Образцы вариантов контрольных работ по курсу "Математические модели демографии"(осень 2009)

Автор — доцент А.В.Лебедев

Контрольная работа 1.

Вариант 1.

1. Имеется популяция животных двух возрастов: молодые и взрослые. За единицу времени молодые становятся взрослыми, а пара взрослых либо рождает в среднем 6 пар молодых, либо погибает с вероятностью 0,5. В начальный момент $n = 0$ имеется 5 пар взрослых. Найти среднее число пар взрослых в любой момент времени $n > 0$.

2. Рост численности населения описывается обобщенной моделью Мальтуса: $x' = k(x)x$, где $k(x) = 0,01x$. Пусть $x(0) = 1$, найти $x(20)$.

3. Сила смертности $d(x) = a/(b - x)$, $0 < x < b$, где $b = 80$. Средняя продолжительность жизни 48 лет. Найти вероятность дожития и среднюю продолжительность предстоящей жизни в возрасте 70 лет.

4. В модели смертности Брасса найти вероятность дожить до 60 лет, если $\alpha = -1,2$; $\beta = 0,9$.

5. Распределение числа потомков $p_0 = 0,1$, $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,3$, $p_3 = 0,4$. Найти среднее число потомков и вероятность вырождения.

6. Функция возрастной фертильности

$$f(x) = \begin{cases} (3/4)e^{(x_0-x)/2} - (1/2)e^{(x_0-x)} & , x \geq x_0, \\ 0 & , x < x_0 \end{cases} , \quad x_0 = 24.$$

Найти среднее число детей и средний возраст матерей.

7. В модели рождаемости Брасса найти рождаемость в возрасте 20 лет и максимальную рождаемость при среднем числе детей 1,6 и среднем возрасте матерей 25,2 года.

Вариант 2.

1. Имеется популяция животных двух возрастов: молодые и взрослые. За единицу времени молодые становятся взрослыми, а пара взрослых либо рождает в среднем 3 пары молодых, либо погибает с вероятностью 0,5. В начальный момент $n = 0$ имеется 2 пары взрослых. Найти среднее число пар взрослых в любой момент времени $n > 0$.

2. Рост численности населения описывается обобщенной моделью Мальтуса: $x' = k(x)x$, где $k(x) = 0,01(3 - x)$. Пусть $x(0) = 1$, найти $x(50)$.

3. Функция распределения времени жизни имеет степенной вид $F(x) = (x/b)^a$, $0 < x < b$, где $b = 100$. Средняя продолжительность жизни составляет 75 лет. Найти силу смертности и среднюю продолжительность предстоящей жизни в возрасте 50 лет.

4. В модели смертности Брасса найти вероятность дожить до 70 лет, если $\alpha = -1,3$; $\beta = 1,1$.

5. Распределение числа потомков $p_0 = 0,1$, $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,3$. Найти среднее число потомков и вероятность вырождения.

6. Функция возрастной фертильности

$$f(x) = \begin{cases} (1/2)e^{(x_0-x)/3} - (1/2)e^{(x_0-x)} & , x \geq x_0, \\ 0 & , x < x_0 \end{cases} , \quad x_0 = 20.$$

Найти среднее число детей и средний возраст матерей.

7. В модели рождаемости Брасса найти рождаемость в возрасте 22 лет и максимальную рождаемость при среднем числе детей 1,9 и среднем возрасте матерей 26,2 года.

Контрольная работа 2.

Вариант 1.

1. Сила смертности $d(x) = a/(b-x)$, $0 < x < b$, где $a = 1/2$. Средняя продолжительность жизни 72 года. Найти средний возраст стационарного населения.

2. В модели естественного движения населения известно, что $b(x) = Ae^{(20-x)/2}$, $x \geq 20$; $\bar{F}(x) = e^{-x/60}$ и население стационарно. Найти A и репродуктивный потенциал Фишера в возрасте 22 года.

3. Открытое население из двух групп описывается уравнением:

$$\vec{n}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \vec{n}(t) + 6 \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

При начальном условии $\vec{n}(0) = (1,1)^T$ найти $\vec{n}(t)$ и предельную структуру населения.

4. Построить матрицы объединения U и расщепления S, если объединяются группы: 1,6 в 1; 2,5 в 2; 3,4 в 3, и ведущий вектор $\vec{x} = (1,3,2,5,4,7)^T$. Найти значение $S(1,3,5)^T$.

5. Выяснить, какие группы можно объединять при следующей матрице C:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

и построить матрицу для новых групп.

Вариант 2.

1. Функция распределения времени жизни имеет степенной вид $F(x) = (x/b)^a$, $0 < x < b$, где $a = 2$. Средняя продолжительность жизни составляет 60 лет. Найти средний возраст стационарного населения.

