Теория случайных процессов

лектор — к.ф.-м.н. Д. А. Шабанов

Осень — 2012

Программа курса (3 курс, экономический поток)

1. Понятие случайного процесса (случайной функции). Примеры: случайное блуждание, процессы восстановления, эмпирические меры, модель страхования Крамера – Лундберга.

2. Простейшее случайное блуждание на прямой: распределение первого момента возвращения в нуль для симметричного, теорема о вероятности возвращения в нуль.

3. Ветвящиеся процессы Гальтона - Ватсона. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса.

4. Пространство траекторий случайного процесса, цилиндрическая сигма-алгебра на нем. Эквивалентное определение случайного процесса, как одного измеримого отображения в пространство траекторий.

5. Конечномерные распределения случайного процесса. Теорема Колмогорова о согласованных распределениях (док-во необходимости). Условия согласованности вероятностных мер на $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ в терминах характеристических функций.

6. Процессы с независимыми приращениями: критерий существования в терминах характеристических функций приращений.

7. Пуассоновский процесс постоянной интенсивности как процесс с независимыми приращениями. Явная конструкция пуассоновского процесса: процесс восстановления для экспоненциальных случайных величин.

8. Гауссовские случайные векторы (многомерное нормальное распределение). Теорема о трех эквивалентных определениях гауссовского вектора. Основные свойства гауссовских векторов, критерий независимости компонент гауссовского вектора.

9. Ковариационная и корреляционная функции случайного процесса, их неотрицательная определенность.

10. Гауссовские случайные процессы. Доказательство существования гауссовского процесса с заданными функцией среднего и ковариационной функцией.

11. Винеровский процесс (процесс броуновского движения). Теорема о двух эквивалентных определениях винеровского процесса.

12. Модификация случайного процесса. Теорема Колмогорова о существовании непрерывной модификации (б/д), следствие для гауссовских процессов. Непрерывность с вероятностью 1 траекторий винеровского процесса.

13. Дополнительные свойства траекторий винеровского процесса: недифференцируемость с вероятностью 1 (б/д), неограниченность вариации на любом конечном отрезке, закон повторного логарифма (б/д) и его локальное следствие.

14. Понятие фильтрации на вероятностном пространстве, естественная фильтрация случайного процесса. Марковские моменты и моменты остановки.

15. Строго марковское свойство и принцип отражения (б/д) для винеровского процесса. Теорема Башелье.

16. Условное математическое ожидание случайной величины относительно σ-алгебры, обоснование его существования. Явный вид условного математического ожидания в случае, если σ-алгебра порождена счетным разбиением. Основные свойства условного математического ожидания.

17. Условное математическое ожидание $\mathsf{E}\,(\xi|\eta = y)$ и его связь с условным математическим ожиданием $\mathsf{E}\,(\xi|\eta)$.

18. Мартингалы, субмартингалы и супермартингалы. Критерий мартингальности для процессов с независимыми приращениями. Разложение Дуба для согласованных процессов с дискретным временем.

19. Мартингалы. Теорема Дуба об остановке и следствие из нее. Задача о разорении игрока: мартингальный подход. Аналог теоремы Дуба для случая непрерывного времени (б/д).

20. Общее понятие марковского процесса. Эквивалентные определения марковского процесса. Марковость процессов с независимыми приращениями. Критерий марковости для гауссовских процессов.

21. Марковские цепи с непрерывным временем. Построение марковской цепи по начальному распределению и переходным вероятностям. Пуассоновский процесс как однородная цепь Маркова.

22. Однородные марковские цепи с непрерывным временем. Стохастическая полугруппа матриц переходных вероятностей. Эргодическая теорема для марковских цепей с непрерывным временем. Три следствия из эргодической теоремы: свойства эргодического распределения.

23. Инфинитезимальная матрица. Существование инфинитезимальной матрицы для стандартной марковской цепи (б/д). Прямые и обратные дифференциальные уравнения Колмогорова.

24. Пространство $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ случайных величин, лемма о непрерывности скалярного произведения. Стохастическая непрерывность и непрерывность в среднем квадратичном случайного процесса. Критерий непрерывности в среднем квадратичном L^2-процесса в терминах ковариационной функции.

25. Дифференцирование случайных процессов по вероятности и в среднем квадратичном. Критерий дифференцируемости в среднем квадратичном случайного процесса на отрезке (б/д). Вычисление математического ожидания, корреляционной и ковариационной функций L^2-производной от случайного процесса.

26. Интегрирование случайных процессов в среднем квадратичном. Доказательство того, что из непрерывности в среднем квадратичном следует интегрируемость. Вычисление математического ожидания, корреляционной и ковариационной функций L^2-интеграла от случайного процесса.

27. Стационарные случайные процессы: стационарность в узком и широком смыслах. Доказательство эквивалентности этих понятий для гауссовских процессов. Стационарность в узком смысле марковской цепи с начальным стационарным распределением.

28. Ортогональные случайные меры на измеримых пространствах. Взаимная однозначность ортогональных случайных мер на $\mathcal{B}([a, b])$ и L^2-процессами с ортогональными приращениями.

29. Стохастический интеграл по ортогональной случайной мере. Продолжение с полукольца ортогональной случайной меры и ее структурной меры. Определение и свойства стохастического интеграла от простых функций. Построение стохастического интеграла в общем случае. Теорема об его основных свойствах (б/д).

30. Спектральное представление. Теорема Карунена (б/д). Теорема Герглотца (б/д). Теорема о спектральном представлении стационарной в широком смысле последовательности.

31. Теорема Бохнера – Хинчина (док-во необходимости). Спектральное представление стационарного в широком смысле случайного процесса на прямой.

32. Стохастический интеграл Ито, построение и основные свойства. Формула Ито (б/д), примеры ее использования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность. В 2-х кн. — 3-е изд. — М.: МЦНМО, 2004.

2. *Булинский А. В., Ширяев А. Н.* Теория случайных процессов. — М.: Физматлит, 2005.

3. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. — 4-е изд. — М.: Едиториал УРСС, 2003.

4. *Севастьянов Б. А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. — 2-е изд. — М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.

5. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. В 2-х т. — М.: Мир, 1984.

6. *Вентцель А. Д.* Курс теории случайных процессов. — 2-е изд. — М.: Наука.Физматлит, 1996.