А.П.Шашкин

Слабая сходимость вероятностных мер

Москва, МГУ, кафедра теории вероятностей, 2013

Введение

Данное пособие подготовлено по метериалам спецкурса, читавшегося автором в 2011–2012 гг. для студентов 4 курса механико-математического факультета МГУ, специализирующихся по теории вероятностей. В нем даются базовые сведения о функциональных предельных теоремах для последовательностей независимых случайных величин. Изложение строится по возможности так, чтобы обойтись минимально требуемым количеством вспомогательных результатов, и в то же время познакомить читателя со средствами доказательства предельных теорем, оставляющими возможность обобщения на более сложные системы случайных величин. Параграфы, относящиеся к слабой сходимости в пространствах непрерывных функций и Скорохода, в основном следуют книге [1], а параграфы о сильном принципе инвариантности — книге [2] и статье [5].

Содержание

1 Меры на метрических пространствах, слабая сходимость мер.

Рассмотрим метрическое пространство (S, ρ), наделенное борелевской σ-алгеброй его подмножеств $\mathcal{B}(S)$, т.е. наименьшей σ-алгеброй, содержащей все открытые множества. Напомним, что функция $\mathsf{P} : \mathcal{B}(S) \to \mathbb{R}_+$ называется *вероятностной мерой*, если

1) $\mathsf{P}(S) = 1$,

2) P счетно-аддитивна, т.е. $\mathsf{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathsf{P}(A_i)$ для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $A_i \in \mathcal{B}(S)$, $i \in \mathbb{N}$.

Теорема 1.1 (*свойство регулярности вероятностной меры*). *Для любого $\varepsilon > 0$ и каждого $A \in \mathcal{B}(S)$ существуют такие открытое множество $G \subset S$ и замкнутое $F \subset S$, что $F \subset A \subset G$ и $\mathsf{P}(G \setminus F) < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть сначала A замкнуто. Тогда можно взять $F = A$. Далее, множества $A^{(1/n)}$ открыты и образуют вложенную последовательность, причем $\cap_{n=1}^{\infty} A^{(1/n)} = A$. Следовательно, $\mathsf{P}(A^{(1/n)}) \to \mathsf{P}(A)$, $n \to \infty$, и можно найти такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что $\mathsf{P}(A^{(1/n)}) < \mathsf{P}(A) + \varepsilon$.

Пусть $\mathcal{R}$ — класс множеств A, обладающих описанным в условии теоремы свойством. Очевидно, $S \in \mathcal{R}$. Пусть $A \in \mathcal{R}$; по заданному $\varepsilon > 0$ выберем замкнутое F и открытое G из утверждения теоремы. Тогда $\overline{G} \subset \overline{A} \subseteq \overline{F}$ и $\mathsf{P}(\overline{F} \setminus \overline{G}) < \varepsilon$, причем $\overline{F}$ открыто, а $\overline{G}$ замкнуто. Поэтому $\overline{A} \in \mathcal{R}$. Далее, пусть $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{R}$, $A := \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ и $\varepsilon > 0$. Для каждого $n \in \mathbb{N}$ подберем замкнутое F_n и открытое G_n так, чтобы $F_n \subset A_n \subset G_n$ и $\mathsf{P}(G_n \setminus F_n) < \varepsilon/2^{n+1}$. Положим $G := \cup_{n=1}^{\infty} G_n$ и $F := \cup_{n \le n_0} F_n$, где n_0 выбрано так, чтобы $\mathsf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus \cup_{n \le n_0} F_n) < \varepsilon/2$ (ввиду непрерывности меры это можно сделать). Тогда F замкнуто, G открыто, $F \subset A \subset G$ и

$$\mathsf{P}(G \setminus F) \le \frac{\varepsilon}{2} + \mathsf{P}(\cup_{n=1}^{\infty} G_n \setminus \cup_{n=1}^{\infty} F_n) \le \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathsf{P}(G_n \setminus F_n) \le \varepsilon,$$

так что $A \in \mathcal{R}$.

Итак, $\mathcal{R}$ — сигма-алгебра, содержащая все замкнутые множества. Поэтому она содержит $\mathcal{B}(S)$. $\square$

Напомним, что класс $\mathcal{C}$ множеств, содержащихся в S, называется *π-системой*, если он замкнут относительно конечных пересечений и $S \in \mathcal{S}$. Класс $\mathcal{M}$ называется *μ-системой* или *монотонным классом*, если

1) $S \in \mathcal{M}$,

2) если $A, B \in \mathcal{M}$ и $A \subseteq B$, то $B \setminus A \in \mathcal{M}$;

3) если $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ и $A_i \subseteq A_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$, то $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$.

Многие свойства мер удобнее проверять для множеств, образующих монотонные классы, и сложно — для элементов сигма-алгебр. Поэтому важную роль играет

Лемма 1.2 (*лемма о монотонных классах*). *Пусть $\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$, где $\mathcal{C}$ — π-система, а $\mathcal{M}$ — монотонный класс. Тогда $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{M}$.*

Доказательство. Можно сразу считать, что $\mathcal{M}$ — наименьший монотонный класс, содержащий $\mathcal{C}$ (такой класс получается пересечением всех монотонных классов, содержащих $\mathcal{C}$). Тогда достаточно доказать его замкнутость относительно конечных пересечений. В самом деле, тогда $\mathcal{M}$ замкнуто и относительно конечных объединений; далее, для любых $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{M}$ имеем

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \cup_{n=1} \left(A_n \cap_{i=1}^{n-1} \overline{A_i} \right) \in \mathcal{M},$$

(здесь $\cap_{i=1}^{0} A_i = \varnothing$), т.е. $\mathcal{M}$ оказывается сигма-алгеброй.

Итак, пусть $B \in \mathcal{C}$. Положим $\mathcal{M}_B = \{A \subset S : AB \in \mathcal{M}\}$. Это — монотонный класс множеств, содержащий $\mathcal{C}$ и, следовательно, $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_B$. Теперь пусть $A \in \mathcal{M}$. Положим $\mathcal{M}_A = \{B \subset S : AB \in \mathcal{M}\}$. В силу того же рассуждения $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_A$. $\square$

Лемма 1.2 применяется обычно следующим образом. Проверяется, что для некоторой π-системы $\mathcal{C}$, порождающей $\mathcal{B}(S)$, выполняется некоторое свойство, и что все множества, обладающие этим свойством, образуют монотонный класс. Тогда данное свойство выполняется для всех борелевских множеств в S.

Теорема 1.3 *Пусть P, Q — две вероятностные меры на (S, ρ), причем для любой ограниченной и равномерно непрерывной функции $f : S \to \mathbb{R}$ справедливо равенство $\int_S f dP = \int_S f dQ$. Тогда $P = Q$.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что $P(F) = Q(F)$ для любого замкнутого $F \in \mathcal{B}(S)$, а затем применить лемму о монотонных классах. Положим $f_n(x) = \varphi(n\rho(x, F))$, где $x \in S$, $n \in \mathbb{N}$ и функция $\varphi(y) = \max\{0, 1 - y^+\}$, $y \in \mathbb{R}$. Тогда функции f_n ограниченны и равномерно непрерывны, причем $f_n(x) \to I_F(x)$ для каждого $x \in S$. Поэтому в силу теоремы о мажорированной сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n(x) P(dx) = P(F) = \lim_{n\to\infty} \int_S f_n(x) Q(dx) = Q(F).$$

$\square$

Далее $C_b(S)$ — пространство непрерывных и ограниченных на пространстве S вещественнозначных функций.

Определение 1.4 Последовательность вероятностных мер $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ *слабо сходится* к вероятностной мере P, если для любой функции $\int_S f dP_n \to \int_S f dP$, при $n \to \infty$.

Теорема 1.5 (*теорема Александрова*). *Пусть P и $\{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ — вероятностные меры. Следующие пять условий эквивалентны:*

1) *P_n слабо сходятся к мере P.*

2) *$\int_S f dP_n \to \int_S f dP$, при $n \to \infty$, для любой ограниченной и равномерно непрерывной функции $f : S \to \mathbb{R}$.*

3) *для каждого замкнутого множества $F \in \mathcal{B}(S)$ справедливо соотношение*

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \le P(F).$$

4) *для каждого открытого множества $G \in \mathcal{B}(S)$ справедливо соотношение*

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \ge P(G).$$

5) *для любого множества $A \in \mathcal{B}(S)$, для которого $P(\partial A) = 0$, справедливо соотношение $\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A)$.*

Доказательство. Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна. Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 3). Пусть множество F замкнуто и последовательность функций f_k, $k \in \mathbb{N}$, введена в доказательстве теоремы 1.3. Зададим произвольное $\delta > 0$ и рассмотрим такое k, чтобы $P(F^{(1/k)} \setminus F) < \delta$. Так как функция f_k равна нулю вне множества $F^{(1/k)}$, и при этом $I_F \le f_k$, то

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \le \limsup_{n\to\infty} \int_S f_k dP_n = \int_S f_k dP \le P(F) + \delta.$$

Утверждение следует теперь из произвольности выбора δ.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 1). Применяя линейное преобразование, можно сразу ограничиться случаем, когда f принимает значения в интервале $(0, 1)$. Для произвольного $k \in \mathbb{N}$ имеем

$$\int_S f dP_n \le \sum_{i=1}^{k} \frac{i}{k} P_n \left\{ \frac{i-1}{k} \le f(x) < \frac{i}{k} \right\} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{i} P_n \left\{ \frac{i-1}{k} \le f(x) < \frac{i}{k} \right\} =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=j}^{k} P_n \left\{ \frac{i-1}{k} \le f(x) < \frac{i}{k} \right\} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} P_n \left\{ \frac{j-1}{k} \le f(x) \right\}.$$

Множества, от которых берется мера в последнем выражении, замкнуты, поэтому

$$\limsup_{n\to\infty} \int_S f dP_n \le \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} P \left\{ \frac{j-1}{k} \le f(x) \right\}.$$

Аналогично

$$\int_S f dP \ge \sum_{i=1}^{k} \frac{i-1}{k} P_n \left\{ \frac{i-1}{k} \le f(x) < \frac{i}{k} \right\} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} P_n \left\{ \frac{j-1}{k} \le f(x) \right\} - \frac{1}{k},$$

так что утверждение следует из произвольности выбора k.

Импликации 3) $\Leftrightarrow$ 4) легко доказываются с учетом того, что дополнение к замкнутому множеству открыто.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 5). Пусть $A \in \mathcal{B}(S)$ таково, как в условии пункта 5), и $B = A \setminus \partial A$ — внутренность A, а $C = A \cup \partial A$ — его замыкание. Тогда в силу свойств 3) и 4) имеем

$$P(C) \ge \limsup_{n\to\infty} P_n(C) \ge \limsup_{n\to\infty} P_n(A) \ge \liminf_{n\to\infty} P_n(A) \ge \liminf_{n\to\infty} P_n(B) \ge P(B).$$

Крайние слева и справа выражения в этой оценке равны (и равны $P(A)$), поэтому этому же числу равны верхний и нижний пределы последовательности $\{P_n(A)\}$.

Импликация 5) $\Rightarrow$ 3). Пусть множество F замкнуто. Множества $\{\partial F^{(\delta)}, \delta > 0\}$ при различных $\delta > 0$ попарно не пересекаются. Поэтому можно выбрать такую последовательность $\delta_k \to 0$, что $P(\partial F^{(\delta_k)}) = 0$. Для произвольного $\varepsilon > 0$ возьмем такое $k \in \mathbb{N}$, что $P(F^{(\delta_k)}) < P(F) + \varepsilon$. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} P_n(F) \le \limsup_{n\to\infty} P_n(F^{(\delta)}) = \lim_{n\to\infty} P_n(F^{(\delta)}) = P(F^{(\delta)}) < P(F) + \delta,$$

откуда и вытекает утверждение. $\square$

2 Случайные элементы, теорема Прохорова.

Пусть имеется вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$. Напомним, что случайным элементом со значениями в пространстве S называется такое отображение $X : \Omega \to S$, что для любого $B \in \mathcal{B}(S)$ прообраз $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Определение 2.1 *Распределением* случайного элемента X называется мера P_X на (S, ρ), определяемая соотношением

$$P_X(B) = P(X \in B),\ B \in \mathcal{B}(S).$$

Говорят, что случайные элементы X_n сходятся по распределению к случайному элементу X (при этом они могут быть заданы на различных вероятностных пространствах), если имеет место слабая сходимость $P_{X_n} \to P_X$, $n \to \infty$. Теорема 1.5 легко может быть переформулирована в терминах сходимости по распределению.

