

Программа курса "Стохастическое исчисление в финансах"

Весенний семестр 2011/12 года

1. Броуновское движение и его свойства ([1, гл. 3]). Мартингалы. Теорема об опциональной остановке ([1, гл. 4]). Стохастический интеграл ([1, гл. 8]).
2. Процессы Ито. Формула Ито. Стохастические дифференциальные уравнения. Примеры. ([1, гл. 8]).
3. Процесс плотности. Эквивалентная замена меры. Теорема Гирсанова. ([1, гл. 8, стр. 312], лекции).
4. Модель Башелье. Существование и единственность мартингальной меры. Пример "арбитражной" стратегии. Справедливые цены опционов. Уравнения в частных производных для справедливой цены. Формула Башелье. ([2, 3.3], лекции).
5. Модель Блека-Шоулза. Существование и единственность мартингальной меры. Справедливые цены опционов. Уравнения в частных производных для справедливой цены. Формула Блека-Шоулза-Мерттона. Греки. ([2, 3.4], лекции).
6. Уравнения в частных производных для справедливых цен азиатских опционов в модели Блека-Шоулза (лекции).
7. Модель Хестона (стохастической волатильности). Уравнения в частных производных для справедливой цены. ([2, 7.4.4], лекции).
8. Модель локальной волатильности (Дерман-Кани, Дюпир). Вывод поверхности волатильности из наблюдаемых цен call-опционов. ([2, 7.3]).
9. Форварды и фьючерсы. Модель с реверсией к форварду (Клелоу-Стрикланд) для товарных рынков. Справедливые цены опционов. ([3]).
10. Модель Халла-Уайта для рынка процентных ставок. Калибровка коэффициентов по наблюдаемой кривой процентных ставок. Замена отсчёта. Расчёт справедливой цены опционов на облигации. ([4, 2/3.3]).
11. Модель Хиса-Джерроу-Морттона для рынка процентных ставок. Вывод уравнения для цены облигации. Условия отсутствия арбитража. ([4, 5]).
12. Особенности эмпирической рыночной динамики ([5, 4.2/4.3], лекции). Процессы Леви ([5, 3.1b]). Замена времени, обобщенные обратно-гауссовские и гиперболические распределения ([5, 3.1d]). Фрактальное броуновское движение ([5, 3.2c/3.2d]).
13. Общее понятие о методах Монте-Карло для расчёта справедливых цен опционов. ([6], лекции).

Задачи

1. Решить СДУ $dX_t = \mu(t)X_t dt + \sigma(t)X_t dB_t$.

2. Решить СДУ $dR_t = (\alpha - \beta R_t)dt + \sigma dB_t$.
3. Дан отрезок $[0; 100]$. Частица изначально находится в точке $x = 16$ и перемещается на каждом шагу на единицу вправо или влево с вероятностями p и $1 - p$ соответственно. Какова вероятность достичь правого конца отрезка раньше левого, если а) $p = 0.5$ б) $p \neq 0.5$?
4. Доказать, что процесс $\exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$ является мартингалом. Является ли он равномерно интегрируемым?
5. Пусть $P \sim Q$ и $\xi_n \xrightarrow{P} \xi$. Доказать, что $\xi_n \xrightarrow{Q} \xi$.
6. Доказать что из условий безарбитражности следует выпуклость рыночных цен опционов call и put европейского типа.
7. На рынке торгуются опционы call на n активов с одним источником случайности $F_1(X_t), \dots, F_n(X_t)$ с экспирацией T и всеми возможными страйками. Пусть все F_k - непрерывные и монотонно возрастающие функции. Как выразить через их цены справедливую цену производного финансового инструмента $(\sum_{k=1}^n F_k(X_T) - K)^+$ (опциона call на корзину)?
8. Рассчитать формулу и изобразить примерный график для коэффициентов Δ и ν в модели Блека-Шоулза.
9. Рассчитать формулу и изобразить примерный график для коэффициентов Γ и Θ в модели Блека-Шоулза.
10. Кубик бросают три раза последовательно, причем наблюдатель имеет право в любой момент остановить игру и получить выигрыш равный последнему выброшенному значению. Найти оптимальную стратегию наблюдателя и ожидаемый выигрыш.
11. Чем может быть обусловлена разница в ценообразовании форвардных и фьючерсных контрактов?
12. Является ли гауссовским процесс а) $\int_0^t f(s)dB_s$ б) $\int_0^t f(s)ds$ в) $\int_0^t f(s, B_s)ds$?
13. Найти распределение момента выхода броуновского движения на уровень A , $\tau = \inf\{t : B_t = A\}$. (Указание: найти преобразование Лапласа момента τ с помощью мартингала из задачи 5 и обратиться по таблицам).

Список литературы

- [1] Булинский А. В., Ширяев А. Н. *Теория случайных процессов*, Физматлит, 2003.
- [2] Musiela M., Rutkowski M. *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer, 2004.
- [3] Clewlow L., Strickland C. *Valuing Energy Options in a One Factor Model Fitted to Forward Prices*, SSRN: <http://ssrn.com/abstract=160608>, 1999.

- [4] Brigo D., Mercurio F. *Interest Rate Models: Theory and Practice*, Springer, 2001.
- [5] Ширяев А. Н., *Основы стохастической финансовой математики*, Фазис, 2004.
- [6] Glasserman P., *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, Springer, 2003.