Строго марковское свойство свойство винеровского процесса и принцип отражения

Свойству независимости приращений винеровского процесса $\{W_t, t \geq 0\}$ можно придать форму более удобную для теоретических приложений. Введем σ-алгебру $\mathcal{F}_t = \sigma(S_s, s \leq t)$. Очевидно, что эти сигма-алгебры образуют поток (фильтрацию), т.е. $\mathcal{F}_{t_1} \subset \mathcal{F}_{t_2}$ при $t_1 \leq t_2$. Очевидно, что $\mathcal{F}_t \to \mathcal{F}_\infty$ при $t \to \infty$. Предельная сигма-алгебра содержит всю информацию о процессе W, т.е. изучая только этот процесс, можно выбирать в качестве основного вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathsf{P})$. Однако это не всегда удобно, так как часто необходима еще какая-то информация, не связанная с винеровским процессом.

Теорема 1 (Марковское свойство винеровского процесса.) *При любом фиксированном $T > 0$ процесс $Y_t = W_{T+t} - W_T$, $t \geq 0$, винеровский и не зависит от сигма-алгебры $\mathcal{F}_T$.*

Доказательство немедленно следует из независимости приращений и использует тот факт, что при $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots \leq T$ верно

$$\sigma(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_k}) = \sigma(W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \ldots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}).$$

Кроме того, надо заметить, что для проверки независимости $\mathcal{F}_T$ и $\sigma(Y)$ достаточно установить, что независимы $\sigma(W_{t_1}, W_{t_2}, \ldots, W_{t_k})$ и $\sigma(Y_{u_1}, Y_{u_2}, \ldots, Y_{t_m})$ при любых $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots \leq T$ и $0 \leq u_1 < u_2 < \ldots < u_m$.

Указанное свойство сохраняется при замене T на случайную величину, но не любую, а принадлежащую определеному классу, что будет доказано в теореме 2.

Определение 1 *Случайная величина $\tau(\omega)$ называется марковским моментом относительно фильтрации $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, если для любого $t > 0$ верно $\{\tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Если кроме того $\mathsf{P}(\tau < \infty) = 1$, то говорят, что τ – это момент остановки.*

Задача. Являются ли марковскими моментами $\tau_1 = const$, $\tau_2 = \min\{t : W_t = a\}$, $a > 0$, $\tau_3 = \max\{0 \leq t \leq 1 : W_t = 0\}$.

Определение 2 *σ-алгебра $\mathcal{F}_\tau$ состоит из событий $A \in \mathcal{F}_\infty$ таких, что*

$$A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Доказать, что в самом деле $\mathcal{F}_\tau$ – σ-алгебра.

Теорема 2 (Строго марковское свойство.) *Пусть $\tau(\omega)$ – момент остановки. Тогда процесс $Z_t(\omega) = W_{\tau(\omega)+t} - W_{\tau(\omega)}$ – винеровский процесс, не зависящий от $\mathcal{F}_\tau$.*

Доказательство. Введем случайные величины $\tau_n(\omega) = k2^{-1}$, если $\tau(\omega) \in [(k-1)2^{-n}, k2^{-n})$. Очевидно, что $\tau_n(\omega)$ – марковские моменты и $\tau_n(\omega) \searrow \tau(\omega)$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим некоторое событие $B \in \mathcal{F}_\tau$ и докажем, что оно не зависит от $Z_{t_1}, \dots, Z_{t_m}$. Достаточно проверить, что

$$\mathsf{E} I_B f(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_M}) = \mathsf{P}(B) \mathsf{E} f(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_M})$$

для достаточно широкого класса функций, например, $f \in C_{\mathbb{R}^m}$ и ограниченных $||f|| = \sup |f| < \infty$.

Положим

$$\zeta = f(W_{\tau+t_1} - W_\tau, \dots, W_{\tau+t_m} - W_\tau) \quad \text{и} \quad \zeta_n = f(W_{\tau_n+t_1} - W_{\tau_n}, \dots, W_{\tau_n+t_m} - W_{\tau_n}).$$

Из непрерывности f и W_t следует, что $\zeta_n \to \zeta$ при $n \to \infty$ п.н. Так как $|\zeta_n| \le ||f||$, то $\mathsf{E} I_B \zeta = \lim_{n\to\infty} \mathsf{E} I_B \zeta_n$. Далее,

$$\mathsf{E} I_B \zeta_n = \mathsf{E} \sum_{k=1}^{\infty} I_B I_{\{\tau_n = k2^{-n}\}} \zeta_n == \mathsf{E} \sum_{k=1}^{\infty} I_{B \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} f(W_{k2^{-n}+t_1} - W_{k2^{-n}}, \dots, W_{k2^{-n}+t_m} - W_{k2^{-n}}).$$