Теорема 2.2 (*о наследовании*). *Пусть $X_n \to X$ по распределению, когда $n \to \infty$, и множество B точек разрыва борелевской функции $g : S \to \mathbb{R}$ принадлежит $\mathcal{B}(S)$, причем $P_X(B) = 0$. Тогда $g(X_n) \to g(X)$ по распределению, $n \to \infty$.*

Доказательство. Пусть $F \in \mathcal{B}(S)$ замкнуто. Задача состоит в проверке соотношения

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(X_n \in g^{-1}(F)) \le \mathsf{P}(X \in g^{-1}(F)).$$

Обозначая D замыкание множества $g^{-1}(F)$, имеем

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(X_n \in g^{-1}(F)) \le \limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(X_n \in D) \le \mathsf{P}(X \in D)$$

в силу теоремы 1.5. Пусть $x \in D \setminus g^{-1}(F)$. Тогда можно выбрать последовательность точек $x_m \in g^{-1}(F)$, сходящуюся к x. Предположим, что g непрерывна в x. Так как F замкнуто, то это означает, что $g(x_m) \to g(x) \in F$. Но тогда $x \in g^{-1}(F)$. Данное противоречие показывает, что $D \setminus g^{-1}(F) \subset B$, так что $\mathsf{P}(X \in D) = \mathsf{P}(X \in g^{-1}(F))$. $\square$

Следствие 2.3 (*теорема Слуцкого*). *Пусть $X_n \to X$ по распределению, когда $n \to \infty$, и пусть последовательность случайных элементов Y_n со значениями в метрическом пространстве $(\widetilde{S}, \widetilde{\rho})$ сходится по вероятности к $a \in \widetilde{S}$. Тогда, если функция $f : S \times \widetilde{S} \to \mathbb{R}$ непрерывна, то $f(X_n, Y_n) \to f(X, a)$ по распределению, когда $n \to \infty$.*

Доказательство. Согласно теореме 2.2 достаточно проверить, что $(X_n, Y_n) \to (X, a)$ по распределению при $n \to \infty$ (это случайные элементы в прямом произведении пространств S и $\widetilde{S}$ с соответствующей метрикой). Пусть $\varphi : S \times \widetilde{S} \to \mathbb{R}$ — ограниченная и равномерно непрерывная функция. Пользуясь теоремой 1.5, видим, что достаточно доказать соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}\varphi(X_n, Y_n) = \mathsf{E}\varphi(X, a).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно и $\delta > 0$ выбрано так, что из соотношения $\widetilde{\rho}(y, y') < \delta$ следует, что $|\varphi(x, y) - \varphi(x, y')| < \varepsilon$, при любых $x \in S$ и $y, y' \in \widetilde{S}$. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}\varphi(X_n, Y_n) \le \limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}\varphi(X_n, a) + \limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}(\varphi(X_n, Y_n) - \mathsf{E}\varphi(X_n, a))$$

$$\le \mathsf{E}\varphi(X, a) + \varepsilon + \limsup_{n\to\infty} \mathsf{E}|\varphi(X_n, Y_n) - \varphi(X_n, a)| I\{|Y_n - a| \ge \delta\},$$

но последнее слагаемое равно нулю в силу сходимости по вероятности и ограниченности φ. Рассматривая теперь так же функцию $-\varphi$, получаем требуемое соотношение. $\square$

Определение 2.4 Пусть Π — семейство вероятностных мер на пространстве (S, ρ). Оно называется *плотным,* если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой компакт $K \subset S$, что для любой меры $P \in \Pi$ справедливо неравенство

$$P(S \setminus K) < \varepsilon.$$

Определение 2.5 Пусть Π — семейство вероятностных мер на пространстве (S, ρ). Оно называется *относительно компактным,* если из любой содержащейся в нем последовательности можно извлечь слабо сходящуюся подпоследовательность.

Проверка свойства плотности обычно проще, чем второго свойства. Поэтому важнейшую роль играет

Теорема 2.6 (*теорема Прохорова*). *Плотное семейство мер относительно компактно. Если пространство S польское, то верно обратное.*

Доказательство. Сначала докажем обратное утверждение. Проверим истинность следующего условия:

$$\text{для любых } \varepsilon, \delta > 0 \text{ существует конечный набор открытых шаров } A_1, \dots, A_n \text{ радиуса } \delta$$

$$\text{такой, что } \; P(\cup_{i=1}^n A_i) \ge 1 - \varepsilon \text{ для любой меры } P \in \Pi. \tag{2.1}$$

Действительно, отрицание условия (2.1) означает, что можно выбрать $\varepsilon, \delta > 0$ так, чтобы для любой последовательности шаров $A_1, A_2, \dots$ радиуса δ, любого $n \in \mathbb{N}$ и некоторой меры $P_n \in \mathbb{N}$ выполнялось соотношение

$$P_n(\cup_{i=1}^n A_i) \le 1 - \varepsilon.$$

Пусть центры шаров $A_1, A_2, \dots$ образуют счетное всюду плотное подмножество в S. По условию теоремы можно выделить такую подпоследовательность $\{P_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$, что $P_{n_k} \to Q$ по распределению при $k \to \infty$.

При каждом фиксированном $m \in \mathbb{N}$ в силу Теоремы 1.5 имеем

$$Q(\cup_{i=1}^m A_i) \le \liminf_{k\to\infty} P_{n_k}(\cup_{i=1}^m A_i) \le \liminf_{k\to\infty} P_{n_k}(\cup_{i=1}^{n_k} A_i) \le 1 - \varepsilon.$$

Следовательно, $Q(S) \le 1 - \varepsilon$, что противоречит сделанному предположению.

Зададим $\varepsilon > 0$. Пользуясь условием (2.1), для каждого $k \in \mathbb{N}$ выберем шары $A_{k,1}, \ldots, A_{k,n_k}$ так, чтобы

$$P(\cup_{i=1}^{n_k} A_{k,i}) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}$$

для любой $P \in \Pi$. Положим

$$K_0 := \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{n_k} A_{k,i}.$$

Тогда $P(S \setminus K_0) \le \varepsilon$, $P \in \Pi$, и множество K_0 предкомпактно (так как имеет k^{-1}-сеть размера n_k при каждом $k \in \mathbb{N}$). Взяв замыкание K_0, получаем требуемое утверждение.

Перейдем к доказательству прямого утверждения. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ найдем такой компакт $K_m \subset S$, что $P(K_m) \ge 1 - m^{-1}$, $P \in \Pi$. Положим $M := \cup_{m=1}^{\infty} K_m$. Так как меры $P \in \Pi$ сосредоточены на M, то далее можно рассматривать только пространство (M, ρ) и ограничения мер P на него. Мы будем обозначать эти ограничения так же, как и сами меры.

Напомним, что две метрики на общем метрическом пространстве называются эквивалентными, если сходимость в одной из них влечет сходимость и по другой. Открытые и замкнутые множества, борелевская сигма-алгебра, непрерывность функции, свойство относительной компактности не меняются при замене метрики на эквивалентную ей.

Будем считать, что метрика ρ принимает значения в множестве $[0, 1)$ (если это не так, перейдем к эквивалентной метрике $\rho(x, y)/(1+\rho(x, y))$; множества, компактные по метрике ρ, будут компактны и в этой новой метрике). Далее, множество M сигма-компактно и потому сепарабельно. Возьмем в нем счетное всюду плотное подмножество $\{s_j, j \in \mathbb{N}\}$. Введем метрику

$$d(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |\rho(x, s_j) - \rho(y, s_j)|, \ x, y \in M.$$

Лемма 2.7 *Метрики ρ и d эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $x_n \to x$ в метрике ρ. Тогда $|\rho(x_n, s_j) - \rho(x, s_j)| \to 0$ при каждом $j \in \mathbb{N}$. Так как указанный модуль не превосходит 2, то $d(x_n, x) \to 0$ ввиду теоремы о мажорированной сходимости. Обратно, пусть $d(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$. Тогда при каждом $j \in \mathbb{N}$ имеем $\rho(x_n, s_j) - \rho(x, s_j) \to 0$, $n \to \infty$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем такое $j \in \mathbb{N}$, что $\rho(x, s_j) < \varepsilon$. Тогда

$$\limsup_{n\to\infty} \rho(x_n, x) \le \limsup_{n\to\infty} (\rho(x_n, s_j) + \rho(s_j, x)) \le 2\varepsilon,$$

так что $\rho(x_n, x) \to 0$. $\square$

Лемма 2.8 *Метрическое пространство (M, d) предкомпактно.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем такое $n \in \mathbb{N}$, что $2^{-n} < \varepsilon$. В кубе $[0, 1]^n$, снабженном метрикой $\rho_\infty(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$, возьмем конечную ε-сеть $\{a_1, \ldots, a_L\}$. Для каждого $j \in \{1, \ldots, L\}$ найдем в M такое y_j, что

$$\rho_\infty(a_j, (\rho(y_j, s_1), \ldots, \rho(y_j, s_n))) \le \varepsilon,$$

а если такого не нашлось, то положим $y_j = s_1$. Множество $\{y_1, \dots, y_L\}$ образует в (M,d) (3ε)-сеть. Действительно, пусть $z \in M$. Тогда найдется такой номер $j \in \{1, \dots, L\}$, что $\max_{1 \le i \le n} |\rho(z, s_i) - \rho(y_j, s_i)| \le 2\varepsilon$. Но тогда

$$d(z, y_j) \le \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} |\rho(z, s_i) - \rho(y_j, s_i)| + \sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-i} \le 3\varepsilon.$$

□

Продолжим доказательство теоремы. Все меры $P \in \Pi$ можно продолжить на пространство (M', d), являющееся замыканием (M, d). Пространство $C(M', d)$ непрерывных функций на этом компактном пространстве — это банахово пространство, и сопряженное к нему пространство $C^*(M', d)$ состоит из всех зарядов конечной вариации, с нормой, равной полной вариации заряда. В частности, семейство Π содержится в единичном шаре пространства $C^*(M', d)$. По теореме Банаха-Алаоглу (см., напр., [3, с. 202]) из любого подмножества Π можно выделить такую последовательность мер $\{P_n, n \in \mathbb{N}, \}$ что

$$\int_{M'} f dP_n \to \int_{M'} f dQ,\ n \to \infty,$$

для любой непрерывной на M' функции f. Заметим, что отсюда еще не следует слабая сходимость мер P_n на (M, d), так как функция, непрерывная на множестве, необязательно продолжается до непрерывной функции на его замыкании. Тем не менее, Q — вероятностная мера на (M', d) (это вытекает из того, что можно взять $f \equiv 1$). При этом по теореме 1.5 для любого $m \in \mathbb{N}$

$$Q(K_m) \ge \limsup_{n\to\infty} P_n(K_m) \ge 1 - \frac{1}{m},$$

так что $Q(M) = Q(\cup_{m=1}^{\infty} K_m) = 1$, т.е. мера Q сосредоточена на M. Пусть множество $F \subset M$ замкнуто. Тогда оно замкнуто и в (M', d), и по теореме 1.5

$$Q(F) \ge \limsup_{n\to\infty} P_n(F).$$

По той же теореме Александрова это означает, что $P_n \to P$ в (M, d), а следовательно, и в (M, ρ).

Теперь распространим Q на все пространство S, полагая $Q(S \setminus M) = 0$. Тогда для любой функции $f \in C_b(S)$ имеем

$$\int_S f dP_n = \int_M f dP_n \to \int_M f P = \int_S f dP,\ n \to \infty,$$

что и требовалось. □

3 Сходимость распределений в $C[0,1]$.

