}$ и $\xi+\eta$ независимы.
Решение. Совместная плотность ξ и $\xi+\eta$ равна

$$f_\xi(x) f_\eta(y-x) = \lambda^2 e^{-\lambda y}, \ \ 0 \leqslant x \leqslant y,$$

где y соответствует $\xi+\eta$. Отсюда следует, что условная плотность ξ при $\xi+\eta=y$ – это

$$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda y}}{\int_{[0,y]} \lambda^2 e^{-\lambda y} dx} = \frac{1}{y},$$

т.е. ξ условно на $\xi+\eta$ распределено равномерно на $[0, \xi+\eta]$, а $\xi(\xi+\eta)^{-1}$ – равномерно на $[0,1]$. В частности, получаем независимость $\xi(\xi+\eta)^{-1}$ и $\xi+\eta$.
6. Найти распределение $\int_0^1 tB_t dt$, где B_t – броуновское движение.
Решение. Из курса известно, что $\int_0^1 tB_t dt \sim N(a, \sigma^2)$ с

$$a = E\int_0^1 tB_t dt = \int_0^1 t\cdot EB_t dt = 0,$$

$$\sigma^2 = E\bigg(\int_0^1 tB_t dt\bigg)^2 = E\iint_{[0,1]^2} stB_s B_t ds dt = \iint_{[0,1]^2} st(s\wedge t) ds dt = \frac{2}{15}.$$

7. *Непрерывность в* L_2. (a) Допустим, что $EX_t = 0$, $EX_s X_t = R(|s-t|)$. Показать, что процесс X_t непрерывен в L_2, если R непрерывно в 0.
(b) Если $R(s,t) = EX_s X_t$ непрерывно по (s,t), то EX_t непрерывно по t. Доказать.
Решение. (a) Имеем $E|X_s - X_t|^2 = 2\big(R(0) - R(|t-s|)\big) \to 0, \ \ s \to t$.
(b) Согласно утверждению с семинара, X_t непрерывен в L_2, когда $R(s,t)$ непрерывно. Поэтому с учетом неравенства Ляпунова

$$|EX_s - EX_t| \leqslant E|X_s - X_t| \leqslant \sqrt{E|X_s - X_t|^2} \to 0, \ \ s \to t.$$

8. *Специальное среднее.* (a) Пусть $\xi_1, \xi_2, ...$ – н.о.р. величины с $E|\xi_1| < \infty$ и $E\xi_1 = 1$, независящие от процесса Пуассона N интенсивности $\lambda > 0$. Найти $E\sum_{i=1}^{N_t} \xi_i$.
(b) Пусть $\xi_1, \xi_2, ...$ – н.о.р. с $E\xi_1^2 < \infty$ и $E\xi_1 = 0$. Пусть также τ таково, что $\tau \in \mathbb{N}$ п.н. и $\{\tau = n\} \in \sigma(\xi_1, ..., \xi_n)$ (момент остановки). Вычислить ES_τ^2 при $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$.
Решение. (a) Имеем

$$E\sum_{i=1}^{N_t} \xi_i = \sum_{n\geqslant 0} E\mathbf{1}(N_t = n)\sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{n\geqslant 1} P(N_t = n) E\sum_{i=1}^n \xi_i = \sum_{n\geqslant 0} nP(N_t = n) = EN_t = \lambda t.$$

(b) Поскольку $S_\tau = \sum_{n\geqslant 1} \xi_n \mathbf{1}(\tau \geqslant n)$, то в силу $\{\tau \geqslant n\} \in \sigma(\xi_1, ..., \xi_{n-1})$

$$ES_\tau^2 = \sum_{n\geqslant 1} E\mathbf{1}(\tau \geqslant n)\xi_n^2 + 2\sum_{n>m\geqslant 1} E\mathbf{1}(\tau \geqslant n)\xi_n \xi_m = \sum_{n\geqslant 1} P(\tau \geqslant n) E\xi_n^2 + 0 = E\tau \cdot E\xi_1^2.$$

9. *Построение винеровского процесса.* На семинаре приводились две формы винеровского процесса на $[0,1]$:

$$B_t = \xi_0 t + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin(\pi n t)}{n}\,\xi_n \text{ и } \quad B_t = \sum_{n\geqslant 1}\xi_n\int_0^t H_n(s)ds,$$

где H_n – функции Хаара, ξ_n – н.о.р. $\mathcal{N}(0,1)$. Эти формы строятся на основе одной и той же идеи. Опишите ее. *Указание*: $t\wedge s = (\mathbf{1}_{[0,s]},\mathbf{1}_{[0,t]}) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,s]}(x)\mathbf{1}_{[0,t]}(x)dx$.
Решение. Пусть $\{\xi_n\}_{n\geqslant 0}$ – н.о.р. с $\xi_n\sim\mathcal{N}(0,1)$, а $\{e_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ – ортонормированный базис в $L_2([0,1])$, состоящий из вещественнозначных функций. Тогда процесс вида $B_t = \sum_{n\geqslant 0}\xi_n(\mathbf{1}_{[0,t]},e_n)$ корректно определен как предел в L_2, является гауссовским (как предел гауссовских) и имеет нулевое среднее. Его ковариационная функция равна

$$EB_sB_t = E\sum_{m,n\geqslant 0}\xi_m\xi_n(\mathbf{1}_{[0,s]},e_m)(\mathbf{1}_{[0,t]},e_n) = \sum_{n\geqslant 0}E\xi_n^2(\mathbf{1}_{[0,s]},e_n)(\mathbf{1}_{[0,t]},e_n) =$$

$$= \sum_{n\geqslant 0}(\mathbf{1}_{[0,s]},e_n)(\mathbf{1}_{[0,t]},e_n) = (\mathbf{1}_{[0,s]},\mathbf{1}_{[0,t]}) = s\wedge t.$$