Событие $B \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}$ принадлежит $\mathcal{F}_{k2^{-n}}$, поэтому по обычному марковскому свойству винеровского процесса

$$\mathsf{E} I_{B \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} f(W_{k2^{-n}+t_1} - W_{k2^{-n}}, \dots, W_{k2^{-n}+t_m} - W_{k2^{-n}}) =$$
$$= \mathsf{E} I_{B \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} \mathsf{E} f(W_{k2^{-n}+t_1} - W_{k2^{-n}}, \dots, W_{k2^{-n}+t_m} - W_{k2^{-n}}) =$$
$$= \mathsf{E} I_{B \cap \{\tau_n = k2^{-n}\}} \mathsf{E} f(\widetilde{W}_{t_1}, \dots, \widetilde{W}_{t_m}),$$

где $\widetilde{W}_t = W_{k2^{-n}+t} - W_{k2^{-n}}$ – некоторый винеровский процесс. Окончательно,

$$\mathsf{E} I_B \zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(B \cap \{\tau_n = k2^{-n}) \mathsf{E} f(W_{t_1}, \dots, W_{t_m}) = \mathsf{P}(B) \mathsf{E} f(W_{t_1}, \dots, W_{t_m}),$$

т.е. доказано нужное свойство. Отсюда немедленно вытекает, что Z_t не зависит от $\mathcal{F}_\tau$ и что он является винеровским (для проверки последнего достаточно положить $B = \Omega$.

Применим строго марковское свойство для вывода принципа отражения.

Теорема 3 *Для любого фиксированного* $t > 0$ *справедливо равенство*

$$\mathsf{P}(\max_{0 \le s \le t} W_s > a) = 2\mathsf{P}(W_t > a), \quad a > 0.$$

Доказательство. Пусть τ_a – момент первого достижения уровня $a > 0$ процессом W. Рассмотрим

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \mathsf{P}(W_t > a)\, dt = \mathsf{E} \int_0^\infty e^{-\lambda t} I_{(a,\infty)}(W_t)\, dt.$$

Правую часть можно переписать в виде

$$\mathsf{E} \int_{\tau_a}^\infty e^{-\lambda t} I_{(a,\infty)}(W_t)\, dt = \mathsf{E} \int_0^\infty e^{-\lambda(\tau_a + s)} I_{(a,\infty)}(W_{\tau_a+s})\, ds.$$

В свою очередь, это запишется

$$\mathsf{E}e^{-\lambda\tau_a}\int_0^\infty e^{-\lambda s}I_{(a,\infty)}(W_{\tau_a+s}-W_{\tau_a}+W_{\tau_a})\,ds.$$

Используя строго марковское свойство и тот факт, что $W_{\tau_a}=a$ (проверить в качестве упражнения), получим

$$\mathsf{E}e^{-\lambda\tau_a}\int_0^\infty e^{-\lambda s}I_{(a,\infty)}(\widetilde{W}_s+a)\,ds=\mathsf{E}e^{-\lambda\tau_a}\int_0^\infty e^{-\lambda s}I_{(0,\infty)}(\widetilde{W}_s)\,ds.$$

Правую часть представим в виде

$$\mathsf{E}e^{-\lambda\tau_a}\,\mathsf{E}\int_0^\infty e^{-\lambda s}I_{(0,\infty)}(\widetilde{W}_s)\,ds=\mathsf{E}e^{-\lambda\tau_a}\int_0^\infty e^{-\lambda s}(1/2)\,ds=\frac{1}{2\lambda}\mathsf{E}e^{-\lambda\tau_a}.$$

Итак, имеем

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathsf{P}(W_t>a)\,dt=\frac{1}{2\lambda}\mathsf{E}e^{-\lambda\tau_a}=\int_0^\infty\frac{e^{-\lambda t}}{2\lambda}\,d\mathsf{P}(\tau_a<t)=\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathsf{P}(\tau_a<t)\,dt.$$

По теореме единственности для преобразований Лапласа имеем

$$\mathsf{P}(W_t>a)=\frac{1}{2}\mathsf{P}(\tau_a<t),$$

что эквивалентно принципу отражения.

Попутно найдено распределение Вальда

$$\mathsf{P}(\tau_a<t)=\frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_a^\infty e^{-x^2/2t}\,dx=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{a/\sqrt{t}}^\infty e^{-y^2/2}\,dy.$$

Дифференцируя по t, найдем плотность

$$p_{\tau_a}(t)=\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-a^2/2t}}{t^{3/2}}.$$

Интересно отметить, что при $t\to\infty$ получаем $p_{\tau_a}(t)\sim ct^{-3/2}$, следовательно, $\mathsf{E}\tau_a=\infty$, хотя, как следует из закона повторного логарифма $\mathsf{P}(\tau_a<\infty)=1$.