2. В модели естественного движения населения известно, что $b(x) = Ae^{(21-x)/3}$, $x \geq 21$; $\bar{F}(x) = e^{-x/70}$ и население стационарно. Найти A и репродуктивный потенциал Фишера в возрасте 24 года.

3. Открытое население из двух групп описывается уравнением:

$$\vec{n}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{n}(t) + 30 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

При начальном условии $\vec{n}(0) = (1,1)^T$ найти $\vec{n}(t)$ и предельную структуру населения.

4. Построить матрицы объединения U и расщепления S, если объединяются группы: 1,2 в 1; 3,5 в 2; 4,6 в 3, и ведущий вектор $\vec{x} = (5,1,7,3,4,2)^T$. Найти значение $S(9,5,1)^T$.

5. Выяснить, какие группы можно объединять при следующей матрице C:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

и построить матрицу для новых групп.

Контрольная работа 3.

Вариант 1.

1. В организации две группы, интенсивность перехода из первой во вторую 3, из второй в первую 4, интенсивность ухода вовне из первой 1, из второй 2. В задаче регулирования набором найти наименьший показатель роста $\alpha \geq 0$, при котором достижима структура $\vec{g} = (2/3, 1/3)^T$, и соответствующий вектор набора $\vec{q}$.

2. В модели мотивации движения населения с линейной функцией предпочтения известно, что $\lambda_{11} = 1$, $\lambda_{12} = 2$, $G_1(x) = x^3 + 10$, $G_2(x) = x^2$. Восстановить матрицу интенсивностей переходов.

3. Найти коэффициент групповой привлекательности q_{12} для групп с уровнем жизни, имеющим распределение Вейбулла вида $F(x) = 1 - e^{-(x/\mu)^3}$, $x > 0$, с параметрами $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$.

4. Движение населения между тремя городами описывается обобщенной гравитационной моделью с параметром $\gamma = 1$. Известны расстояния $r_{12} = 2$, $r_{13} = 3$, $r_{23} = 4$; численности населения городов $n_1 = 1$, $n_2 = 9$, $n_3 = 4$; скорости $v_{12} = 18$, $v_{13} = 8$, $v_{21} = 54$. Найти остальные параметры модели и скорость v_{23}.

5. Доходы граждан имеют равномерное распределение, причем 20% самых богатых принадлежит 32% всего дохода. Найти коэффициенты фондов и Джини.

6. Оценить коэффициент Джини в случае 5 групп равной численности по возрастанию доходов, если доли доходов этих групп составляют: $r_1 = 0,10$, $r_2 = 0,12$, $r_3 = 0,14$, $r_4 = 0,19$, $r_5 = 0,45$.

7. Доходы граждан имеют распределение Парето с наименьшим доходом 1 и средним доходом 5. Найти долю бедных, если уровень бедности 2.

Вариант 2.

1. В организации две группы, интенсивность перехода из первой во вторую 6, из второй в первую 5, интенсивность ухода вовне из первой 2, из второй 1. В задаче регулирования набором найти наименьший показатель роста $\alpha \geq 0$, при котором достижима структура $\vec{g} = (1/4, 3/4)^T$, и соответствующий вектор набора $\vec{q}$.

2. В модели мотивации движения населения с линейной функцией предпочтения известно, что $\lambda_{11} = 2$, $\lambda_{12} = 3$, $G_1(x) = x^3 + 12$, $G_2(x) = x^2$. Восстановить матрицу интенсивностей переходов.

3. Найти коэффициент групповой привлекательности q_{12} для групп с уровнем жизни, имеющим распределение $F(x) = (x/\lambda)^2$, $0 \leq x \leq \lambda$, с параметрами $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

4. Движение населения между тремя городами описывается обобщенной гравитационной моделью с параметром $\gamma = 2$. Известны расстояния $r_{12} = 1$, $r_{13} = 1$, $r_{23} = 2$; численности населения городов $n_1 = 4$, $n_2 = 25$, $n_3 = 9$; скорости $v_{12} = 50$, $v_{13} = 18$, $v_{21} = 20$. Найти остальные параметры модели и скорость v_{31}.

5. Доходы граждан имеют распределение Парето, причем 36% самых богатых принадлежит 60% всего дохода. Найти коэффициенты фондов и Джини.

6. Оценить коэффициент Джини в случае 5 групп равной численности по возрастанию доходов, если доли доходов этих групп составляют: $r_1 = 0,07$, $r_2 = 0,08$, $r_3 = 0,11$, $r_4 = 0,16$, $r_5 = 0,58$.

7. Доходы граждан имеют равномерное распределение с наименьшим доходом 1 и средним 11. Найти относительную нехватку доходов при уровне бедности 4.