## Решение стохастических дифференциальных уравнений

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t, \quad t \in [0, T]. \tag{1}$$

Как и ранее, предполагается, что имеется некоторое вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ с фильтрацией $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ и винеровский процесс $W_t, t \geq 0$, согласованный с фильтрацией и такой, что $W_t - W_s$ не зависит от $\mathcal{F}_s$ при $t > s$. Заданы борелевские функции $a(t, x)$ и $b(t, x)$ двух переменных.

Поскольку стохастический дифференциал самостоятельного смысла не имеет, необходимо объяснить, что понимается под записью (1) и что такое решение стохастического дифференциального уравнения с начальным условием $X_0 = \tilde{X}_0(\omega)$, где $\tilde{X}_0$ измерима относительно $\mathcal{F}_0$.

Итак, мы хотим, чтобы выполнялись следующие требования:

1) Процесс $X_t(\omega)$ прогрессивно измерим.

2) $$\mathsf{P}\left(\int_0^T |a(t, X_t)|\, dt < \infty\right) = 1, \quad \mathsf{P}\left(\int_0^T b^2(t, X_t)\, dt < \infty\right) = 1.$$

3) С вероятностью 1 для всех $t \in [0, T]$

$$X_t = \tilde{X}_0 + \int_0^t a(s, X_s)\, ds + \int_0^t b(s, X_s)\, dW_s. \tag{2}$$

Для дальнейшего понадобится следующая

**Задача.** Доказать, что для эквивалентных случайных процессов $f_1(s, \omega)$ , $f_2(s, \omega)$ с вероятностью 1 совпадают стохастические интегралы $\int_0^t f_i(s, \omega)\, dW_s$, $i = 1, 2$.

Отсюда вытекает, что всякий процесс эквивалентный решению уравнения (2) сам будет решением этого уравнения. А так как правая часть (2) эквивалентна левой и непрерывна с вероятностью 1, то для всякого решения стохастического дифференциального уравнения существует эквивалентное ему непрерывное. Поэтому далее мы будем рассматривать только непрерывные решения (2).

**Теорема 1** (Теорема существования и единственности.) *Пусть $a(t, x)$ и $b(t, x)$ – борелевские функции на $[0, T] \times \mathbb{R}^1$, удовлетворяющие при некотором $K > 0$ и всех $t \in [0, T]$ следующим условиям:*

1)*(Условие Липшица.) Для любых $x, y \in \mathbb{R}^1$*

$$|a(t, x) - a(t, y)| + |b(t, x) - b(t, y)| \leq K|x - y|.$$

2) *Для любого $x \in \mathbb{R}^1$*

$$a^2(t, x) + b^2(t, x) \leq K^2(1 + x^2).$$

*Тогда существует решение уравнения (2) и если $X_t$ и $Y_t$ – два непрерывных решения, соответствующие одному и тому же начальному условию $\tilde{X}_0$, то*

$$\mathsf{P}(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t - Y_t| = 0) = 1.$$

*Доказательство.* Дополнительно предположим, что $\mathsf{E}\tilde{X}_0 < \infty$ и установим, что тогда $\sup_{t\in[0,T]} \mathsf{E}X_t^2 < \infty$. Общий случай получается переходом к пределу от урезанных случайных величин.

Доказательство существования проводится методом последовательных приближений. Нулевое приближение $X_t^{(0)} \equiv \tilde{X}_0$, а далее

$$X_t^{(n)} = \tilde{X}_0 + \int_0^t a(s, X_s^{(n-1)})\, ds + \int_0^t b(s, X_s^{(n-1)})\, dW_s.$$

Пусть $0 \le t \le T$, оценим

$$\mathsf{E}|X_t^{(1)} - X_t^{(0)}|^2 = \mathsf{E}\left[\int_0^t a(s, X_s^{(0)})\, ds + \int_0^t b(s, X_s^{(0)})\, dW_s\right]^2 \le$$

Воспользуемся тем, что $(u+v)^2 \le 2u^2 + 2v^2$, затем при оценке первого слагаемого применим неравенство Коши-Буняковского, для второго – свойства интеграла Ито, а также используем условие 2) теоремы.

$$\le 2\mathsf{E}\left(\int_0^t a(s, X_s^{(0)})\, ds\right)^2 + 2\mathsf{E}\left(\int_0^t b(s, X_s^{(0)})\, dW_s\right)^2 \le$$

$$\le 2t\mathsf{E}\int_0^t a^2(s, X_s^{(0)})\, ds + 2\mathsf{E}\int_0^t b^2(s, X_s^{(0)})\, ds \le 2(T+1)TK^2(1 + \mathsf{E}\tilde{X}_0^2) = C.$$

