Вопросы к экзамену по курсу “Теория случайных процессов”

(3 курс, экономический поток)
лектор — к.ф.-м.н. Д. А. Шабанов

Осень — 2012

1. Общее понятие случайного процесса (случайной функции), траектории случайного процесса. Примеры случайных процессов: случайное блуждание, процессы восстановления, модель страхования Крамера – Лундберга. Лемма о конечности п.н. процесса восстановления.

2. Простейшее случайное блуждание на прямой. Использование чисел Каталана для подсчета числа “неотрицательных” и “положительных” траекторий случайного блуждания, приходящих в нуль за время $2n$. Теорема о распределении первого момента возвращения в нуль для простейшего случайного блуждания. Теорема о вероятности возвращения в нуль.

3. Производящие функции случайных величин, их основные свойства. Ветвящиеся процессы Гальтона – Ватсона. Соотношение между производящими функциями числа частиц в n-м и $(n+1)$-м поколениях. Вывод уравнения для вероятности вырождения процесса.

4. Ветвящиеся процессы Гальтона - Ватсона. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса.

5. Пространство траекторий случайного процесса, цилиндрическая сигма-алгебра на нем. Эквивалентное определение случайного процесса, как одного измеримого отображения в пространство траекторий. Конечномерные распределения случайного процесса. Доказательство того, что конечномерные распределения однозначно определяют распределение всего процесса в целом.

6. Конечномерные распределения случайного процесса. Лемма об условиях симметрии и согласованности. Теорема Колмогорова о существовании случайного процесса (б/д). Условия согласованности вероятностных мер на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ в терминах характеристических функций (б/д). Следствие для процессов, индексированных множеством $T \subset \mathbb{R}$.

7. Процессы с независимыми приращениями. Критерий существования процесса с независимыми приращениями в терминах характеристических функций приращений.

8. Пуассоновский процесс как процесс с независимыми приращениями, доказательство существования. Явная конструкция стандартного пуассоновского процесса: процесс восстановления для экспоненциальных случайных величин. Следствие из явной конструкции: свойства траекторий стандартного пуассоновского процесса.

9. Гауссовские случайные векторы (многомерное нормальное распределение). Теорема о трех эквивалентных определениях. Смысл параметров гауссовского вектора. Основные свойства гауссовских векторов: линейные преобразования и критерий независимости компонент.

10. Ковариационная и корреляционная функции случайного процесса, их симметричность и неотрицательная определенность. Гауссовские случайные процессы. Доказательство существования гауссовского процесса с заданными функцией среднего и ковариационной функцией.

11. Винеровский процесс (процесс броуновского движения). Доказательство существования. Теорема о двух эквивалентных определениях винеровского процесса.

12. Модификация случайного процесса. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации (б/д). Доказательство существования непрерывной модификации у винеровского процесса.

13. Закон повторного логарифма для винеровского процесса (б/д). Смысл закона повторного логарифма. Локальный закон повторного логарифма для винеровского процесса.

14. Понятие фильтрации на вероятностном пространстве, согласованность случайного процесса с фильтрацией, естественная фильтрация случайного процесса. Марковские моменты и моменты остановки. Строго марковское свойство винеровского процесса.

15. Принцип отражения для винеровского процесса (б/д). Момент достижения винеровским процессом уровня x. Доказательство того, что он является моментом остановки. Совместное распределение максимума винеровского процесса на отрезке $[0, t]$ и его правого конца. Теорема Башелье.

16. Условное математическое ожидание случайной величины относительно σ-алгебры. Понятие заряда на вероятностном пространстве. Теорема Радона–Никодима (б/д) и обоснование существования условного математического ожидания. Явный вид условного математического ожидания в случае, если σ-алгебра порождена счетным разбиением.

17. Свойства условного математического ожидания.

18. Понятие условного математического ожидания вида $\mathsf{E}(\xi|\eta = y)$, обоснование его существования. Связь $\mathsf{E}(\xi|\eta = y)$ с $\mathsf{E}(\xi|\eta)$. Лемма о вычислении $\mathsf{E}(f(\xi, \eta)|\eta)$ для независимых случайных величин ξ и η, примеры ее применения.

19. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями. Примеры мартингалов и субмартингалов. Разложение Дуба для согласованных процессов с дискретным временем.

20. Мартингалы. Теорема об остановке и следствие из нее. Опциональные моменты. Аналог теоремы об остановке для случая непрерывного времени (б/д).

21. Мартингалы. Мартингальный подход к задаче о разорении игрока.

22. Общее понятие марковского процесса относительно фильтрации. Теорема об эквивалентных определениях марковского процесса. Теорема о марковости процессов с независимыми приращениями.