Сегодня мы будем рассматривать случайные элементы в пространстве $C[0,1]$ с равномерной метрикой и их распределения. К ним применима вся изложенная ранее теория, включая теорему Прохорова (в обе стороны, т.к. $C[0,1]$ сепарабельно и полно). Заметим, что если Q — вероятностная мера на $\mathcal{B}(C[0,1])$, то существует и случайный элемент Y, распределение которого равно Q, причем, если нужно, его можно задать на расширении исходного вероятностного пространства. А именно, надо положить $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathsf{P}_1) = (C[0,1], \mathcal{B}(C[0,1]), Q)$ и $Y(\omega) = \omega$, а потом взять прямое произведение этого вероятностного пространства и исходного. Поэтому теорему Прохорова для нашего случая можно сформуировать так: из любой подпоследовательности некоторого семейства случайных элементов можно выбрать сходящуюся (по распределению) тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует компакт, в который каждый из случайных элементов семейства попадает с вероятностью, не меньшей $1 - \varepsilon$.

В классической теории случайных процессов мы рассматривали не случайные элементы в функциональном пространстве, а случайные процессы, траектории которых непрерывны. Оказывается, это одно и то же.

Теорема 3.1 *Сигма-алгебра, порождаемая в $C[0,1]$ цилиндрическими множествами, совпадает с борелевской $\mathcal{B}(C[0,1])$.*

Доказательство. Цилиндрические множества вида $\{x : x(t) \in A\}$, где A замкнуто и $t \in [0,1]$, являются замкнутыми по метрике в $C[0,1]$ и порождают цилиндрическую сигма-алгебру, так что включение слева направо доказано. Обратно: борелевская сигма-алгебра в польском пространстве порождается замкнутыми шарами, поэтому достаточно проверить, что цилиндрическая сигма-алгебра содержит все такие замкнутые шары. Шар — это множество функций

$$B = \{y : \sup_{t \in [0,1]} |x(t) - y(t)| \le a, \} \; a > 0, \; x \in C[0,1].$$

Пусть $\{t_1, t_2, ...\}$ — счетное всюду плотное подмножество отрезка, тогда $B = \bigcap_{j=1}^{\infty} \{y : |y(t_i) - x(t_i)| \le a, \; i = 1, \dots, j\}$, а каждое из множеств справа — конечномерное (цилиндр). $\square$

Класс конечномерных множеств замкнут относительно пересечений и, как только что показано, порождает $\mathcal{B}(C[0,1])$. Поэтому (лемма 1.2) если две вероятностные меры на $C[0,1]$ совпадают на этом классе, то они совпадают вообще. Применительно к случайным элементам это означает, что если конечномерные распределения двух случайных элементов в $C[0,1]$ совпадают (для любых $t_1, \dots, t_k \in [0,1]$ совпадают соответствующие две меры на $\mathbb{R}^k$), то распределения этих элементов одинаковы.

Пусть $t_1, \dots, t_k \in [0,1]$. Отображение $\pi_{t_1, \dots, t_k} : C[0,1] \to \mathbb{R}^k$, которое функции x ставит в соответствие вектор $(x(t_1), \dots, x(t_k))$, непрерывно. Поэтому по теореме 2.2, если случайные элементы X_n сходятся по распределению к X, то конечномерные распределения X_n сходятся к соответствующим конечномерным распределениям процесса X, т.е.

$$(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)) \to (X(t_1), \dots, X(t_k))$$

по распределению при $n \to \infty$. Обратное неверно: если положить

$$X_n(t) = (1 - |n(t - n^{-1})|)^+, \quad t \in [0,1],$$

то (неслучайная) последовательность $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ не стремится к нулю (максимум любого ее элемента равен 1), но конечномерные распределения сходятся к конечномерным распределениям тождественного нуля. Тем не менее, верна

Теорема 3.2 *Пусть последовательность случайных элементов* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *в* $C[0,1]$ *плотна, а конечномерные распределения ее сходятся при* $n \to \infty$ *к конечномерным распределениям случайного элемента* X. *Тогда* $X_n \to X$, $n \to \infty$, *по распределению.*

Доказательство. Пусть утверждение неверно, тогда найдутся непрерывное ограниченное отображение $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$, число $\varepsilon > 0$ и последовательность натуральных чисел $n_k \to \infty$ при $k \to \infty$, такие, что

$$|\mathsf{E}\varphi(X_{n_k}) - \mathsf{E}\varphi(X)| > \varepsilon \tag{3.1}$$

для всех $k \in \mathbb{N}$. Пользуясь теоремой Прохорова (теорема 2.6), выберем из последовательности $\{X_{n_k}, k \in \mathbb{N}\}$ сходящуюся по распределению (точнее, из последовательности распределений выберем слабо сходящуюся, а затем по предельной мере построим случайный элемент, см. пояснение в самом начале лекции). Пусть $X_{n_{k_l}} \to Y$, $l \to \infty$. Тогда конечномерные распределения процессов $X_{n_{k_l}}$ сходятся и к конечномерным распределениям X (по условию), и к конечномерным распределениям Y. Но это значит, что распределения X и Y совпадают. Поэтому

$$\mathsf{E}\varphi(X_{n_{k_l}}) \to \mathsf{E}\varphi(Y) = \mathsf{E}\varphi(X),$$

что противоречит (3.1). $\square$

Итак, доказательство сходимости последовательности случайных процессов можно разбить на проверку сходимости конечномерных распределений и доказательство плотности. На практике проще проверять не собственно плотность, а одно из ее достаточных условий.

Напомним, что модуль непрерывности функции $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ — это функция

$$w_x(\delta) = \sup_{s,t\in[0,1]:|s-t|\le\delta} |x(s) - x(t)|, \quad \delta \in [0,1].$$

Теорема Кантора утверждает, что непрерывная на отрезке функция равномерно непрерывна; таким образом, $x \in C[0,1]$ тогда и только тогда, когда $w_x(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Заметим, что модуль непрерывности есть неубывающая по δ функция. То же касается верхней грани модулей непрерывности некоторого множества функций.

Напомним классический результат из функционального анализа (см., например, [3, с. 110]), обобщающий теорему Кантора.

Теорема 3.3 (*теорема Арцела-Асколи*)[1]. *Множество* $A \subset C[0,1]$ *предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено (по норме) и равностепенно непрерывно, т.е.*

$$\lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in A} w_x(\delta) = 0.$$

Вместо ограниченности самого A *можно требовать ограниченности множества* $\{x(0) : x \in A\} \subset \mathbb{R}$.

С помощью этой теоремы доказывается

[1] Арцела — ударение на последнем слоге, поэтому не склоняется.

Теорема 3.4 *Пусть* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность случайных элементов в* $C[0,1]$. *Она плотна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $a > 0$ *такое, что для каждого* $n \in \mathbb{N}$ *имеем* $\mathsf{P}(|X_n(0)| > a) \le \varepsilon$;

2) *для любого* $\tau > 0$ *имеем*

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}(w_{X_n}(\delta) \ge \tau) = 0.$$

Доказательство. Пусть последовательность плотна. Тогда для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем компакт K так, что для всех n $\mathsf{P}(X_n \notin K) \le \varepsilon$. Найдем такое a, что $\|x\| \le a$ для всех $x \in K$. Тогда условие 1) выполнено. По теореме Арцела-Асколи для $\tau > 0$ мы можем взять такое $\delta > 0$, что для всех $x \in K$ выполняется оценка $w_x(\delta) < \tau$. Но тогда $\sup_n \mathsf{P}(w_{X_n}(\mu) \ge \tau) \le \varepsilon$ для всех $\mu \in (0, \delta]$. Так как $\varepsilon > 0$ было выбрано произвольно, то это может быть только при выполнении условия 2).

Обратно, докажем достаточность двух условий. Пусть $\varepsilon > 0$. Выберем $a > 0$ так, чтобы для каждого $n \in \mathbb{N}$ было $\mathsf{P}(|X_n(0)| > a) \le \varepsilon/2$, и положим $A := \{x \in C[0,1] : |x(0)| \le a\}$. Теперь для каждого $k \in \mathbb{N}$ подберем такие $\delta_k > 0$ и $n_0(k)$, что при всех $n > n_0(k)$ верна оценка

$$\mathsf{P}(w_{X_n}(\delta_k) \ge 1/k) \le \varepsilon/2^{k+1}. \tag{3.2}$$

Семейство случайных элементов $\{X_1, X_2, \ldots, X_{n_0(k)}\}$ плотно (так как оно конечно, см. замечание в лекции 2). Поэтому, пользуясь уже доказанной необходимостью условий 1) и 2), можно уменьшить δ_k настолько, чтобы (3.2) выполнялось и при $n \le n_0(k)$ тоже. Положим

$$A_k = \left\{x \in C[0,1] : w_x(\delta_k) \le \frac{1}{k}\right\}.$$

Множество $K := A \cap \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right)$ предкомпактно (в силу той же теоремы Арцела-Асколи), и для каждого $n \in \mathbb{N}$ $\mathsf{P}(X_n \notin K) \le \varepsilon$. $\square$

Бывает полезно еще пользоваться более простым достаточным условием плотности.

Теорема 3.5 *Пусть* $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ *— последовательность случайных элементов в* $C[0,1]$, *причем выполнено условие* 1) *из предыдущей теоремы и условие*

$2'$) *для любого* $\tau > 0$ *имеем*

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]} \frac{1}{\delta}\mathsf{P}\left(\sup_{s\in[t,t+\delta],\ s\le 1} |X_n(s) - X_n(t)| \ge \tau\right) = 0.$$

Тогда эта последовательность плотна.

Доказательство. Зададим $\tau > 0$. Проверим, что выполняется условие 2) теоремы 3.4. Для фиксированного δ отметим на отрезке $[0,1]$ точки $t_j = j\delta$, $j = 0, 1, \ldots, [1/\delta]$. Заметим, что если модуль непрерывности некоторой функции $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ больше числа $\varepsilon > 0$, то найдется такое j, что

$$\sup_{s\in[t_j, t_j+2\delta], s\le 1} |x(s) - x(t_j)| > \frac{\varepsilon}{3}.$$

Чтобы его найти, достаточно взять ближайшую слева к отрезку $[s,t]$, на котором достигается максимум, точку разметки.

Итак, имеем

$$\mathsf{P}(w_{X_n}(\delta)\ge\tau)\le\mathsf{P}\left(\max_{j:0\le j\le 1/\delta}\ \sup_{s\in[t_j,t_j+2\delta],\,s\le 1}|X_n(t_j)-X_n(s)|\ge\tau/3\right)\le$$

$$\le\sum_{j=0}^{[1/\delta]}\mathsf{P}\left(\sup_{s\in[t_j,t_j+2\delta],\,s\le 1}|X_n(t_j)-X_n(s)|\ge\tau/3\right)\le\frac{2}{\delta}\sup_{t\in[0,1]}\mathsf{P}\left(\sup_{s\in[t,t+2\delta],\,s\le 1}|X_n(t)-X_n(s)|\ge\tau/3\right).$$

Остается взять верхний предел по $n\to\infty$, а потом предел по $\delta\to 0$.

4 Принцип инвариантности Донскера-Прохорова.

Теорема 4.1 (*принцип инвариантности Донскера-Прохорова*). *Пусть $X_1,X_2,\dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathsf{E}X_1=0$ и $\mathsf{D}X_1=1$. Положим $S_0=0$ и $S_n=X_1+\ldots+X_n$, $n\in\mathbb{N}$. Рассмотрим случайные процессы W_n, $n\in\mathbb{N}$, полагая*

$$W_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}S_{[nt]}+(nt-[nt])\frac{X_{[nt]+1}}{\sqrt{n}},\ t\in[0,1],\ n\in\mathbb{N},$$

где $[z]$ есть целая часть $z\in\mathbb{R}$. Процессы $\{W_n,n\in\mathbb{N}\}$ сходятся по распределению при $n\to\infty$ к винеровскому процессу $W=\{W(t),t\in[0,1]\}$.