Аналогично оценим

$$\mathsf{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 = \mathsf{E}\left(\int_0^t [a(s, X_s^{(n)}) - a(s, X_s^{(n-1)})]\, ds + \int_0^t [b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})]\, dW_s\right)^2 \le$$

$$\le 2\mathsf{E}\left(\int_0^t [a(s, X_s^{(n)}) - a(s, X_s^{(n-1)})]\, ds\right)^2 + 2\mathsf{E}\left(\int_0^t [b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})]\, dW_s\right)^2$$

Снова пользуемся неравенством Коши-Буняковского, свойствами интеграла Ито и условием 1) теоремы, что дает оценку сверху

$$2t\mathsf{E}\int_0^t [a(s, X_s^{(n)}) - a(s, X_s^{(n-1)})]^2\, ds + 2\mathsf{E}\int_0^t [b(s, X_s^{(n)}) - b(s, X_s^{(n-1)})]^2\, ds \le$$

$$\le 2tK^2\int_0^t \mathsf{E}|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2\, ds + 2K^2\int_0^t \mathsf{E}|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2\, ds \le L\int_0^t \mathsf{E}|X_s^{(n)} - X_s^{(n-1)}|^2\, ds,$$

где $L = 2(T+1)K^2$.

Отсюда вытекает, что

$$\mathsf{E}|X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|^2 \le C\frac{(Lt)^n}{n!}. \tag{3}$$

Мы хотим доказать, что рассматриваемая последовательность сходится равномерно на отрезке $[0,T]$ с вероятностью 1. Для этого оценим

$$\mathsf{P}(\sup_{0\le t\le T} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}| > n^{-2}) \le n^4\mathsf{E}(\sup_{0\le t\le T} |X_t^{(n+1)} - X_t^{(n)}|)^2.$$

Если ряд из этих вероятностей сходится, то воспользовавшись леммой Бореля-Кантелли, мы получим сходимость с вероятностью 1 к непрерывному процессу $X_t$.

Поскольку $\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|$ не превосходит

$$\sup_{0\le t\le T}\int_0^t |a(s,X_s^{(n)})-a(s,X_s^{(n-1)})|\,ds+\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t (b(s,X_s^{(n)})-b(s,X_s^{(n-1)}))\,dW_s|,$$

снова оцениваем

$$\mathsf{E}(\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|)^2\le 2\mathsf{E}(\sup_{0\le t\le T}\int_0^t |a(s,X_s^{(n)})-a(s,X_s^{(n-1)})|\,ds)^2+$$

$$+2\mathsf{E}(\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t (b(s,X_s^{(n)})-b(s,X_s^{(n-1)}))\,dW_s|)^2$$

При оценке первого интеграла используется, как и раньше, неравенство Коши-Буняковского и условие Липшица для функций $a$ и $b$. Для второго интеграла воспользуемся тем, что $Z_t=\int_0^t f(s,\omega)\,dW_s$ является мартингалом, если $\int_0^t \mathsf{E}f^2(t,\omega)\,dt<\infty$. Следовательно, можно применить неравенство

$$\mathsf{E}(\sup_{0\le t\le T}|Z_t|)^p\le\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sup_{0\le t\le T}\mathsf{E}|Z_t|^p.$$

При $p=2$ получаем

$$\mathsf{E}(\sup_{0\le t\le T}|\int_0^t f(s,\omega)\,dW_s|)^2\le 4\mathsf{E}\int_0^T f^2(t,\omega)\,dt.$$

С помощью оценки (3) имеем

$$\mathsf{E}(\sup_{0\le t\le T}|X_t^{(n+1)}-X_t^{(n)}|)^2\le C_1\frac{(LT)^n}{n!},\quad C_1=C(2T+8)K^2.$$

Так как

$$\sum_n C_1\frac{(LT)^n}{n!}n^4<\infty,$$

то с вероятностью 1 существует $X_t=\lim_{n\to\infty}X_t^{(n)}$ в смысле равномерной сходимости. Заметим, что имеет место равномерная на каждом конечном интервале сходимость и в среднем квадратичном. Реализации $X_t$ непрерывны с вероятностью 1, это прогрессивно измеримая функция.

Убедимся, что это действительно решение уравнения (2).

