

Программа курса «Случайные графы»

лектор — д.ф.-м.н. Д. А. Шабанов

сентябрь 2013 — май 2014

1. Модели случайных графов. Классические модели: биномиальная и равномерная. Другие модели случайных графов: случайные регулярные графы, случайные подграфы неполных графов. Графовые случайные процессы.
2. Теория случайных подмножеств, биномиальная и равномерная модели. Монотонные свойства конечных подмножеств. Лемма о монотонности вероятности обладания монотонным свойством для случайного подмножества.
3. Асимптотическая эквивалентность моделей $\Gamma(p)$ и $\Gamma(m)$: одинаковое асимптотическое поведение вероятности обладания монотонным свойством для случайных подмножеств в этих моделях.
4. Пороговые вероятности обладания монотонными свойствами случайным подмножеством. Критерий того, что данная функция является пороговой вероятностью для монотонного свойства Q . Теорема о существовании пороговой вероятности для произвольного монотонного свойства случайных подмножеств. Определение точной пороговой вероятности для монотонного свойства, примеры.
5. Малые подграфы в случайном графе $G(n, p)$. Функция $m(G)$, сбалансированные и строго сбалансированные графы, примеры. Леммы о среднем количестве и дисперсии числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному графу G . Методы первого и второго моментов. Теорема о пороговой вероятности появления подграфа случайного графа $G(n, p)$, изоморфного данному фиксированному графу G .
6. Метод моментов. Достаточное условие того, что случайная величина однозначно определяется своими моментами. Примеры таких случайных величин. Плотность и относительная компактность семейства вероятностных мер в метрическом пространстве. Теорема Прохорова (б/д). Равномерная интегрируемость семейства случайных величин. Доказательство метода моментов. Многомерный метод моментов (б/д).
7. Пуассоновская предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному строго сбалансированному графу G , в условиях $np^{m(G)} \rightarrow c > 0$. Многомерное обобщение пуассоновской предельной теоремы, примеры ее применения.

8. Центральная предельная теорема для числа подграфов случайного графа $G(n, p)$, изоморфных данному фиксированному графу G , в условиях $np^{m(G)} \rightarrow +\infty$.
9. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np \rightarrow 0$: максимальный размер и структура компонент связности.
10. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c \in (0, 1)$: максимальный размер компонент связности и отсутствие сложных компонент. Оценка вероятности большого отклонения биномиальной случайной величины от своего среднего значения (неравенство Чернова).
11. Ветвящиеся процессы Гальтона-Ватсона. Уравнение для нахождения вероятности вырождения. Теорема о вероятности вырождения ветвящегося процесса (б/д).
12. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = c > 1$. Теорема о размере максимальной связной компоненты случайного графа. Центральная предельная теорема для размера максимальной связной компоненты (б/д).
13. Числа $C(k, k + l)$. Лемма о количестве лесов с k компонентами на множестве из n вершин с помеченными корнями деревьев. Нахождение точного значения $C(k, k)$. Теоремы Райта и Боллобаша об оценках величины $C(k, k + l)$ (б/д).
14. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np \rightarrow c \neq 1$. Теорема о среднем значении и дисперсии общего числа вершин в унициклических компонентах. Предельное распределение числа унициклических компонент (б/д).
15. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$. Лемма о среднем значении числа l -компонент на k вершинах. Лемма о среднем количестве общего числа вершин в древесных и унициклических компонентах. Максимальный размер унициклических и сложных компонент. Асимптотический порядок размера максимальной древесной компоненты случайного графа.
16. Эволюция случайного графа $G(n, p)$. Случай $np = 1 + \lambda n^{-1/3}$. Лемма об отсутствии сложных компонент маленького размера. Ограниченность (по вероятности) максимальной сложности компоненты в случайном графе. Следствие: количество, размер и сложность сложных компонент.
17. Распределение степеней вершин в случайном графе. Пуассоновская предельная теорема для числа вершин степени k в случайном графе $G(n, p)$. Аналогичные теоремы для числа вершин степени не менее (не более) k . Теоремы о предельной концентрации максимальной и минимальной степеней вершин в случайной графе $G(n, p)$.
18. Связность случайного графа $G(n, p)$. Теорема о предельной вероятности связности $G(n, p)$ при условии $p = (\ln + c + o(1))/n$. Теорема о точной пороговой вероятности свойства связности $G(n, p)$. Следствия из этой теоремы: точная пороговая вероятность для свойства отсутствия изолированных вершин, пороговая функция для связности случайного графа $G(n, m)$.