Доказательство. Согласно теореме 3.2, следует проверить сходимость конечномерных распределений и плотность. Заметим, что для любого $t\in[0,1]$ имеем

$$|W_n(t)-\frac{S_{[nt]}}{\sqrt{n}}|\le\frac{|X_{[nt]+1}|}{\sqrt{n}}\to 0,\ \ ,n\to\infty,$$

в среднем квадратическом. Поэтому для проверки сходимости конечномерных распределений по теореме 2.3 можно убедиться, что для любых $t_1,t_2,\dots,t_k\in[0,1]$

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_{[nt_1]},S_{[nt_2]},\dots,S_{[nt_k]})\to(W(t_1),\dots,W(t_k)),\ n\to\infty$$

по распределению. Можно считать, что $t_1<\ldots<t_k$. Применим к рассматриваемым случайным векторам невырожденное линейное преобразование с матрицей, содержащей единицы на главной диагонали, минус единицы на диагонали под главной и нули в остальных местах. Тогда задача сводится к проверке того, что

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(S_{[nt_1]},S_{[nt_2]}-S_{[nt_1]},\dots,S_{[nt_k]}-S_{[nt_{k-1}]})\to(W(t_1),\dots,W(t_k)-W(t_{k-1})),\ n\to\infty.$$

Компоненты левой части взаимно независимы, и при $n\to\infty$ согласно центральной предельной теореме

$$\frac{S_{[nt_j]}-S_{[nt_{j-1}]}}{\sqrt{n}}\to N(0,t_j-t_{j-1}),\ 1\le j\le k,\ n\to\infty,$$

(здесь $t_0 := 0$). Пользуясь характеристическими функциями (см., напр., [4, гл. 2, §12; гл. 3, §3]), получаем, что левая часть сходится по распределению к гауссовскому случайному вектору с нулевым средним и матрицей ковариаций $diag(t_1, t_2 - t_1, \ldots, t_k - t_{k-1})$; но такое же распределение у вектора, стоящего в правой части.

Доказательству плотности семейства $\{W_n\}$ предпошлем следующую лемму.

Лемма 4.2 *Пусть $Y_0 = 0, Y_1, \ldots, Y_n$ — квадратично-интегрируемый мартингал. Тогда для любого $x > 0$ верна оценка*

$$\mathsf{P}(\max_{1\le k\le n} Y_k \ge x) \le \frac{2}{x}\sqrt{\mathsf{P}(Y_n \ge x)\mathsf{D}Y_n}.$$

Доказательство. Пусть τ равно минимальному $k \in \{1, \ldots, n\}$, для которого $Y_k \ge x$, и $\tau = n$, если такого значения k не нашлось. По теореме Дуба

$$\mathsf{E}Y_n = \mathsf{E}Y_\tau \ge x\mathsf{P}(Y_\tau \ge x) + \mathsf{E}Y_n I\{Y_n < x\},$$

так что

$$x\mathsf{P}(\max_{1\le k\le n} Y_k \ge x) \le \mathsf{E}Y_n I\{\max_{1\le k\le n} Y_k \ge x\}.$$

С учетом этого

$$x\mathsf{P}(\max_{1\le k\le n} Y_k \ge x) \le \mathsf{E}Y_n I\{Y_n \ge x/2\} + \mathsf{E}Y_n I\{Y_n < x/2, \max_{1\le k\le n} Y_k \ge x\} \le$$

$$\le \mathsf{E}Y_n I\{Y_n \ge x/2\} + \frac{x}{2}\mathsf{P}\{\max_{1\le k\le n} Y_k \ge x\}.$$

Таким образом,

$$\frac{x}{2}\mathsf{P}\{\max_{1\le k\le n} Y_k \ge x\} \le \mathsf{E}Y_n I\{Y_n \ge x/2\},$$

и остается применить неравенство Коши-Буняковского-Шварца. □

Продолжим доказательство теоремы. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$. Нужно оценить

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\delta} \sup_{t\in[0,1]} \mathsf{P}(\sup_{u\in[t,t+\delta]} |W_n(u) - W_n(t)| > \varepsilon) =: A(\delta, \varepsilon).$$

Можно считать, что $n > \delta^{-1}$. Тогда для любого t отрезок $[t, t+\delta]$ содержится в отрезке вида $[k/n, l/n]$, причем длина последнего отрезка составляет не более 3δ. Следовательно, применяя лемму 4.2 (сначала к последовательности частных сумм независимых случайных величин, а затем к ней же со знаком минус), имеем

$$A(\delta, \varepsilon) \le \frac{1}{\delta}\limsup_{n\to\infty} \mathsf{P}\left(\max_{1\le m\le 3\delta n} |X_1 + \ldots + X_m| > \varepsilon\sqrt{n}\right) \le \limsup_{n\to\infty} \frac{4}{\delta\varepsilon\sqrt{n}}\sqrt{n\mathsf{P}\left(|S_{[n\delta]+1}| \ge \varepsilon\sqrt{n}\right)} \le$$

$$\le \limsup_{n\to\infty} \frac{4}{\delta\varepsilon}\sqrt{\mathsf{P}\left(|\frac{S_{[n\delta]+1}}{\sqrt{[n\delta]+1}}| \ge \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sqrt{[n\delta]+1}}\right)} = \frac{4}{\varepsilon\delta\sqrt{2\pi}}\left(2\int_{\varepsilon\delta^{-1/2}}^{\infty} e^{-z^2/2}dz\right)^{1/2},$$

где последнее равенство следует из центральной предельной теоремы. Следовательно, $\lim_{\delta\to 0} A(\delta, \varepsilon) = 0$, что и завершает доказательство теоремы. □

Теорема Донскера-Прохорова, или *функциональная центральная предельная теорема*, позволяет с помощью теоремы о наследовании (теорема 2.2) получить множество предельных теорем для функционалов от процесса случайных ломаных, например, такую:

Следствие 4.3 *Пусть* $X_1, X_2, \ldots$ *— независимые одинаково распределенные случайные величины, причем* $\mathsf{E}X_1 = 0$ *и* $\mathsf{D}X_1 = 1$. *Положим* $S_0 = 0$ *и* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$, *а также* $M_n = \max_{k \le n} S_k$, $n \in \mathbb{N}$. *Тогда* $M_n/\sqrt{n} \to |Z|$ *по распределению при* $n \to \infty$, *где* $Z \sim N(0,1)$.

Доказательство. Сначала пусть случайные величины X_i имеют распределение $\mathsf{P}(X_i = 1) = \mathsf{P}(X_i = -1) = 1/2$. Тогда для любых $a \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\mathsf{P}(M_n \ge a) = \mathsf{P}(S_n \ge a) + \mathsf{P}(S_n < a, M_n \ge a) = 2\mathsf{P}(S_n > a) + \mathsf{P}(S_n = a),$$

которое проверяется с помощью симметричного отражения (см., например, [4, гл. 1, §10]). Заменяя a на $a\sqrt{n}$ и применяя центральную предельную теорему, получаем требуемое утверждение.

Теперь пусть распределение X_i — произвольное, удовлетворяющее условию следствия. Так как распределение $M_n/\sqrt{n}$ совпадает с распределением $\max_{t\in[0,1]} W_n(t)$, где процессы W_n введены в формулировке теоремы Донскера-Прохорова, то в силу теоремы о наследовании и того, что отображение $x \mapsto \max_{t\in[0,1]} x(t)$ непрерывно на $C[0,1]$, имеет место сходимость $M_n/\sqrt{n} \to \max_{t\in[0,1]} W(t)$ по распределению, $n \to \infty$. Но тогда из уже разобранного случая вытекает, что последняя случайная величина распределена как $|Z|$. $\square$

5 Геометрия пространства Скорохода.

Определение 5.1 *Пространство Скорохода* $D = D[0,1]$ — это пространство функций $x : [0,1] \to \mathbb{R}$, которые непрерывны справа и в каждой точке имеют предел слева.

Назовем *разбиением* T отрезка $[0,1]$ произвольный набор точек $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_r = 1$. Число ненулевых точек в таком разбиении T будем обозначать $r(T)$. *Шириной* $b(T)$ разбиения T будем называть число $\min_{1\le i\le r(T)}(t_i - t_{i-1})$.

Определение 5.2 *Модуль частичной непрерывности* функции $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ — это зависящее от $\delta \in (0,1)$ число

$$w'_x(\delta) = \inf_{T: b(T) > \delta} \max_{1 \le i \le r(T)} w_x[t_{i-1}, t_i),$$

где $w_x(B) = \sup_{s,t\in B} |x(s) - x(t)|$, $B \in \mathcal{B}([0,1])$.

Лемма 5.3 $w'_x(\delta) \to 0$ *при* $\delta \to 0$ *тогда и только тогда, когда* $x \in D[0,1]$.

Доказательство. Пусть $w'_x(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Допустим, что в некоторой точке $t \in (0,1]$ у функции x нет предела слева. Тогда существует такое $a > 0$, что $\limsup_{s\nearrow t} x(s) > \liminf_{s\nearrow t} x(s) + a$. Выберем $\delta > 0$ так, что $w'_x(\delta) < a/3$. Тогда существует разбиение T ширины больше δ, для которого на каждом полуинтервале $[t_{i-1}, t_i)$ значения функции x различаются менее чем на $a/2$. Точка t либо совпадает с одной из точек t_i, либо является внутренней точкой одного из интервалов. В обоих случаях разность верхнего и нижнего левых пределов в этой точке не может превышать $a/2$. Полученное противоречие означает, что x имеет пределы слева. Точно так же доказывается, что при $t \in [0, 1)$ x имеет предел справа, совпадающий с числом $x(t)$.

Обратное утверждение. Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и возьмем

$$\tau = \inf\{t > 0 : \text{ существует разбиение } T, \max_{1 \le i \le r(T)} w_x([t_{i-1}, t_i) \cap [0, t]) < \varepsilon\}.$$

Так как x непрерывна справа в нуле, то $|x(s) - x(0)| < \varepsilon$ для всех достаточно малых $s > 0$, а потому $\tau > 0$. Допустим, что $\tau < 1$. Выберем $\delta > 0$ настолько малым, чтобы $\delta + \tau < 1$, $w_x[\tau - \delta, \tau) < \varepsilon$ и $w_x[\tau, \tau + \delta) < \varepsilon$. Пусть $T = \{t_0, t_1, \ldots, t_r\}$ — разбиение, для которого

$$\max_{1 \le i \le r(T)} w_x([t_{i-1}, t_i) \cap [0, \tau - \delta]) < \varepsilon.$$

Добавим к этому разбиению точки $\tau - \delta$ и τ. Тогда мы получим, что в последней оценке можно заменить $\tau - \delta$ на $\tau + \delta$. Это противоречит выбору τ. Итак, всегда $\tau = 1$. Остается заметить, что функция $w'_x(\delta)$ монотонна по $\delta > 0$. $\square$

Пространство $D[0, 1]$ полно относительно равномерной метрики $\|\|_\infty$ (это доказывается так же, как полнота пространства $C[0, 1]$, т.е. непрерывность равномерного предела непрерывных функций). Однако по этой метрике оно не сепарабельно: функции $I\{[a, 1]\}$, $0 < a < 1$, удалены друг от друга на расстояние 1, и их множество несчетно. Поэтому в практических целях удобнее пользоваться другой метрикой.

Введем множество Λ гомеоморфизмов отрезка $[0, 1]$ на себя, полагая

$$\Lambda = \left\{ \lambda : [0, 1] \to [0, 1],\ \lambda(0) = 0, \lambda(1) = 1, \|\lambda\| := \sup_{t \ne s} \left| \ln \frac{\lambda t - \lambda s}{t - s} \right| < \infty \right\}$$

(здесь и далее $\lambda(t) = \lambda t$, $t \in [0, 1]$). Легко видеть, что Λ – группа (с операцией композиции гомеоморфизмов), причем $\|\lambda^{-1}\| = \|\lambda\|$ и $\|\lambda_1 \lambda_2\| \le \|\lambda_1\| + \|\lambda_2\|$.

Введем метрику d_0 на пространстве $D[0, 1]$, полагая

$$d_0(x, y) = \inf\{\varepsilon > 0 : \text{ существует } \lambda \in \Lambda, \text{ для которого } \|\lambda\| < \varepsilon \text{ и } \|x - y \circ \lambda\|_\infty < \varepsilon\}.$$

Лемма 5.4 *Пусть* $\lambda \in \Lambda$. *Тогда* $\sup_{t \in [0,1]} |\lambda t - t| \le e^{\|\lambda\|} - 1$. *Если к тому же* $\|\lambda\| < 1/2$, *то* $\sup_{t \in [0,1]} |\lambda t - t| \le 2\|\lambda\|$.