Последнее равенство – это аналог равенства Парсеваля для скалярных произведений.
10. *Процесс Пуассона.* Дифференцируем ли процесс Пуассона в любой (фиксированной) точке $t\geqslant 0$ в смысле сходимости по вероятности?
Решение. Да и его производная $=0$: если N – процесс Пуассона интенсивности $\lambda>0$, то при $\varepsilon>0$

$$P\left(\left|\frac{N_t-N_s}{t-s}\right|>\varepsilon\right)\leqslant P\big(|N_t-N_s|>0\big) = 1-e^{-\lambda|t-s|} = o(1),\quad s\to t,\ s\neq t.$$

11. *О восстановлении.* Чему равна функция восстановления $m(t)$ для процесса восстановления, построенного по н.о.р. случайным величинам, равномерно распределенным на $[0,1]$?
Решение. Запишем уравнение восстановления:

$$m(t) = t + \int_0^t m(t-x)dx = t + \int_0^t m(x)dx,\quad t\in[0,1]$$

или $m(0)=0,\ m' = 1+m$. Отсюда $m(t)=e^t-1,\ t\in[0,1]$. Далее при $t>1$

$$m(t) = 1+\int_0^1 m(t-x)dx = 1+\int_{t-1}^t m(x)dx,\quad\text{или}\quad m'(t) = m(t)-m(t-1),$$

т.е. при $t\in[1,2]$: $m' = m - e^{t-1}+1$, $m(1)=e-1$ или $m(t)=e^t-1-(t-1)e^{t-1}$ и т.д.
12. Лежит ли множество $B=\{x\in\mathbb{R}^T : x_t\neq 0$ не более, чем на счетном числе $t\in T\}$ в цилиндрической σ-алгебре для $T=[0,1]$?
Решение. Нет, не лежит. Действительно, иначе принадлежность x к B определялась бы значениями x_t на некотором фиксированном счетном множестве S. Однако всегда x можно подкорректировать на несчетном множестве $T\setminus S$, чтобы $x\notin B$.

13. *Общее вероятностное пространство.* Задайте винеровский процесс $\{B_t, t \in [0,1]\}$, и пуассоновский процесс $\{N_t, t \geqslant 0\}$, на одном вероятностном пространстве так, чтобы траектории B однозначно определяли траекторию N и наоборот.
Решение. Возьмем вероятностное пространство $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), Leb)$, где Leb – мера Лебега. Зададим процесс Пуассона N, как процесс восстановления, построенный по н.о.р. величинам $\eta_1, \eta_2, ...$, имеющим экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$. Заметим, что η_i – это длины промежутков между последовательными скачками N, т.е. η_i однозначно восстанавливаются по N. При этом N тоже однозначно определяется по η_i.

Зададим винеровский процесс B формулой с sin из задачи 9. Тогда $\xi_0 = B_1$, а $\xi_n, n \geqslant 1$ – это коэффициенты Фурье (с точностью до множителей, зависящих от n) непрерывной функции $B_t - tB_0$ по ортогональной системе $\{\sin(\pi n t), n \geqslant 1\}$. Другими словами, $\xi_1, \xi_2, ...$ однозначно определяются по B (верно и обратное).

Теперь, чтобы условие задачи было выполнено, надо привести в биективное соответствие $\xi_1, \xi_2, ...$ и $\eta_1, \eta_2, ...$ Положим $\xi_i = \Phi^{-1}(u_i)$, $\eta_i = F^{-1}(u_i)$, где $u_1, u_2, ...$ – независимые равномерно распределенные на $[0,1]$, а Φ и F – функции распределения законов $\mathcal{N}(0,1)$ и $Exp(\lambda)$ соответственно.
14*. *Независимые приращения.* Пусть $\xi_1, \xi_2, ...$ – н.о.р. величины, независящие от процесса Пуассона N (некоторой интенсивности λ). Показать, что процесс $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i$ имеет независимые приращения.

Указание: воспользоваться тем, что $(N_{t+s} - N_s, t \geqslant 0 | N_r, r \leqslant s) \stackrel{d}{=} (N_t, t \geqslant 0)$, и $\{N_{t+s} - N_s, t \geqslant 0\}$ не зависит от $\{N_r, r \leqslant s\}$.
Решение. Имеем

$$S_{t+s} - S_s = \sum_{i=1+N_s}^{N_{t+s}-N_s+N_s} \xi_i.$$

В силу н.о.р. ξ_i, свойства N из указания и независимости N с $\xi_1, \xi_2, ...$, условно на $\mathcal{F}_s = \sigma(\{N_r, r \leqslant s\}, \{\xi_i, i \leqslant N_s\})$ (т.е. при фиксированных значениях всех входящих в $\mathcal{F}_s$ величин) приращение $S_{t+s} - S_s$ распределено так же, как

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} \xi_i.$$

Другими словами, условное распределение никак не зависит от $\mathcal{F}_s$, а значит, и от предыстории $\{S_r, r \leqslant s\}$. Отсюда следует независимость приращений.