1. Пусть ξ, η, ζ – независимые равномерно распределенные на отрезке $[0,1]$ случайные величины. Найти $E(\xi\eta|\eta\zeta)$.

2. Пусть (ξ_1, ξ_2, ξ_3) – гауссовский вектор, $E\xi_i = 0$, $D\xi_i = 1$, $Cov(\xi_i, \xi_j) = -1$. Найти $E(\xi_1\xi_2|\xi_3)$.

3. Случайная последовательность задана реккурентным соотношением

$$\xi_n = a\xi_{n-1} + \varepsilon_n, \xi_0 = 0$$

где a – константа и ε_n– последовательность независимых одиноково распределенных случайных величин с нормальным распределением с параметрами $0, 1$. Найти совместное распределение ξ_1, ξ_2, ξ_3.

4. Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2$– независимые случайные величины с нормальным распределением с параметрами $0, 1$. Найти конечномерные распределения сдучайного процесса $\alpha_t = \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{t}, t > 0$.

5. Рассмотрим цепь Маркова ξ_t с непрерывным временем на пространстве состояний $\{1, 2, 3\}$. Если разместить эти состояния на окружности, то с интенсивностью λ цепь переходит из состояния i в соседнее состояние по часовой стрелке; с интенсивностью μ — из состояния i в соседнее состояние против часовой стрелки. Выписать матрицу интенсивностей и найти стационарное распределение цепи. Пусть $\tau_1 < \tau_2 < ...$ – случайные моменты времени, когда цепь Маркова изменяет состояние. Найти $P(\xi_{\tau_2} = 2|\xi_0 = 1)$.

6. Задана цепь Маркова ξ_t с дискретным временем на пространстве состояний $\{1, 2, 3, 4\}$. С вероятностью $\lambda = 1/3$ цепь переходит из состояния i в $i + 1$, $(i = 2, 3)$, с вероятностью $\mu = 2/3$ — из состояния i в $i - 1$ $(i = 2, 3)$. Для крайних состояний возможны только переходы из 4 в 3 и из 1 в 2 с вероятностью 1. Выписать матрицу переходных вероятностей и найти стационарное распределение. Найти $P(\xi_2 = 3|\xi_0 = 1)$.

7. Найти конечномерные распределения процесса $\xi_t = I(\omega < t)$, заданного на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, где $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{F}$ – σ-алгебра борелевских подмножеств, P – мера Лебега.

8. Пусть $\xi_i, i = 1, 2, ...$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием $E\xi_i = 0$. Доказать, что последовательность $S_n = \xi_1 + ...+ \xi_n$ – мартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, ..., \xi_n)$.

9. Пусть $\xi_i, i = 1, 2...$ последовательность неотрицательных случайных величин, имеющих конечное математическое ожидание. Доказать, что последовательность $S_n = \xi_1 + ...+ \xi_n$ – субмартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, ..., \xi_n)$.

10. Пусть $\xi_i, i = 1, 2, ...$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $E\xi_i = 1$. Доказать, что последовательность $S_n = \prod_{i=1}^{n}\xi_i$ – мартингал относительно фильтрации $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, ..., \xi_n)$.

11. Пусть ξ – случайная величина, $E|\xi| < \infty$, $\mathcal{F}_n$ – неубывающая последовательность $\sigma-$алгебр. Пусть $\xi_n = E(\xi|\mathcal{F}_n)$. Доказать, что $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$ – мартингал.

12. Пусть $\xi_i, i \geq 0$ – случайная последовательность, $E|\xi_i| < \infty$, согласованная с с заданным неубывающим семейством $\sigma-$ алгебр $\mathcal{F}_i$. Определим компенсатор по формуле

$$\alpha_n = \sum_{i=0}^{n-1} E(\xi_{i+1} - \xi_i|\mathcal{F}_i), n \geq 1, \alpha_0 = 0$$

Доказать, что разность $\xi_n - \alpha_n$ – мартингал относительно $\mathcal{F}_n$.

13. Пусть w_t – винеровский процесс. Доказать, что $\exp(w_t - t/2)$ – мартингал.

14. Пусть S_n – симметричное случайное блуждание. Найти x при котором $\exp(S_n - xn)$ – мартингал.

15. Пусть $N(t)$ – пуассоновский процесс интенсивности λ. Найти x при котором $\exp(N(t) - xt)$ – мартингал.

16. Пусть w_t – винеровский процесс. Найти ковариационную функцию w_t^2.

17. Пусть $(\eta_n, \mathcal{F}_n)$ – мартингал, $E\eta_n^2 < \infty$. Доказать, что $(\eta_n^2, \mathcal{F}_n)$ – субмартингал. Найти компенсатор α_n последовательности η_n^2. Показать, что последовательность α_n согласована с неубывающим семейством $\sigma-$ алгебр $\mathcal{F}_{n-1}$ (α_n – $\mathcal{F}_{n-1}-$измерима) и что последовательность α_n не убывает (п.н.).

18. Пусть $\xi_i, i = 1, 2...$ последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием: $E\xi_i = 0, E\xi_i^2 < \infty$. Найти компенсатор последовательности S_n^2, где $S_0 = 0, S_n = \xi_1 + ...+ \xi_n$.