Доказательство.

$$|\ln \frac{\lambda t}{t}| \le \|\lambda\| \Rightarrow \frac{\lambda t}{t} \in (e^{-\|\lambda\|}, e^{\|\lambda\|}).$$

Следовательно,

$$\sup_{t \in [0,1]} |\lambda t - t| \le \sup_{t \in (0,1]} \left| \frac{\lambda t}{t} - 1 \right| \le \max\{e^{\|\lambda\|} - 1, 1 - e^{-\|\lambda\|}\} = e^{\|\lambda\|} - 1.$$

Остается заметить, что если $|x| \le 1/2$, то $e^x - 1 \le 2|x|$. $\square$

Теорема 5.5 *Пространство* (D, d_0) *полно.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна по метрике d_0. Тогда из нее можно выделить подпоследовательность $\{y_n, n \in \mathbb{N}\}$, для которой

$$d_0(y_n, y_{n+1}) < 2^{-n}.$$

Достаточно доказать, что эта подпоследовательность имеет предел (тогда предел исходной последовательности с ним совпадает).

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует такое $\mu_n \in \Lambda$, что $\|\mu_n\| < 2^{-n}$ и $\|y_n - y_{n+1} \circ \mu_n\|_\infty < 2^{-n}$.

В силу леммы 5.4 для любых $m, n \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$\sup_{t\in[0,1]} |\mu_{n+m+1}\mu_{n+m} \dots \mu_n t - \mu_{n+m} \dots \mu_n t| = \sup_{z\in[0,1]} |\mu_{n+m+1} z - z| \le 2^{-n-m+1}.$$

Следовательно, последовательность $\{\mu_{n+m} \dots \mu_n,\ m \in \mathbb{N}\}$ фундаментальна в $C[0,1]$. Обозначим ее предел λ_n. Тогда функция λ_n непрерывна, не убывает и оставляет на месте точки 0 и 1. Для любых различных $s, t \in [0,1]$

$$\left|\ln \frac{\lambda_n t - \lambda_n s}{t - s}\right| = \lim_{m\to\infty} \left|\ln \frac{\mu_{n+m} \dots \mu_n t - \mu_{n+m} \dots \mu_n s}{t-s}\right| \le$$

$$\le \limsup_{m\to\infty} \|\mu_{n+m} \dots \mu_n\| \le \limsup_{m\to\infty} (\|\mu_{n+m}\| + \ldots + \|\mu_n\|) \le 2^{2-n}.$$

При этом $\lambda_n = \lambda_{n+1}\mu_n$, так что

$$\sup_{t\in[0,1]} |y_n(\lambda_n^{-1} t) - y_{n+1}(\lambda_{n+1}^{-1} t)| = \sup_{t\in[0,1]} |y_n(\lambda_n^{-1} t) - y_{n+1}(\mu_n \lambda_n^{-1} t)| \le 2^{-n}.$$

Функции $y_n \circ \lambda_n^{-1}$, как отсюда следует, равномерно сходятся к некоторой функции $x \in D$; но это и означает, что $d_0(y_n, x) \to 0$.

Следующая теорема является аналогом теоремы Арцела-Асколи для пространства Скорохода.

Теорема 5.6 *Множество $A \subset D$ предкомпактно тогда и только тогда, когда оно ограничено и $\lim_{\delta\to 0} \sup_{x\in A} w'_x(\delta) = 0$.*

Доказательство. Докажем сначала достаточность данных условий предкомпактности. Так как множество A ограничено по метрике d_0, то $L := \sup_{x\in A} \sup_{t\in[0,1]} |x(t)| < \infty$. Зададим $\varepsilon > 0$ и найдем в $[-L, L]$ конечную ε-сеть H. Далее, пусть $k \in \mathbb{N}$ таково, что $k > \varepsilon^{-1} + 1$ и $w'_x(k^{-1}) < \varepsilon$, $x \in A$. Пусть $B \subset D$ — множество функций, постоянных на полуинтервалах вида $[(l-1)/k^2, l/k^2)$, и принимающих значения в H; тогда B конечно.

Возьмем функцию $x \in A$ и такое разбиение $T = \{t_0 < \ldots < t_r\}$ ширины, большей k^{-1}, что $w_x[t_{i-1}, t_i) < \varepsilon$. Найдем такие целые u_i, что

$$\frac{u_i}{k^2} \le t_i < \frac{u_i + 1}{k^2},\ 0 \le i < r.$$

Эти числа попарно различны (потому что отрезок длины $1/k^2$ не может содержать более одной точки вида q/k, $q \in \mathbb{Z}$). Поэтому можно построить функцию $\lambda \in \Lambda$, которая удовлетворяет соотношениям

$$\lambda \frac{u_i}{k^2} = t_i,\ 0 \le i < r,$$

и линейна на промежутках между соседними из этих точек. Оценим $\|\lambda\|$. Очевидно, экстремумы функции $(s,t) \to (\lambda t - \lambda s)/(t-s)$ достигаются, когда s,t имеют вид u_i/k^2, $0 \leq i \leq r$ (здесь $u_r := k^2$). Имеем

$$\left(\lambda \frac{u_i}{k^2} - \lambda \frac{u_{i+1}}{k^2}\right)\left(\frac{u_i}{k^2} - \frac{u_{i+1}}{k^2}\right)^{-1} = k^2 \frac{t_{i+1}-t_i}{u_{i+1}-u_i} \leq$$

$$\leq \frac{u_{i+1}-u_i+1}{u_{i+1}-u_i} \leq 1 + \frac{1}{k-1} < 1+\varepsilon,$$

где мы учли соотношения между точками t_i и u_i/k^2, а также то, что $u_{i+1}/k^2 - u_{i+1}/k^2 \geq t_{i+1} - t_i - k^{-2} \geq k^{-1} - k^{-2}$. Сходное рассуждение ведет к оценке

$$\left(\lambda \frac{u_i}{k^2} - \lambda \frac{u_{i+1}}{k^2}\right)\left(\frac{u_i}{k^2} - \frac{u_{i+1}}{k^2}\right)^{-1} = k^2 \frac{t_{i+1}-t_i}{u_{i+1}-u_i} \geq$$

$$\geq 1 - \frac{1}{k-1} \geq 1-\varepsilon.$$

Итак, $\|\lambda\| \leq \varepsilon - \ln(1-\varepsilon)$. По функции x найдем функцию $y \in B$ так, чтобы

$$|x(t_{i-1}) - y(\lambda^{-1}t_{i-1})| \leq \varepsilon,\ i = 1, \ldots, r.$$

Тогда в произвольной точке $t \in [t_{i-1}, t_i)$ справедливо неравенство

$$|x(t) - y(\lambda^{-1}t)| \leq \varepsilon + |x(t_{i-1}) - y(\lambda^{-1}t_{i-1})| \leq 2\varepsilon.$$

Итак, B является конечной $(3\varepsilon - \ln(1-\varepsilon))$ — сетью для множества A. Достаточность установлена.

Проверим необходимость условий. Можно сразу считать, что A замкнуто и потому компактно. Докажем, что для любых $x \in A, \delta > 0, \varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что для каждой функции y, принадлежащей η-окрестности точки x, выполняется неравенство

$$w'_y(\delta) < w'_x(\delta) + \varepsilon.$$

В самом деле, по определению величины $w'_x(\delta)$ можно найти такое разбиение $T = \{t_0 < \ldots < t_r = 1\}$, что $b(T) > \delta$ и

$$w_x[t_{i-1}, t_i) < w'_x(\delta) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Найдем такое положительное η, что

$$e^\eta - 1 < \frac{\varepsilon}{4},\ e^\eta - 1 < \frac{1}{2}\min_{1 \leq i \leq r}(t_i - t_{i-1} - \delta).$$

Пусть $d_0(x,y) < \eta$. Тогда есть $\lambda \in \Lambda$, для которой $\|\lambda\| < \eta$ и $\|x - y \circ \lambda\|_\infty < \lambda$. Положим $s_i = \lambda^{-1}t_i$, тогда $s_i - s_{i-1} > t_i - t_{i-1} - 2(e^\eta - 1) > \delta$ в силу леммы 5.4 и выбора η. Теперь, если $u, v \in [s_{i-1}, s_i)$, то

$$|y(u) - y(v)| \leq 2\eta + |x(\lambda^{-1}u) - x(\lambda^{-1}v)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} + w'_x(\delta).$$

Вспомогательное утверждение доказано.

Мы доказали, что при каждом $\varepsilon > 0$ множества $\{x \in D : w'_x(\delta) < \varepsilon,\ \delta > 0\}$ открыты. Так как они при этом вложены и образуют покрытие компакта A, то A содержится в одном из них, т.е. при некотором $\delta > 0$ $\sup_{x \in A} w'_x(\delta) < \varepsilon$. Для доказательства теоремы остается заметить, что компактное множество ограничено. $\square$

Теорема 5.7 *Пространство $D[0,1]$ сепарабельно.*

Доказательство. В качестве счетного множества, всюду плотного в $D[0,1]$, можно взять множество кусочно-постоянных функций с разрывами в конечном числе рациональных точек, принимающих рациональные значения. □

6 Случайные элементы в $D[0,1]$.

Цель данной лекции – построение для случайных процессов с траекториями, непрерывными справа и имеющими пределы слева, теории сходимости по распределению, аналогичной построенной ранее для процессов с непрерывными траекториями.

Теорема 6.1 *X — случайный элемент в пространстве (D, d_0) тогда и только тогда, когда $X = \{X(t), t \in [0,1]\}$ процессов с траекториями, непрерывными справа и имеющими пределы слева.*

Доказательство. Пусть X — случайный элемент в пространстве (D, d_0). Требуется доказать, что $X(t)$ — случайная величина, если $t \in [0,1]$. Отображение, ставящее функции $x \in D$ в соответствие ее значение $x(t)$, при $t < 1$ уже не является непрерывным, однако оно является борелевским. В самом деле, для любой $x \in D$

$$x(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_t^{t+\varepsilon} x(s)ds.$$

Пусть $d_0(x_n, x) \to 0$, $n \to \infty$, для некоторой последовательности $x_n, n \in \mathbb{N}$. Тогда в точках непрерывности x имеем $x_n(t) \to x(t)$ (так как композиция непрерывных функций непрерывна), и последовательность $\|x_n\|_\infty$ ограничена, поэтому сходимость $\int_t^{t+\varepsilon} x_n(s)ds \to \int_t^{t+\varepsilon} x(s)ds$ вытекает из теоремы о мажорированной сходимости. Непрерывность отображения $x \mapsto x(1)$ очевидна.

Докажем обратное утверждение. Достаточно проверить, что любой открытый шар $B_x(r) \subset D[0,1]$ с центром в точке x и радиусом r лежит в цилиндрической сигма-алгебре. Пусть $\{t_1, t_2, \dots\}$ — все рациональные числа отрезка $[0,1]$, $t_1 = 1$. Для $r > 0$ и $\varepsilon \in (0, r)$ введем множества

$$A_k(\varepsilon) = \{y : \text{ существует } \lambda \in \Lambda \text{ и } \max_{1 \le i \le k} |y(t_i) - x(\lambda t_i)| < r - \varepsilon\}.$$

Легко видеть, что $B_x(r) \subset \cup_{\varepsilon \in (0,r)} \cap_k A_k(\varepsilon)$. Обратно, пусть $y \in \cap_k A_k(\varepsilon)$. Тогда для каждого $k \in \mathbb{N}$ можно найти соответствующее $\lambda_k \in \Lambda$.

Рассмотрим $\{\lambda_k\}$ как последовательность функций распределения. Тогда из нее выделить подпоследовательность $\{\lambda_{k_l}\}$, сходящуюся к некоторой функции распределения λ ($\lambda(0) = 0$, $\lambda(1) = 1$) поточечно в точках непрерывности λ. Пусть $s, t \in [0,1]$ — такие точки непрерывности, тогда

$$\left| \ln \frac{\lambda t - \lambda s}{t - s} \right| = \lim_{l \to \infty} \left| \ln \frac{\lambda_{k_l} t - \lambda_{k_l} s}{t - s} \right| \le r - \varepsilon.$$

Следовательно, $\lambda \in \Lambda$ и $\|\lambda\| \le r - \varepsilon$. Но тогда для каждого $i \in \mathbb{N}$ имеем

$$\max\{|y(t_i) - x(\lambda t_i)|, |y(t_i) - \lim_{u \nearrow \lambda t_i} x(u)|\} \le r - \varepsilon.$$

Таким образом, $B_x(r) = \cup_{\varepsilon \in (0,r)} \cap_k A_k(\varepsilon)$, а каждое из множеств в правой части лежит в цилиндрической сигма-алгебре. $\square$

Доказательство следующей теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 3.4.

