Программа курса “Случайные графы”

лектор — к.ф.-м.н., ассистент Д. А. Шабанов

годовой спецкурс для студентов 2–5 курсов,
2010–2011 учебный год

1. Модели случайных графов. Классические модели: биномиальная и равномерная. Общие модели случайных графов: примеры. Графовые случайные процессы.

2. Свойства графов. Монотонные и выпуклые свойства графов: примеры. Лемма о монотонности вероятности обладания монотонным свойством для случайного графа.

3. Пример использования случайных графов в детерминированных задачах комбинаторики: теорема Эрдеша о существовании случайного графа со сколь угодно большими хроматическим числом и обхватом.

4. Асимптотическая эквивалентность моделей $G(n,p)$ и $G(n,M)$: одинаковое асимптотическое поведение вероятности обладания монотонным свойством для случайных графов в этих моделях.

5. Пороговые вероятности обладания монотонными свойствами случайным графом. Критерий того, что данная функция является пороговой вероятностью для монотонного свойства Q. Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства графов. Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства графов.

6. Малые подграфы в случайном графе. Функция $m(G)$, сбалансированные и строго сбалансированные графы, примеры. Леммы о среднем количестве и дисперсии числа подграфов случайного графа $G(n,p)$, изоморфных данному фиксированному графу G. Методы первого и второго моментов: общие идеи. Теорема о пороговой вероятности появления подграфа случайного графа $G(n,p)$, изоморфного данному фиксированному графу G.

7. Метод моментов. Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами. Примеры таких случайных величин. Плотность и относительная компактность семейства вероятностных мер в метрическом пространстве. Теорема Прохорова (б/д). Равномерная интегрируемость семейства случайных величин. Доказательство метода моментов. Многомерный метод моментов (б/д).

8. Пуассоновская предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n,p)$, изоморфных данному фиксированному строго сбалансированному графу G, в условиях $np^{m(G)} \to c > 0$. Многомерное обобщение пуассоновской предельной теоремы, примеры ее применения.

9. Центральная предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному графу G, в условиях $np^{m(G)} \to +\infty$.

10. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np \to 0$: максимальный размер и структура компонент связности.

11. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c \in (0, 1)$: максимальный размер компонент связности и отсутствие сложных компонент. Оценка вероятности большого уклонения биномиальной случайной величины от своего среднего значения (неравенство Чернова).

12. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Уравнение для нахождения вероятности вырождения. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса (б/д).

13. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c > 1$. Теорема о размере максимальной связной компоненты случайного графа. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты.

14. Числа $C(k, k + l)$. Лемма о количестве лесов с k компонентами на множестве из n вершин с помеченными корнями деревьев. Нахождение точного значения $C(n, n)$.

15. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np \to c \neq 1$. Теорема о среднем значении и дисперсии общего числа вершин в унициклических компонентах.

16. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$. Лемма о среднем значении числа l-компонент на k вершинах. Лемма о среднем количестве общего числа вершин в древесных и унициклических компонентах.

17. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = 1+\lambda n^{-1/3}$. Максимальный размер унициклических и сложных компонент. Асимптотический порядок размера максимальной древесной компоненты случайного графа.

18. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$. Теоремы Райта и Боллобаша об оценках величины $C(k, k + l)$ (б/д). Лемма об отсутствии сложных компонент маленького размера.

19. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$. Ограниченность (по вероятности) максимальной сложности компоненты в случайном графе. Следствие: количество, размер и сложность сложных компонент.

20. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = \omega(n) \to +\infty$. Лемма об отсутствии унициклических компонент. Общая структура графа в данных условиях.

21. Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин степени k в случайном графе $G(n, p)$. Аналогичные теоремы для числа вершин степени не меньше (не больше) k. Теоремы о предельной концентрации максимальной и минимальной степеней вершин в случайной графе $G(n, p)$.

22. Связность случайного графа $G(n,p)$. Теорема о предельной вероятности связности $G(n,p)$ при условии $p = (\ln + c + o(1))/n$. Теорема о точной пороговой вероятности свойства связности $G(n,p)$. Следствия из этой теоремы: точная пороговая вероятность для свойства отсутствия изолированных вершин, пороговая вероятность для связности случайного графа $G(n,M)$.

23. Графовый случайный процесс $(\tilde{G}_M, M = 0, \ldots, \binom{n}{2})$, случайные моменты первого появления монотонно возрастающих свойств. Вершинная и реберная k-связность графов, сепараторы в графах. Лемма о сепараторах в $G(n,p)$. Теорема об одновременном наступлении k-связности и отсутствии вершин степени меньше k в графовом случайном процессе $\tilde{G}$.

24. Пути и маршруты в графах. Теорема Комлоша–Семереди о длине максимального пути в случайном графе $G(n,p)$. Понятие случайного двухцветного мультиграфа $G(n,r,r)$, алгоритм поиска пути в цветном мультиграфе, его формальное описание.

25. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Трансформации путей и лемма Поса. Три леммы о наличии свойства $|U \cup \Gamma(U)| \geq 3|U|$ для малых множеств U в случайном графе $G(n,r,r)$.

26. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Теорема о предельной гамильтоновости случайного графа $G(n,p)$ при условии $p = (\ln n + \ln\ln n + \omega(n))/n$, где $\omega(n) \to +\infty$.

27. Гамильтоновы циклы в случайном графе. "Сине-зеленый" случайный граф $\mathcal{G}(n,p,\geq k)$. Лемма о связи случайного графа $\mathcal{G}(n,p,\geq k)$ и графового случайного процесса $\tilde{G}_M$.

28. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Теорема о предельных свойствах случайного графа $\mathcal{G}(n,p,\geq 2)$ при условии $p = (\ln n + \ln\ln n - \omega(n))/n$, где $\omega(n) \to +\infty$ и $\omega(n) = o(\ln\ln\ln n)$.

29. Гамильтоновы циклы в случайном графе. "Красно-сине-зеленая" модификация случайного графа $\mathcal{G}(n,p,\geq 2)$. Теорема о об одновременном наступлении гамильтовости и отсутствии вершин степени меньше 2 в графовом случайном процессе $\tilde{G}$.

30. Раскрашиваемость случайного графа. Определение и простейшие свойства хроматического числа графов. Двудольность случайного графа $G(n,p)$ при условии $p = o(1/n)$. Лемма о нижней оценке хроматического числа $\chi(G(n,p))$.

31. FKG–неравенство в простейшем случае. Неравенство Янсона, следствия из него.

32. Раскрашиваемость случайного графа. Оценка вероятности отсутствия множества независимости большого размера в случайного графа $G(n,p)$. Теорема о верхней оценке хроматического числа $\chi(G(n,p))$ для случая $p = const$. Теорема Лучака об оценках хроматического числа случайного графа $G(n,p)$ в общем случае (б/д).

Список литературы

[1] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[2] S. Jansen, T. Łuczak, A. Rucinski, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.

[3] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.

[4] T. Łuczak, B. Pittel, J. Wierman, “The structure of a random graph at the point of phase transition”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **341**:2 (1994), 721–748.

[5] В. Ф. Колчин, *Случайные графы*, Физматлит, М., 2000.