Типовые задачи к зачету по теории случайных процессов, весна 2009 (составил доц. А.П.Шашкин)

1. Найти двумерные распределения процесса $X_t = e^{\xi t}$, $t \geq 0$, здесь ξ равномерно распределена на $[0, 1]$.

2. Пусть $N = \{N_t, t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$. Доказать, что $\lim_{t\to\infty} N_t/t = \lambda$ п.н.

3. Пусть $N = \{N_t, t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$, а случайная величина η не зависит от N и принимает значения ± 1 с равными вероятностями. Является ли процесс X, где $X_t = \eta(-1)^{N_t}$, стационарным, и в каком смысле?

4. Пусть имеется пуассоновское точечное поле в $\mathbb{R}^2$, известна его интенсивность $\lambda > 0$. Найти плотность расстояния от начала координат до второй по дальности от него точки этого поля.

5. Пусть $N = \{N_t, t \geq 0\}$ — пуассоновский процесс интенсивности $\lambda > 0$, а случайные величины X и Y не зависят от него и друг от друга и равномерно распределены на $[0, 1]$. Найти вероятность того, что на интервале (X, Y) не окажется точек процесса N.

6. Найти математическое ожидание числа точек пуассоновского процесса интенсивности $\lambda > 0$, лежащих на отрезке $[1, 2]$ и таких, что в их $\delta-$левой полуокрестности нет других его точек, здесь $\delta \in (0, 1)$.

7. Пусть имеется пуассоновское точечное поле в $\mathbb{R}^2$, известна его интенсивность $\lambda > 0$, а функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ финитная и гладкая. Найти $\mathsf{E}\sum f(x_i)$ ($x_i, i \in \mathbb{N}$ — все точки поля).

8. Найти ковариационную функцию процесса Крамера-Лундберга.

9. Пусть случайные величины $\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$ независимы и имеют плотность p, а Y_t есть значение их эмпирической функции распределения (построенной по n наблюдениям) в точке $t \in \mathbb{R}$. Найти ковариационную функцию процесса $Y = \{Y_t, t \in \mathbb{R}\}$. Является ли он непрерывным и в каком смысле?

10. Пусть $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — фильтрация, а τ и σ — два марковских момента относительно нее. Доказать, что $\tau + \sigma$ есть марковский момент.

11. Пусть $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ — простое несимметричное случайное блуждание (вероятность скачка вверх равна p), $S_0 = 0$. Найти все такие функции $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, что $\varphi(S_n)$ есть мартингал.

12. Пусть $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ — ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, а $q = f(q)$, где f — производящая функция числа потомков частицы. Доказать, что q^{X_n} есть мартингал.

13. Пусть $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ — неотрицательный субмартингал. Доказать неравенство $\mathsf{P}(\max_{k=1,\dots,n} X_k > a) \leq a^{-1}\mathsf{E}X_n$, здесь $a > 0$.

14. Пусть $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ — мартингал относительно фильтрации $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, а τ марковский момент относительно нее. Доказать, что процесс $Y = \{Y_n, n \in \mathbb{N}\}$, где $Y_n = X_{n\wedge\tau}$, является мартингалом относительно фильтрации $\{\mathcal{F}_{n\wedge\tau}\}$.

15. Пусть $X = (X_n, n \in \mathbb{N})$ — ветвящийся процесс Гальтона-Ватсона, а m — математическое ожидание числа потомков частицы. Доказать, что $m^{-n}X_n$ есть мартингал.

16. Пусть $(S, \mathcal{B})$ — измеримое пространство и M — ортогональная случайная мера на нем со структурной мерой μ, а функция $f \in L^2(S, \mathcal{B}, \mu)$. Доказать, что случайная функция множества N, определенная соотношением $N(A) = \int_S f(x)M(dx)$, является ортогональной случайной мерой, и найти ее структурную меру.

17. Пусть $(\xi_n, n \in \mathbb{Z})$ — независимые случайные величины со средним 0 и дисперсией 1. Стационарный процесс X — решение уравнения $X_n = X_{n-2}/4+\xi_n$. Найти $cov(X_0, X_3)$.

18. Найти $cov(Y_0, Y_1)$, если стационарный случайный процесс Y удовлетворяет равенству $dY_t/dt = X_t$, а спектральная плотность X равна $f(\lambda) = \lambda^2 I(|\lambda| < 1)$.

19. Случайный процесс $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ стационарен и имеет спектральную плотность $f(\lambda) = e^{-|\lambda|}$. Найти дисперсию стационарного процесса Y, который является решением дифференциального уравнения в среднем квадратическом $dY_t/dt + Y_t = X_t$.

20. Случайный процесс $X = \{X_t, t \in \mathbb{R}\}$ стационарен и имеет спектральную плотность $f(\lambda) = e^{-|\lambda|}$. Найти спектральную плотность случайного процесса Y, где $Y_t = \int_t^{t+1} X_t dt$.

21. Последовательность гауссовских случайных векторов сходится по распределению. Доказать, что предельное распределение также гауссовское.

22. Пусть S_n — простое симметричное случайное блуждание. Является ли марковским случайный процесс $X_n = sgn(S_n)$?

23. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс и $\tau = \inf\{t > 0 : |W_t| = 1\}$. Найти $\mathsf{E}\tau e^{-\lambda\tau}$, здесь $\lambda > 0$.

24. Пусть $f \in L^2[0, T]$. Найти такую функцию $h : [0, T] \to \mathbb{R}$, что процесс $X_t = \exp\{\int_0^t f(s)dW_s - \int_0^t h(s)ds\}$ — мартингал.

25. Двумерный винеровский процесс $W = \{W_t, t \geq 0\}$ выходит из начала координат. Доказать, что $X_t = \|W_t\|^2 - 2t$ есть мартингал, и найти математическое ожидание времени выхода $W = \{W_t, t \geq 0\}$ из единичного шара.

26. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс и $\tau = \inf\{t > 0 : W_t \in \{1, -2\}\}$. Найти $\mathsf{E}e^{-\lambda\tau}$, здесь $\lambda > 0$.

27. Пусть $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — фильтрация, а Q — вероятностная мера на вероятностном пространстве, причем Q абсолютно непрерывна относительно исходной меры P. Случайная величина X_n — это плотность меры Q по мере P на сигма-алгебре $\mathcal{F}_n$. Доказать, что $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ есть мартингал.

28. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Рассматривая дифференциал процесса $Y_t = e^{-at}X_t$, решить стохастическое дифференциальное уравнение $dX_t = \mu X_t dt + \sigma W_t$.

29. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Найти $\mathsf{D} \int_0^t (W_t)^+ dW_t$.

30. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — d-мерный винеровский процесс, а $v : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. Доказать, что процесс $X_t = v(W_t) - (1/2) \int_0^t \Delta v(W_t) dt$ есть мартингал.

31. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — d-мерный винеровский процесс, а $w : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ и $c : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — гладкие функции, причем $\Delta w + 2cw = 0$. Доказать, что процесс $X_t = w(W_t) \exp\{\int_0^t c(W_s) ds\}$ есть мартингал.

32. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс, а $\tau = \inf\{t > 0 : W_t = -1\}$. Найти распределение случайной величины $\sup_{t \leq \tau} W_t$.

33. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Найти $\mathsf{D} \sup_{t \in [1,2]} W_t$.

34. Пусть $W = \{W_t, t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Найти предел в среднем квадратическом $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n W_{(i-1)/n+1/(2n)}(W_{i/n} - W_{(i-1)/n})$.