Теорема 6.2 *Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность случайных элементов в $D[0,1]$. Она плотна тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:*

1) *последовательность случайных величин $\{\|X_n\|_\infty\}$ плотна;*
2) *для любого $\tau > 0$ имеем*

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}(w'_{X_n}(\delta) \ge \tau) = 0.$$

Мы отдельно установим условия слабой сходимости распределений к процессу с непрерывными траекториями, так как далее нас будет интересовать именно этот случай.

Теорема 6.3 *Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность случайных элементов в $D[0,1]$, а X — случайный процесс с непрерывными траекториями на $[0,1]$, причем конечномерные распределения процессов X_n слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса X. Пусть также выполнены следующие условия:*

1) *последовательность случайных величин $\{X_n(0)\}$ плотна;*
2) *для любого $\tau > 0$ имеем*

$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}(w_{X_n}(\delta) \ge \tau) = 0.$$

Тогда $X_n \to X$ по распределению, когда $n \to \infty$.

Доказательство. Проверим условия теоремы 6.2. Первое условие следует из того, что

$$\sup_{t \in [0,1]} |X_n(t)| \le |X_n(0)| + \frac{2}{\delta} w_{X_n}(\delta),$$

а вторoе – из оценки $w'_x(\delta) \le w_x(2\delta)$, $x \in D$, для доказательства которой достаточно взять такое разбиение $T = \{t_0 < \ldots < t_r = 1\}$ отрезка $[0,1]$, что $\delta < t_i - t_{i-1} \le 2\delta$, $1 \le i \le r(T)$.

Итак, рассматриваемая последовательность случайных элементов плотна, и любой ее частный предел имеет такие же конечномерные распределения, как у X. Поэтому $X_n \to X$ по распределению, $n \to \infty$.

Следующая теорема выводится из предыдущей точно так же, как теорема 3.5 из теоремы 3.4.

Теорема 6.4 *Пусть $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность случайных элементов в $D[0,1]$, а X — случайный процесс с непрерывными траекториями на $[0,1]$, причем конечномерные распределения процессов X_n слабо сходятся к конечномерным распределениям процесса X. Пусть также выполнены следующие условия:*

1) *последовательность случайных величин* $\{X_n(0)\}$ *плотна;*
2) *для любого* $\tau > 0$ *имеем*

$$\lim_{\delta\to 0}\limsup_{n\to\infty}\sup_{t\in[0,1]}\frac{1}{\delta}\mathsf{P}\left(\sup_{s\in[t,t+\delta],\ s\le 1}|X_n(s)-X_n(t)|\ge\tau\right)=0.$$

Тогда $X_n \to X$ *по распределению, когда* $n\to\infty$.

7 Эмпирические процессы и критерий Колмогорова.

Лемма 7.1 (*лемма Морица*). *Пусть случайные величины* $X_1, X_2, \ldots$ *таковы, что для некоторых* $C > 0, \alpha > 1, \gamma \ge 1$ *и всех* $k, n \in \mathbb{N}$ *верна оценка*

$$\mathsf{E}|X_{k+1}+\ldots+X_{k+n}|^\gamma \le Cn^\alpha.$$

Тогда для всех $n\in\mathbb{N}$

$$\mathsf{E}\max_{k\le n}|X_1+\ldots+X_k|^\gamma\le ACn^\alpha,$$

где $A = A(\alpha,\gamma)$ *— некоторая функция (она может быть явно указана).*

Доказательство. Обозначим

$$S_r = X_1+\ldots+X_r,\ M_r=\max_{k\le r}|S_k|,\ \widetilde{M}_r=\max_{k\le r}|X_{r+1}+\ldots+X_{r+k}|=\max_{k\le r}|S_{r+k}-S_r|.$$

Сначала докажем утверждение для $n = 2^m$, где $m\ge 0$ целое. Индукция по m. При $m = 0$ утверждение выполняется с любым $A \ge 1$. Пусть оно верно для $n = 2^m$; докажем для $n = 2^{m+1}$. Имеем

$$M_n\le\max\{M_{n/2},|S_{n/2}|+\widetilde{M}_{n/2}\}\le|S_{n/2}|+\left(M_{n/2}^\gamma+\widetilde{M}_{n/2}^\gamma\right)^{1/\gamma}.$$

Применяя эту оценку, неравенство Минковского (т.е. неравенство треугольника в $L^\gamma(\Omega,\mathcal{F},\mathsf{P})$), условие леммы и предположение индукции, получаем, что

$$\mathsf{E}M_n^\gamma\le\Big((\mathsf{E}|S_{n/2}|^\gamma)^{1/\gamma}+(\mathsf{E}M_{n/2}^\gamma+\mathsf{E}\widetilde{M}_{n/2}^\gamma)^{1/\gamma}\Big)^\gamma\le$$

$$\le\Big((C(n/2)^\alpha)^{1/\gamma}+(2AC(n/2)^\alpha)^{1/\gamma}\Big)^\gamma=C\Big(2^{-\alpha/\gamma}+2^{(1-\alpha)/\gamma}A^{1/\gamma}\Big)^\gamma n^\alpha.$$

Последнее выражение окажется меньше ACn^α, если A выбрано из условия

$$2^{-\alpha/\gamma}+2^{(1-\alpha)/\gamma}A^{1/\gamma}\le A^{1/\gamma}$$

но это неравенство выполняется для всех A, больших некоторого фиксированного зависящего от α и γ значения (именно здесь важно, что $\alpha > 1$).

Теперь пусть n не является степенью двух. Найдем такое $m\in\mathbb{N}$, что $2^m\le n\le 2^{m+1}$. Тогда

$$\mathsf{E}M_n^\gamma\le\mathsf{E}M_{2^{m+1}}^\gamma\le AC(2^{m+1})^\alpha\le 2^\alpha ACn^\alpha,$$

так что остается домножить константу A на 2^α. □

Пусть случайные величины $X_1,\ldots,X_n$ независимы и имеют одну и ту же функцию распределения F. Напомним, что эмпирическая функция распределения данной выборки F_n определяется равенством $F_n(t)=n^{-1}\sum_{i=1}^n I\{X_i\le t\}$, $t\in\mathbb{R}$.

Определение 7.2 *Эмпирический процесс* (данной выборки) — это случайный процесс Z_n (на $\mathbb{R}$), для которого

$$Z_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - F(t)), t \in \mathbb{R}.$$

Если случайные величины имеют равномерное распределение на $[0,1]$, то эмпирический процесс равен нулю для всех $t \notin [0,1]$, и можно рассматривать его только на этом отрезке. Очевидно, в этом случае все траектории Z_n лежат в $D[0,1]$. По теореме 6.1 это означает, что Z_n при каждом n есть случайный элемент в указанном пространстве.

Определение 7.3 *Броуновский мост* — это случайный процесс $B^0(t) = W_t - tW_1$, $t \in [0,1]$, где W — винеровский процесс.

Теорема 7.4 *Пусть случайные величины $X_1, \ldots, X_n$ независимы и имеют равномерное распределение на $[0,1]$. Тогда $Z_n \to B^0$ по распределению в пространстве Скорохода, при $n \to \infty$.*

Доказательство. Пользуемся теоремой 6.4. Надо доказать сходимость конечномерных распределений и то, что для любого $\varepsilon > 0$ выполняются условия

$$\{Z_n(0)\} \text{ плотны},$$

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\delta} \sup_{t\in[0,1]} \mathsf{P}\left(\sup_{s\in[t,t+\delta]} |Z_n(s) - Z_n(t)| > \varepsilon \right) = 0,$$

которые обеспечивают и плотность, и то, что предельное распределение сосредоточено на $C[0,1]$. Для любых $t_1, \ldots, t_k \in [0,1]$ вектор $(Z_n(t_1), \ldots, Z_n(t_k))$ является центрированной и нормированной суммой н.о.р. векторов с распределением как у $(I\{X_1 \le t_1\}, \ldots, I\{X_1 \le t_k\})$. Матрица ковариаций этого вектора такая же, как у $(B^0(t_1), \ldots, B^0(t_k))$ (проверить!), поэтому сходимость конечномерных распределений вытекает из ЦПТ.

Первое условие плотности очевидно, т.к. $Z_n(0) = 0$. Для проверки второго зафиксируем $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$.

Лемма 7.5 *Для любых $s, t \in [0,1]$, $s < t$, верна оценка*

$$\mathsf{E}(Z_n(t) - Z_n(s))^4 \le \frac{t-s}{n} + 6(t-s)^2.$$

Доказательство. Очевидно, $Z_n(t) - Z_n(s) = n^{-1/2} \sum_{i=1}^n (\eta_i - \mathsf{E}\eta_i)$, где случайные величины η_i независимы и принимают значения 1 с вероятностью $p := t - s$ и 0 иначе. В силу независимости, раскрывая скобки, имеем

$$\mathsf{E}\left(\sum_{i=1}^n (\eta_i - \mathsf{E}\eta_i) \right)^4 = n\mathsf{E}(\eta_1 - p)^4 + n(n-1)C_4^2 \mathsf{E}(\eta_1 - p)^2 \mathsf{E}(\eta_1 - p)^2 \le np + 6n^2p^2$$

(все слагаемые, содержащие $\eta_i - \mathsf{E}\eta_i$ в первой степени, равны нулю, а оценка $\mathsf{E}(\eta - p)^4 \le p$ проверяется непосредственно). Остается поделить на n^2. $\square$

Заметим, что поскольку случайные величины X_i равномерно распределены на [0,1], то для любого отрезка $[\alpha,\beta]\subset[0,1]$ и любой точки $s\in[\alpha,\beta]$ верны оценки

$Z_n(s)\le\sqrt{n}(F_n(\beta)-s)\le Z_n(\beta)+\sqrt{n}(\beta-\alpha)$ и $Z_n(s)\ge\sqrt{n}(F_n(\alpha)-s)\ge Z_n(\alpha)+\sqrt{n}(\beta-\alpha)$.

С учетом этого для любого $k\in\mathbb{N}$ и $t\in[0,1]$ имеем оценку

$$\sup_{u\in[t,t+\delta]}|Z_n(u)-Z_n(t)|\le\max_{i:i/k\le\delta}\left|Z_n\left(t+\frac{i}{k}\right)-Z_n(t)\right|+\frac{\sqrt{n}}{k}.$$

Напомним, что если отрезок $[t,t+\delta]$ не помещается в $[0,1]$, то мы, вообще говоря, рассматриваем только $u\le 1$; но можно и просто помнить, что при $u>1$ эмпирический процесс равен нулю.

Положим $k=k(n)=[n^{2/3}]$. Так как мы рассматриваем верхний предел при $n\to\infty$, то можно считать, что n настолько велико, чтобы $\sqrt{n}/k(n)<\varepsilon/2$. Тогда по неравенству Маркова

$$\sup_{t\in[0,1]}\mathsf{P}\left(\sup_{s\in[t,t+\delta]}|Z_n(s)-Z_n(t)|>\varepsilon\right)\le$$

$$\le\sup_{t\in[0,1]}\mathsf{P}\left(\max_{i:i/k\le\delta}|Z_n\left(t+\frac{i}{k}\right)-Z_n(t)|>\varepsilon/2\right)\le\frac{16}{\varepsilon^4}\sup_{t\in[0,1]}\mathsf{E}\max_{i:i/k\le\delta}\left|Z_n\left(t+\frac{i}{k}\right)-Z_n(t)\right|^4.$$

В силу леммы 7.5 и нашего выбора последовательности $k(n)$, для любых i,j $(0\le i,j\le\delta k)$ имеем

$$\mathsf{E}\left(Z_n\left(t+\frac{i}{k}\right)-Z_n\left(t+\frac{j}{k}\right)\right)^4\le\frac{|j-i|}{nk}+6\frac{(j-i)^2}{k^2}\le\frac{|j-i|+6(j-i)^2}{k^2}\le 7\frac{(j-i)^2}{k^2}.$$

Следовательно, по лемме 7.1 (применяемой к величинам $Z_n(t+i/k)-Z_n(t+(i-1)/k)$, которых всего не более чем δk)

$$\mathsf{E}\max_{i:i/k\le\delta}\left|Z_n\left(t+\frac{i}{k}\right)-Z_n(t)\right|^4\le\frac{7}{k^2}A(2,4)(\delta k)^2.$$

Последнее выражение не зависит от t и n. То, что получится после его деления на δ, стремится к нулю при $\delta\to 0$. □

Следствие 7.6 (*критерий Колмогорова*). *Пусть $X_1,X_2,\ldots$ — н.о.р. случайные величины с непрерывной функцией распределения. Если функция F является их функцией распределения, то $\sup_{t\in\mathbb{R}}\sqrt{n}|F_n(t)-F(t)|\to\sup_{t\in[0,1]}|B^0(t)|$ по распределению, $n\to\infty$. В противном случае указанные случайные величины стремятся по вероятности к бесконечности.*

Доказательство. Если истинная функция распределения G не равна F, то для некоторого t имеем $F(t)\ne G(t)$ и тогда

$$\sqrt{n}(F_n(t)-F(t))=\sqrt{n}(F_n(t)-G(t))+\sqrt{n}(G(t)-F(t)),$$

здесь первое слагаемое имеет предел по распределению в силу ЦПТ, а второе неслучайно и стремится к $\pm\infty$ при $n\to\infty$.