19. Найти компенсатор случайной последовательности

$$S_n = \xi_0 + ... + \xi_n (mod 2),$$

где ξ_i – независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением $P(\xi_i = 1) = p, P(\xi_i = 0) = 1 - p$.

20. Доказать, что сумма $2-$ух независимых пуассоновских процессов с интенсивностью λ есть пуассоновский процесс. Найти интенсивность суммарного процесса.

21. Пусть μ_t – пуассоновский процесс с интенсивностью λ. Найти условную вероятность

$$P(\mu_t = n | \mu_T = N)$$

при $n \leq N, t \leq T$.

22. Пусть μ_t – пуассоновский процесс и $\mu_T = 1$. Обозначим через $\tau_1 < \tau_2 < ...$ моменты скачков пуассоновского процесса. Найти условную плотность распределения случайной величины τ_1 при условии, что $\mu_T = 1$.

23. Найти условную вероятность $P(t_1 \leq x | t_2 > T)$, где $t_1 < t_2 < ...$ – моменты скачков пуассоновского процесса.

24. Пусть $S_0 = 0, S_n = \xi_1 + ...+ \xi_n$ – симметричное случайное блуждание на Z; $P(\xi_i = 1) = P(\xi_i = -1) = \frac{1}{2}$. Найти асимптотику вероятности $P(S_{2n} = 0)$ при $n \to \infty$.

25. Пусть $S_0^x = x, S_n^x = \xi_1 + ...+ \xi_n$ – случайное блуждание на Z; $P(\xi_i = 1) = p, P(\xi_i = -1) = q = 1 - p$. Найти вероятность $p(x) = P(\exists n : S_n^x = 0)$ когда-либо вернуться в 0, начиная в $x > 0$.

26. Пусть $S_0^x = x, S_n^x = \xi_1 + ...+ \xi_n$ – случайное блуждание на Z; $P(\xi_i = 1) = p, P(\xi_i = -1) = q = 1 - p$. Пусть $\tau(x) = \min\{n : S_n^x = 0\}$ $x > 0$. Найти $E\tau(x)$.

27. Рассмотрим симметричное случайное блуждание S_k, где $S_0 = 0$. Найти вероятность $P(\max_{k \in [0,n]} S_k > a, S_n = b)$ при $a > 0$ и $a > b$.

28. Пусть $\eta_t \in Z_+, t = 0, 1, ...$ – последовательность н.о.р. с.в. и $f(x, y)$ – неслучайная функция на $Z_+ \times Z_+$. Будет ли последовательность случайных величин $\xi_{t+1} = f(\xi_t, \eta_t), \xi_0 = 1$, цепью Маркова?

29. Пусть w_t – винеровский процесс. Найти корреляционную функцию процесса $w_t - t w_1$ при $0 \leq t \leq 1$.

30. Пусть w_t – винеровский процесс. Найти условную плотность w_t, при условии, что $w_{t_1} = a, w_{t_2} = b$, $t_1 \leq t \leq t_2$.

31. Пусть w_t – винеровский процесс. Найти вероятность

$$P(\max_{0<s<t} w_s > a, w_t < b)$$

при $a > 0$ и $a > b$.

32. Пусть $\tau(a)$ – момент времени, когда винеровский процесс впервые достигает значение a. Доказать, что случайные величины $\tau(a)$ и $a^2\tau(1)$ имеют одинаковое распределение.

33. Пусть w_t – винеровский процесс. $\zeta_t = \exp(-t) w_{\exp 2t}$. Найти ковариационную функцию этого процесса.

34. Пусть w_t – винеровский процесс. Найти $E(w_t|w_s)$ при $t > s$ и при $t < s$.

35. Пусть w_t – винеровский процесс. Найти $E(w_t w_s|w_1 = 0)$ при $s < t < 1$.

36. Доказать, что $w_t^2 - t$ – мартингал относительно $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{\leq t} = \sigma(w_s, s \leq t)$, где w_t – винеровский процесс.

37. Пусть w_t – винеровский процесс. Найти $E\tau$, где $\tau = \inf\{t > 0 : |w_t| = 1\}$.

38. Пусть w_t – винеровский процесс. Найти $E \int_0^\tau w_t dt$, где $\tau = \inf\{t > 0 : |w_t| = 1\}$.

39. Пусть w_t – винеровский процесс, $\tau-$ момент первого выхода w_t из отрезка $[a, b]$. Считается, что $w_0 = x \in [a, b]$. Найти вероятность $P_x(w_\tau = a)$ и $E_x\tau$.

40. Пусть ξ_t – диффузионный процесс с коэффициентами диффузии $a > 0$ и сноса b. Найти вероятность того, что ξ_t выйдет из отрезка $[y, z]$ через точку y при условии, что $\xi_0 = x \in [y, z]$.

41. Пусть S_n – симметричное случайное блуждание. Найти вероятность того, что S_n выйдет из отрезка $[a, b]$ через правый конец и математическое ожидание времени выхода из отрезка $[a, b]$ при условии, что $S_0 = x \in [a, b]$.

42. Пусть S_n – несимметричное случайное блуждание с вероятностями скачков p (направо) и q (налево). Найти вероятность того, что S_n выйдет из отрезка $[a, b]$ через правый конец и математическое ожидание времени выхода из отрезка $[a, b]$ при условии, что $S_0 = x \in [a, b]$.