23. Критерий марковости для гауссовских процессов.

24. Марковские цепи с непрерывным временем. Фазовое пространство, матрицы переходных вероятностей и начальное распределение для марковской цепи. Свойства переходных вероятностей. Теорема о существовании марковской цепи с заданными начальным распределением и переходными вероятностями.

25. Однородные марковские цепи с непрерывным временем. Стохастическая полугруппа матриц переходных вероятностей. Стационарное и предельное распределения марковской цепи. Эргодическая теорема. Три следствия из эргодической теоремы: свойства эргодического распределения.

26. Инфинитезимальная матрица марковской цепи с непрерывным временем. Существование инфинитезимальной матрицы для стандартной марковской цепи (б/д). Обратные дифференциальные уравнения Колмогорова.

27. Прямые дифференциальные уравнения Колмогорова для марковской цепи с непрерывным временем. Следствия из них: уравнения для нахождения распределения цепи в произвольный момент времени t и для нахождения эргодического распределения.

28. Пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ случайных величин, его основные свойства. Лемма о непрерывности скалярного произведения. Стохастическая непрерывность и непрерывность в среднем квадратичном случайного процесса. Критерий непрерывности в среднем квадратичном для L^2-процесса.

29. Дифференцирование случайных процессов по вероятности и в среднем квадратичном. Критерий непрерывной дифференцируемости в среднем квадратичном случайного процесса на отрезке (б/д). Вычисление математического ожидания, корреляционной и ковариационной функций L^2-производной от случайного процесса.

30. Интегрирование случайных процессов в среднем квадратичном. Критерий интегрируемости в среднем квадратичном на отрезке и следствие из него. Вычисление математического ожидания, корреляционной и ковариационной функций L^2-интеграла от случайного процесса.

31. Стационарные случайные процессы: стационарность в узком и широком смыслах. Взаимосвязь между ними. Стационарность в узком смысле марковской цепи с начальным стационарным распределением. Теорема об эквивалентности двух понятий стационарности для гауссовских процессов.

32. Ортогональные случайные меры на полукольце подмножеств. Структурная мера ортогональной случайной меры. Теорема о взаимно однозначном соответствии ортогональных случайных мер на полукольце полуинтервалов на прямой и непрерывных справа L^2-процессов с ортогональными приращениями.

33. Стохастический интеграл по ортогональной случайной мере. Продолжение с полукольца $\mathcal{K}$ ортогональной случайной меры на алгебру $\alpha(\mathcal{K})$ и ее структурной меры на сигма-алгебру $\sigma(\mathcal{K})$. Определение и свойства стохастического интеграла от простых функций.

34. Стохастический интеграл по ортогональной случайной мере. Построение стохастического интеграла для произвольной функции из $L^2(\Lambda, \sigma(\mathcal{K}), \mu)$. Теорема о его основных свойствах. Идея построения стохастического интеграла в случае, когда $\Lambda \notin \mathcal{K}$.

35. Спектральное представление. Теорема Карунена.

36. Спектральное представление стационарной в широком смысле последовательности. Теорема Герглотца (док-во достаточности). Спектральная мера и спектральная плотность стационарной в широком смысле последовательности. Вычисление спектральной плотности с помощью ряда Фурье. Теорема о спектральном представлении стационарной в широком смысле последовательности.

37. Спектральное представление стационарного в широком смысле процесса на прямой. Теорема Бохнера – Хинчина (док-во достаточности). Спектральная мера и спектральная плотность стационарного в широком смысле процесса. Вычисление спектральной плотности с помощью формулы обращения. Теорема о спектральном представлении стационарного в широком смысле случайного процесса на прямой.

38. Стохастический интеграл Ито. Понятие винеровского процесса относительно фильтрации, построение интеграла Ито для функций из $L^2((0, +\infty) \times \Omega, \mathcal{P}red, mes \times \mathsf{P})$ с помощью ортогональных случайных мер. Основные свойства интеграла Ито. Лемма о вычислении интеграла Ито для простых функций. Предсказуемые процессы. Лемма о достаточном условии предсказуемости.

39. Процесс Ито для предсказуемых L^2-процессов. Лемма о вычислении интеграла Ито по конечному отрезку, как предела в L^2. Теорема о процессе Ито (б/д). Стохастический дифференциал, формула замены переменных Ито (б/д). Пример ее применения. Понятие сильного решения стохастического дифференциального уравнения, теорема о существовании и единственности сильного решения (б/д).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2004.

2. *Булинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005.

3. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — 4-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2003.

4. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — 2-е изд. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. — М.: Мир, 1984.

6. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. — 2-е изд. — М.: Наука.Физматлит, 1996.