Теперь пусть $G = F$. Так как F непрерывна, то случайные величины $F(X_i) =: U_i$ равномерно распределены на $[0,1]$. Далее, когда $t \in \mathbb{R}$, функция $F(t)$ принимает все возможные значения из интервала $(0,1)$. Следовательно,

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \sqrt{n}|F_n(t) - F(t)| = \sup_{t\in\mathbb{R}} \sqrt{n} \left| n^{-1} \sum_{i=1}^{n} I\{F(X_i) \le F(t)\} - F(t) \right| =$$

$$= \sup_{u\in(0,1)} \sqrt{n} \left| n^{-1} \sum_{i=1}^{n} I\{U_i \le u\} - u \right| = \sup_{u\in(0,1)} |Z_n(u)|,$$

где Z_n — эмпирический процесс выборки $U_1, \ldots, U_n$. Осталось заметить, что отображение $x \mapsto \sup_{u\in(0,1)} |x(u)|$ непрерывно на $D[0,1]$, и применить теорему о наследовании (теорема 2.2). $\square$

8 Функциональный закон повторного логарифма (начало).

Лемма 8.1 *а) Справедливо соотношение*

$$\int_x^\infty e^{-z^2/2} dz \sim \frac{1}{x} e^{-x^2/2},\ x \to +\infty,$$

причем левая часть не больше правой.

б) Для $a, b \ge 0$ $(b > a)$ справедлива оценка

$$\int_a^b e^{-z^2/2} dz \ge \frac{1}{b}(e^{-a^2/2} - e^{-b^2/2}).$$

в) Пусть $Z \sim N(0, \sigma^2)$. Тогда для любых $\alpha \in \mathbb{R}$ и $\gamma > 0$

$$\mathsf{P}(\alpha - \gamma \le Z \le \alpha + \gamma) \ge \mathsf{P}(Z \in [|\alpha|, |\alpha| + \gamma]).$$

Доказательство. а)

$$\int_x^\infty e^{-z^2/2} dz = \int_x^\infty z^{-1} z e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{x} e^{-x^2/2} - \int_x^\infty z^{-2} e^{-z^2/2} dz,$$

но последний интеграл допускает оценку

$$\int_x^\infty z^{-2} e^{-z^2/2} dz \le \frac{1}{x^3} \int_x^\infty z e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{x^3} e^{-x^2/2}.$$

б)

$$\int_a^b e^{-z^2/2} dz \ge b^{-1} \int_a^b z e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{b}(e^{-a^2/2} - e^{-b^2/2}).$$

в) В силу симметричности распределения Z мы можем считать, что $\alpha \ge 0$. Но тогда $[\alpha, \alpha + \gamma] \subset [\alpha - \gamma, \alpha + \gamma]$. $\square$

Определение 8.2 *Шар Штрассена $K \subset C[0,1]$ — это множество функций*

$$K = \{x \in C[0,1] : x(t) = \int_0^t h(s)ds,\ t \in [0,1],\ \text{где } h \in L^2[0,1],\ \int_0^1 h^2(s)ds \le 1\}.$$

Мы будем также использовать запись $x(t) = \int_0^t \dot{x}(s)ds$, $t \in [0,1]$.

Лемма 8.3 *Шар Штрассена является компактом в $C[0,1]$.*

Доказательство. Для $s, t \in [0,1]$ $(s < t)$ имеем

$$|x(t) - x(s)| = \left|\int_0^1 \dot{x}(u)I\{s < u < t\}du\right| \le \left(\int_0^1 \dot{x}^2(u)du\right)^{1/2} \sqrt{t-s} \le \sqrt{t-s}, \qquad (8.1)$$

что дает и ограниченность, и равностепенную непрерывность. Итак, по теореме Арцела-Асколи K предкомпактно. Чтобы доказать замкнутость, рассмотрим последовательность функций $x_n \in K$, сходящуюся в норме $C[0,1]$ к некоторой функции $x \in C[0,1]$. Тогда функции $\dot{x}_n, n \in \mathbb{N}$, принадлежат единичному шару в пространстве $L^2[0,1]$, и по теореме Банаха-Алаоглу можно извлечь подпоследовательность $\{\dot{x}_{n_k}, k \in \mathbb{N},\}$ слабо сходящуюся к некоторой функции $h \in L^2[0,1]$ с нормой, не большей 1. В силу слабой сходимости имеем, для каждого $t \in [0,1]$,

$$x_{n_k}(t) = \int_0^t \dot{x}_{n_k}(s)ds = \int_0^1 I\{s \le t\}\dot{x}_{n_k}(s)ds \to \int_0^t h(s)ds,\ k \to \infty.$$

В то же время $x_{n_k}(t) \to x(t)$, $k \to \infty$. Поэтому $x \in K$ и $\dot{x} = h$. $\square$

Теорема 8.4 (*функциональный закон повторного логарифма*). *Пусть $W = \{W(t), t \ge 0\}$ — винеровский процесс. Положим*

$$\zeta_n(t) = \frac{W(nt)}{\sqrt{2n \ln\ln n}},\ n > e.$$

Тогда с вероятностью единица последовательность случайных элементов $\{\zeta_n, n \in \mathbb{N}\}$ предкомпактна, причем множество ее предельных точек совпадает с K.

Доказательство. Мы будем допускать для упрощения записи, что $n > e$ может быть необязательно целым числом. Начнем со следующей леммы.

Лемма 8.5 *Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $m \in \mathbb{N}$, что для каждого $c > 1$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(w_{\zeta_{c^k}}(\frac{1}{2m}) \ge \varepsilon) < \infty$.*

Доказательство. Пусть $Z \sim N(0,1)$. Используя однородность винеровского процесса, распределение его максимума и лемму 8.1, имеем

$$\mathsf{P}\left(w_{\zeta_{c^k}}(\frac{1}{2m}) \ge \varepsilon\right) \le \sum_{j=1}^{2m} \mathsf{P}\left(\sup_{s \le 1/(2m)} |\zeta_{c^k}(\frac{j-1}{2m} + s) - \zeta_{c^k}(\frac{j-1}{2m})| \ge \frac{\varepsilon}{2}\right) =$$

$$2m\mathsf{P}\left(\sup_{s\le 1/(2m)}\frac{|W_{sc^k}|}{\sqrt{2c^k\ln\ln c^k}}>\frac{\varepsilon}{2}\right)=8m\mathsf{P}\left(\frac{|W_{c^k/(2m)}|}{\sqrt{2c^k\ln\ln c^k}}>\frac{\varepsilon}{2}\right)=$$

$$=8m\mathsf{P}\left(Z\ge\frac{\varepsilon}{2}\sqrt{2m\cdot 2\ln\ln c^k}\right)\le 8m\exp\{-\frac{\varepsilon^2}{2}m\ln\ln c^k\}.$$

Таким образом, ряд с данными слагаемыми сходится, если $\varepsilon^2 m>2$. $\square$

Как и в доказательстве обычного закона повторного логарифма, мы докажем два утверждения по отдельности: сначала убедимся, что последовательность $\{\zeta_n\}$ с единичной вероятностью при больших n не удаляется далеко от множества K (верхняя оценка), а затем — что любая точка множества K является предельной.

Перейдем к доказательству верхней оценки. Зафиксируем $\varepsilon>0$ и возьмем m из леммы 8.5. Пусть $r>1$ — число, точное значение которого мы подберем позже.

Имеем

$$\mathsf{P}(\zeta_n\notin K^{(\varepsilon)})\le\mathsf{P}\left(2m\sum_{i=1}^{2m}\left(\zeta_n\left(\frac{i}{2m}\right)-\zeta_n\left(\frac{i-1}{2m}\right)\right)^2>r^2\right)+$$

$$+\mathsf{P}\left(2m\sum_{i=1}^{2m}\left(\zeta_n\left(\frac{i}{2m}\right)-\zeta_n\left(\frac{i-1}{2m}\right)\right)^2\le r^2,\zeta_n\notin K^{(\varepsilon)}\right)=:R_1+R_2.$$

Пусть случайная величина $\varkappa_m$ имеет распределение хи-квадрат с $2m$ степенями свободы. Тогда, в силу однородности и независимости приращений винеровского процесса,

$$R_1=\mathsf{P}\left(\varkappa_m>2r^2\ln lnn\right)=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_{r^2\ln\ln n}^{\infty}t^{m-1}e^{-t}dt\sim\frac{(r^2\ln\ln n)^{m-1}e^{-r^2\ln\ln n}}{\Gamma(m)},\ n\to\infty. \tag{8.2}$$

Построим случайный процесс η_n, который в точках вида $i/(2m)$, $0\le i\le 2m$ совпадает с ζ_n, а в промежутках между этими точками имеет линейные траектории. Заметим, что

$$R_2\le\mathsf{P}\left(r^{-1}\eta_n\in K,\zeta_n\notin K^{(\varepsilon)}\right)\le\mathsf{P}\left(r^{-1}\eta_n\in K,\|r^{-1}\eta_n-\zeta_n\|_\infty\ge\varepsilon\right).$$

Введем случайную величину τ, равную минимальному $t\in[0,1]$, для которого $|r^{-1}\eta_n(t)-\zeta_n(t)|=\varepsilon$, полагая $\tau=2$, если такого t не найдется. Обозначая F функцию распределения τ, с помощью интегральной формулы полной вероятности имеем

$$R_2\le\int_0^1\mathsf{P}(r^{-1}\eta_n\in K|\tau=t)dF_t=\int_0^1\mathsf{P}(r^{-1}\eta_n\in K,|r^{-1}\eta_n(t)-\zeta_n(t)|=\varepsilon|\tau=t)dF_t.$$

Пусть $i(t)=\inf\{i\in\mathbb{Z}_+:i/(2m)\ge t\}$. Если $r^{-1}\eta_n\in K$, то

$$\left|\eta_n\left(\frac{i(t)}{2m}\right)-\eta_n(t)\right|\le\frac{r}{\sqrt{2m}}$$

согласно оценке (8.1). Заметим также, что $|\eta_n(t)|\le r$. Увеличивая, если нужно, m и уменьшая r, добьемся того, чтобы $\varepsilon/2>r-1+r/\sqrt{2m}$. Тогда

$$R_2\le\int_0^1\mathsf{P}\Big(\left|\eta_n\left(\frac{i(t)}{2m}\right)-\eta_n(t)\right|\le\frac{r}{\sqrt{2m}},|(r^{-1}-1)\eta_n(t)+\eta_n(t)-\zeta_n(t)|=$$

$$= \varepsilon | \tau = t\Big) dF_t \le \int_0^1 \mathsf{P}\left(\left|\zeta_n\left(\frac{i(t)}{2m}\right) - \eta_n(t)\right| \le \frac{r}{\sqrt{2m}}, |\eta_n(t) - \zeta_n(t)| \ge \varepsilon - (r-1) | \tau = t\right) dF_t \le$$

$$\le \int_0^1 \mathsf{P}\left(\left|\zeta_n\left(\frac{i(t)}{2m}\right) - \zeta_n(t)\right| \ge \frac{\varepsilon}{2} | \tau = t\right) dF_t \le$$

$$\le \int_0^1 \mathsf{P}\left(w_{\zeta_n}\left(\frac{1}{2m}\right) \ge \frac{\varepsilon}{2} | \tau = t\right) dF_t = \mathsf{P}\left(w_{\zeta_n}\left(\frac{1}{2m}\right) \ge \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Теперь пусть $c > 1$. Из леммы 8.5 и соотношения 8.2 вытекает, что $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(\zeta_{c^k} \notin K^{(\varepsilon)}) < \infty$ и в силу леммы Бореля-Кантелли с вероятностью единица при достаточно больших k случайные функции ζ_{c^k} не выходят из ε-окрестности k.