Вспомним, что

$$X_t^{(n)}=\tilde{X}_0+\int_0^t a(s,X_s^{(n-1)})\,ds+\int_0^t b(s,X_s^{(n-1)})\,dW_s.$$

Левая часть сходится к $X_t$, а правая к соответствующим интегралам с $X_t$ вместо $X_t^{(n-1)}$ (сходимость в среднем квадратичном).

Докажем также, что $\sup_{0\le t\le T}\mathsf{E}X_t^2<\infty$. Воспользуемся неравенством $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$, тогда

$$\mathsf{E}(X_t^{(n)})^2\le 3[\mathsf{E}\tilde{X}_0^2+\mathsf{E}\left(\int_0^t a(s,X_s^{(n-1)})\,ds\right)^2+\mathsf{E}\left(\int_0^t b(s,X_s^{(n-1)})\,dW_s\right)^2]\le$$

$$\le 3\mathsf{E}\tilde{X}_0^2+3(t+1)K^2\int_0^t(1+\mathsf{E}(X_s^{(n-1)})^2)\,ds\le\tilde{C}+C'\int_0^t\mathsf{E}(X_s^{(n-1)})^2\,ds.$$

Отсюда вытекает

$$\mathsf{E}(X_t^{(1)})^2\le\tilde{C}+C't\mathsf{E}\tilde{X}_0^2,\quad \mathsf{E}(X_t^{(2)})^2\le\tilde{C}+C'\int_0^t\mathsf{E}(X_s^{(1)})^2\,ds\le\tilde{C}(1+C't+\frac{(C't)^2}{2}.$$

Окончательно имеем $\mathsf{E}(X_t^{(n)})^2\le\tilde{C}e^{C'T}$.

Доказательство единственности опирается на следующую лемму.

**Лемма 1** *Если $\gamma\ge 0$, $\alpha(t)\ge 0$, $\beta(t)\ge 0$, то из неравенства*

$$\alpha(t)\le\gamma+\int_0^t\beta(s)\alpha(s)\,ds$$

*следует*

$$\alpha(t)\le\gamma\exp\left\{\int_0^t\beta(s)\,ds\right\}.$$

*Доказательство леммы.* При $\gamma>0$ преобразуем исходное неравенство к виду

$$\frac{\alpha(t)\beta(t)}{\gamma+\int_0^t\beta(s)\alpha(s)\,ds}\le\beta(t)$$

и проинтегрируем обе части. Получим

$$\ln[\gamma+\int_0^t\beta(s)\alpha(s)\,ds]-\ln\gamma\le\int_0^t\beta(s)\,ds.$$

Отсюда

$$\gamma+\int_0^t\beta(s)\alpha(s)\,ds\le\gamma\exp\left\{\int_0^t\beta(s)\,ds\right\},$$

что и дает требуемый результат.

Продолжим доказательство теоремы.

Пусть существуют два непрерывных решения $X_t$ и $Y_t$:

$$X_t=\tilde{X}_0+\int_0^t a(s,X_s)\,ds+\int_0^t b(s,X_s)\,dW_s.$$

$$Y_t=\tilde{X}_0+\int_0^t a(s,Y_s)\,ds+\int_0^t b(s,Y_s)\,dW_s.$$

Тогда, действуя так же, как при доказательстве существования решения, мы получим

$$\mathsf{E}|X_t - Y_t|^2 \leq L \int_0^t \mathsf{E}|X_s - Y_s|^2 \, ds.$$

Применим лемму, положив $\gamma = 0$, $\alpha(t) = \mathsf{E}|X_t - Y_t|^2$, $\beta(t) \equiv 1$. Тогда $\mathsf{E}|X_t - Y_t|^2 = 0$, а следовательно, $\mathsf{P}(X_t = Y_t) = 1$ для любого $t \in [0, T]$. Значит, для любого счетного подмножества $\{t_k\} \subset [0, T]$ имеет место соотношение

$$\mathsf{P}(\sup_{t_k} |X_{t_k} - Y_{t_k}| = 0) = 1.$$

В силу непрерывности процессов, если взято счетное всюду плотное подмножество $\{t_k\} \subset [0, T]$, то

$$\mathsf{P}(\sup_{t \in [0,T]} |X_t - Y_t| = 0) = \mathsf{P}(\sup_{t_k} |X_{t_k} - Y_{t_k}| = 0) = 1,$$

что и требовалось доказать.

**Замечание**. Решение стохастического дифференциального уравнения, которое мы рассмотрели, называется сильным. Можно доказать, что $(X_t, \mathcal{F}_t)$ является марковским процессом. При немного более жестких условиях на коэффициенты $a(t, x)$ и $b(t, x)$ устанавливается, что процесс диффузионный.