Контрольная №1

1. Среди вершин выпуклого n-угольника случайно выбираются три. Найдите вероятность того, что эти вершины образуют треугольник со сторонами, не совпадающими со сторонами n-угольника.

2. В ящик, содержащий n шаров, опускают один черный и один белый шар. После чего наугад вынимают два шара. Найдите вероятность того, что среди вынутых шаров окажется один белый и один черный, если изначально в ящики лежат только черные и белые шары, а все возможные варианты первоначального цветового состава шаров равновероятны.

3. На семинар пришли n студентов-математиков. После семинара ни один из них не смог узнать свою собственную шляпу, и они взяли шляпы наугад. Далее, каждый из них с вероятностью p независимо от других мог потерять шляпу по дороге домой. Найдите вероятность того, что ни один студент не принес домой свою шляпу.

4. Лорд Вайл любит выпить виски, количество выпитого за день случайно: с вероятностью $1/4$ лорд не выпьет ни стакана, с вероятностью $2/5$ — ровно один стакан, иначе он выпьет больше одного стакана виски. Его жена Леди Вайл, его сын и дворецкий задумали убить лорда. Если он не пил виски в этот день, его должна была убить леди Вайл; если он выпил ровно один стакан, то убийство выпадало сыну лорда, в противном случае это должен был осуществить дворецкий. В два раза более вероятно, что леди Вайл прибегнет к отравлению, чем к удушению. Дворецкий, наоборот, выберет удушение с вероятностью в два раза большей, чем отравление, а сын лорда равновероятно выберет любой из этих способов. Впрочем, нет никакой гарантии, что лорд Вайл точно умрет, однако в три раза более вероятно, что он умрет от отравления, чем от удушения. Утром лорд Вайл мертв. Найдите условную вероятность того, что убийцей был дворецкий.

5. Случайная величина ξ имеет геометрическое распределение с параметром p : для любого $k \in \mathbb{N}$ выполнено $\mathsf{P}(\xi = k) = (1-p)^{k-1}p$. Найдите математическое ожидание и дисперсию ξ.

6. Четыре игрока играют в бридж колодой из 52 карт. Каждому из них сдают по 13 карт. Каждый игрок считает, что у него "хороший" расклад, если ему пришло два туза или туз и король одной масти. Случайная величина ξ — это число игроков, имеющих хороший расклад при случайной раздаче колоды. Найдите математическое ожидание и дисперсию ξ.

Контрольная №2

1. Случайная величина X имеет экспоненциальное распределение с параметром 1, случайная величина Y имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 5]$, причем X и Y независимы. Найдите вероятность того, что из отрезков, имеющих длины X, Y и 1 можно составить треугольник.

2. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы, причем ξ_1 имеет экспоненциальное распределение с параметром 2, а ξ_2 - гамма распределение с параметрами (1,2). Найдите плотность случайной величины $\xi_1 - \xi_2$.

3. Пусть (ξ, η) — координаты случайной точки, имеющей равномерное распределение в области $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x^3 + y \leq 1\}$. Найдите коэффициент корреляции $\rho(\xi, \eta)$.

4. Пусть последовательность случайных величин ξ_n сходится по распределению с константе C. Докажите, что в этом случае $\xi_n \xrightarrow{P} C$.

5. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые стандартные нормальные случайные величины. Найдите характеристическую функцию случайной величины $\eta = \xi_1 \xi_2$.

Типовые задачи к зачету

1. Дано множество S, состоящее из N элементов. X, Y, Z — независимые случайные подмножества S, получающиеся по следующему правилу: каждый элемент $s \in S$ с вероятностью p независимо от других принадлежит случайному подмножеству, а с вероятностью $1-p$ — не принадлежит. Найдите вероятность события

$$\left\{X \subseteq (Y \cap Z) \cup \overline{Y}\right\}.$$

2. По n ящикам случайно раскладывают k шаров. Найдите вероятность того, что все ящики непустые, если а) шары различимы, б) шары неразличимы.

3. В ящике лежит 20 теннисных мячей, в том числе 12 новых и 8 уже использовавшихся. Из ящика извлекают наугад три мяча для игры. После игры мячи возвращают обратно в ящик. После этого из ящика вынимают еще три мяча для игры. Известно, что среди вынутых во второй раз мячей, был по крайней мере один новый. Найдите условную вероятность того, что в первый раз тоже вынули по крайней мере один новый мяч.

4. Рассматривается множество $R_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Случайная величина ξ равна числу элементов множества R_n, которые остались на своих местах при случайной перестановке R_n. Найдите математическое ожидание и дисперсию ξ.

5. Пусть X, Y — две независимые экспоненциальные с параметром 1 случайные величины. Найдите вероятность того, что из отрезков, имеющих длины X, Y и 1 можно составить треугольник.

6. Пусть случайная величина ξ имеет стандартное нормальное распределение. Найдите $\mathsf{E}|\xi|^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

7. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$. Найти плотность случайной величины $\eta = \xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$.

8. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют экспоненциальное распределение с параметром 1. Будут ли случайные величины $\eta_1 = \xi_1/(\xi_1 + \xi_2)$ и $\eta_2 = \xi_1 + \xi_2$ независимыми?

9. Является ли характеристической функция $\varphi(t) = 1/(1 + t^4)$?