19. Графовый случайный процесс $(\tilde{G}(m), m = 0, \dots, \binom{n}{2})$, случайные моменты первого появления монотонно возрастающих свойств. Вершинная и реберная k -связность графов, сепараторы в графах. Лемма о сепараторах в $G(n, p)$. Теорема об одновременном наступлении k -связности и отсутствии вершин степени меньше k в графовом случайном процессе \tilde{G} .
20. Совершенные паросочетания в случайном графе. Точная пороговая вероятность появления в случайном графе $G(n, p)$ совершенного паросочетания.
21. Пути и маршруты в графах. Теорема Комлоша–Семереди о длине максимального пути в случайном графе $G(n, p)$. Понятие случайного двухцветного мультиграфа $G(n, r, r)$, алгоритм поиска пути в цветном мультиграфе, его формальное описание.
22. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Трансформации путей и лемма Поша. Три леммы о наличии свойства $|U \cup \Gamma(U)| \geq 3|U|$ для малых подмножеств U в случайном графе $G(n, p)$.
23. Гамильтоновы циклы в случайном графе. Теорема о предельной гамильтоновости случайного графа $G(n, p)$ при условии $p = (\ln n + \ln \ln n + \omega(n))/n$, где $\omega(n) \rightarrow +\infty$. Теорема о об одновременном наступлении гамильтоновости и отсутствии вершин степени меньше 2 в графовом случайном процессе \tilde{G} (б/д).
24. Неравенства концентрации в теории вероятностей. ФКГ–неравенство в простейшем случае. Неравенство Янсона, следствия из него. Неравенство Азумы–Хёффдинга для мартингалов с ограниченными мартингальными разностями. Мартингалы реберного и вершинного типов в случайных графах.
25. Независимые множества в случайном графе. Число независимости $\alpha(G(n, p))$ и его асимптотическое поведение при $p = \text{const}$. Поведение числа независимости в динамической модели случайного графа $G(\mathbb{N}, p)$.
26. Раскрашиваемость случайного графа. Оценка вероятности отсутствия множества независимости большого размера в случайного графа $G(n, p)$ с помощью неравенства Янсона. Теорема об асимптотическом поведении хроматического числа $\chi(G(n, p))$ для случая $p = \text{const}$. Теорема Лучака об оценках хроматического числа случайного графа $G(n, p)$ в общем случае (б/д).
27. Теорема о концентрации хроматического числа случайного графа $G(n, p)$ в двух точках при $p \leq n^{-6/7}$.
28. Независимые множества $G(n, p)$ в случае $p = c/n$. Метод интерполяции и закон больших чисел для $\alpha(G(n, p))$.
29. Случайные подграфы неполных графов. Теорема Фриза–Кривелевича–Мартина о фазовом переходе в случайном подграфе квазислучайного графа.

Список литературы

- [1] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [2] S. Jansen, T. Łuczak, A. Ruciński, *Random graphs*, Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [3] Н. Алон, Дж. Спенсер, *Вероятностный метод*, Бином. Лаборатория знаний, М., 2007.
- [4] T. Łuczak, B. Pittel, J. Wierman, “The structure of a random graph at the point of phase transition”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **341**:2 (1994), 721–748.
- [5] A. Frieze, M. Krivelevich, R. Martin, “The emergence of a giant component in random subgraphs of pseudo-random graphs”, *Random Structures and Algorithms*, **24**:1 (2004), 42–50.
- [6] M. Bayati, D. Gamarnik, P. Tetali, “Combinatorial approach to the interpolation method and scaling limits in sparse random graphs”, *Annals of Probability*, **41**:6, 4080–4115.