Далее,

$$\sup_{n: c^{k-1} \le n \le c^k} \|\zeta_{c^k} - \zeta_n\|_\infty = \sup_{n: c^{k-1} \le n \le c^k} \sup_{t \in [0,1]} \frac{|W(tc^k)|}{\sqrt{2c^k \ln\ln c^k}} \left| 1 - \sqrt{\frac{c^k \ln\ln c^k}{n \ln\ln n}} \right| +$$

$$+ \sup_{n: c^{k-1} \le n \le c^k} \sup_{t \in [0,1]} \frac{|W(nt) - W(c^k t)|}{\sqrt{2n \ln\ln n}} =: R_3 + R_4.$$

Ввиду уже доказанного асимптотического соотношения имеем

$$\limsup_{k\to\infty} R_3 \le (1+\varepsilon) \limsup_{k\to\infty} \left| 1 - \sqrt{\frac{c^k \ln\ln c^k}{c^{k-1} \ln\ln c^{k-1}}} \right| = (1+\varepsilon)(1 - c^{-1/2}).$$

Для оценки R_4 заметим, что если $x \in K^{(\varepsilon)}$, то

$$w_x(\delta) \le \sqrt{\delta} + 2\varepsilon.$$

Следовательно,

$$\limsup_{k\to\infty} R_4 \le \limsup_{k\to\infty} \sqrt{c} \sup_{n: c^{k-1} \le n \le c^k} \sup_{t \in [0,1]} \left| \zeta_{c^k}(t) - \zeta_{c^k}\left(\frac{n}{c^k} t\right) \right| \le$$

$$\le \sqrt{c} \limsup_{k\to\infty} w_{\zeta_{c^k}}\left(\frac{c-1}{c}\right) \le \sqrt{c}\left(2\varepsilon + \sqrt{\frac{c-1}{c}}\right).$$

Выбирая $c > 1$ достаточно близким к 1, можно достичь того, чтобы $\zeta_n \in K^{(3\varepsilon)}$ для всех достаточно больших n. Верхняя оценка доказана.

9 Функциональный закон повторного логарифма (окончание). Лемма о склейке.

Переходим к доказательству нижней оценки в функциональном законе повторного логарифма. Пусть $x \in K_0$, где множество $K_0 \subset K$ счетно и всюду плотно в K, а $\varepsilon > 0$. Требуется проверить, что события $\{\zeta_n \in \{x\}^{(\varepsilon)}\}$ происходят бесконечно часто с единичной вероятностью. Ясно, что можно ограничиться такими $x \in K_0$, что $\rho := \int_0^1 \dot{x}^2(t) dt < 1$.

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$ и $\delta \in (0,1)$. Введем события

$$A_n := \left\{ \left| \zeta_n\left(\frac{i}{m}\right) - \zeta_n\left(\frac{i-1}{m}\right) - x\left(\frac{i}{m}\right) + x\left(\frac{i-1}{m}\right) \right| < \delta,\, 1 < i \le m \right\}.$$

Согласно лемме 8.1, обозначая $Z \sim N(0,1)$, имеем

$$\mathsf{P}(A_n) = \prod_{i=2}^{m} \mathsf{P}\left(\frac{Z}{\sqrt{2m \ln\ln n}} \in \left[\left| x\left(\frac{i}{m}\right) - x\left(\frac{i-1}{m}\right) \right|, \left| x\left(\frac{i}{m}\right) - x\left(\frac{i-1}{m}\right) \right| + \delta \right] \right) \ge$$

$$\ge \prod_{i=2}^{m} \frac{1}{\left(\left|x\left(\frac{i}{m}\right) - x\left(\frac{i-1}{m}\right)\right| + \delta\right)\sqrt{4\pi m \ln\ln n}} \exp\left\{ -\left(x\left(\frac{i}{m}\right) - x\left(\frac{i-1}{m}\right) \right)^2 m \ln\ln n \right\} \cdot$$

$$\cdot \left(1 - \exp\left\{ -m \ln\ln n \left(\delta^2 + 2\left| x\left(\frac{i}{m}\right) - x\left(\frac{i-1}{m}\right) \right| \delta \right) \right\} \right).$$

При достаточно больших n последняя скобка не менее $1/2$. В силу условия на функцию x показатель экспоненты перед последней скобкой по модулю не больше числа $\rho \ln\ln n$.

Возьмем теперь события $B_k = A_{m^k},\ k \in \mathbb{N}$. Они независимы и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{P}(B_k)$ расходится. Поэтому с единичной вероятностью данные события происходят бесконечно часто. С другой стороны, начиная с некоторого номера, $\zeta_{m^k} \in K^{(\delta)}$. Для $t \in [0,1]$ пусть $j(t)$ — максимальное целое число, для которого $j(t)/m \le t$. Тогда, учитывая оценку модуля непрерывности (8.1), имеем

$$|\zeta_{m^k}(t) - x(t)| \le |x(t) - x(j(t)/m)| + |\zeta_{m^k}(t) - \zeta_{m^k}(j(t)/m)| + |x(j(t)/m) - \zeta_{m^k}(j(t)/m)| \le$$

$$\le 2\delta + \frac{2}{\sqrt{m}} + |x(1/m) - \zeta_{m^k}(1/m)| + \sum_{l=2}^{m} \left| \zeta_n\left(\frac{l}{m}\right) - \zeta_n\left(\frac{l-1}{m}\right) - x\left(\frac{l}{m}\right) + x\left(\frac{l-1}{m}\right) \right|$$

$$\le 4\delta + \frac{4}{\sqrt{m}} + \delta m.$$

Выбирая m и δ так, чтобы последнее выражение было меньше ε, и вспоминая, что K_0 счетно, приходим к требуемому выводу. □

Лемма 9.1 (*лемма Беркеша-Филипа о склейке*). *Пусть S_i, $i = 1,2,3$, — польские пространства, а (X,Y) и (R,T) — два случайных элемента со значениями соответственно в*

$$(S_1 \times S_2, \mathcal{B}(S_1) \otimes \mathcal{B}(S_2)) \text{ и } (S_2 \times S_3, \mathcal{B}(S_2) \otimes \mathcal{B}(S_3)),$$

причем $Law(Y) = Law(R)$. Тогда существует вероятностное пространство, на котором заданы такие случайные элементы ζ^1, ζ^2 и ζ^3, что ζ^i принимает значения в $(S_i, \mathcal{B}(S_i))$ (при $i = 1,2,3$), а также $Law(\zeta^1,\zeta^2) = Law(X,Y)$ и $Law(\zeta^2,\zeta^3) = Law(R,T)$.

Доказательство. Пусть вначале X, Y и T принимают конечное число значений, т.е. существуют $n \in \mathbb{N}$ и такие множества

$$L_1 = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset S_1,\ L_2 = \{y_1, \ldots, y_n\} \subset S_2,\ L_3 = \{t_1, \ldots, t_n\} \subset S_3,$$

что $\mathsf{P}(X \in L_1, Y \in L_2) = \mathsf{P}(R \in L_2, T \in L_3) = 1$. Можно считать, что в каждом из множеств L_i, $i = 1, 2, 3$, ровно n точек (если в каком-то из них точек меньше, то добавим необходимое их число, считая, что соответствующий случайный элемент принимает значения в этих добавленных точках с нулевой вероятностью). Меру μ на множестве $(S_1 \times S_2 \times S_3, \mathcal{B}(S_1) \otimes \mathcal{B}(S_2) \otimes \mathcal{B}(S_3))$ определим по формуле

$$\mu((x_i, y_j, t_k)) = \mathsf{P}(X = x_i | Y = y_j)\mathsf{P}(T = t_k | R = y_j)\mathsf{P}(Y = y_j),\ i, j, k = 1, \dots, n,$$

и $\mu((S_1 \times S_2 \times S_3) \setminus (L_1 \times L_2 \times L_3)) = 0$. Условные вероятности мы понимаем в классическом смысле, т.е. $\mathsf{P}(A_1|A_2) = \mathsf{P}(A_1A_2)/\mathsf{P}(A_2)$, где A_1, A_2 — события и $0/0 = 0$. Мера μ вероятностная, поскольку все n^3 точек вида (x_i, y_j, t_k) различны и

$$\sum_{i,j,k=1}^{n} \mu((x_i, y_j, t_k)) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathsf{P}(X = x_i | Y = y_j) \sum_{k=1}^{n} \mathsf{P}(T = t_k | R = y_j)\mathsf{P}(Y = y_j) = 1.$$

Рассмотрим вероятностное пространство, на котором задан случайный элемент $(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ с распределением μ. Для произвольных множеств $B_1 \in \mathcal{B}(S_1)$, $B_2 \in \mathcal{B}(S_2)$ обозначим

$$J = \{1 \le i, j, k \le n : (x_i, y_j, t_k) \in B_1 \times B_2 \times S_3\}.$$

Тогда по определению меры μ

$$\mathsf{P}(\zeta^1 \in B_1, \zeta^2 \in B_2) = \sum_{i,j,k \in J} \mathsf{P}(X = x_i | Y = y_j)\mathsf{P}(T = t_k | R = y_j)\mathsf{P}(Y = y_j)$$

$$= \sum{}' \mathsf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathsf{P}(X \in B_1, Y \in B_2),$$

где сумма $\sum{}'$ берется по таким $i, j \in \{1, \dots, n\}$, что $(x_i, y_j) \in B_1 \times B_2$. Аналогично проверяется, что $Law(\zeta^2, \zeta^3) = Law(R, T)$.

Пусть теперь случайные элементы могут принимать бесконечное число значений. Так как S_1, S_2, S_3 сепарабельны, то можно построить последовательность случайных элементов $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (на том же вероятностном пространстве, что и (X, Y)) так, чтобы при любом $n \in \mathbb{N}$ элементы X_n и Y_n принимали конечное число значений и $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ с вероятностью единица, когда $n \to \infty$. Так же строится последовательность $(R_n, T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дискретных случайных элементов $(R_n, T_n) \to (R, T)$ п.н., $n \to \infty$. Их можно выбрать так, чтобы $Law(Y_n) = Law(R_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

По уже доказанной части леммы при каждом $n \in \mathbb{N}$ существует такая вероятностная мера μ_n на $(S, \mathcal{B}) := (S_1 \times S_2 \times S_3, \mathcal{B}(S_1) \otimes \mathcal{B}(S_2) \otimes \mathcal{B}(S_3))$, что

$$\mu_n(A \times S_3) = (Law(X_n, Y_n))(B_1 \times B_2) \ \text{ и } \ \mu_n(S_1 \times C) = (Law(R_n, T_n))(B_2 \times B_3),$$

где $A = B_1 \times B_2$ и $C = B_2 \times B_3$.

Возьмем $\varepsilon > 0$. По теореме Прохорова (теорема 2.6), точнее ее части, относящейся к необходимости условия плотности, существуют такие компакты $K_i \subset S_i$, где $i = 1, 2, 3$, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ выполняются оценки

$$Law(X_n)(S_1 \setminus K_1) < \varepsilon,\ Law(Y_n)(S_2 \setminus K_2) < \varepsilon,\ Law(T_n)(S_3 \setminus K_3) < \varepsilon.$$

Положим $K = K_1 \times K_2 \times K_3$. Тогда множество K есть компакт в $(S, \mathcal{B})$. Более того,

$$\mu_n((S_1 \times S_2 \times S_3) \setminus (K_1 \times K_2 \times K_3)) \le 3\varepsilon.$$

Следовательно, последовательность мер $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ плотна. По теореме Прохорова она содержит подпоследовательность $(\mu_v)_{v\in\mathbb{N}}$, слабо сходящуюся к пределу μ. Построим на каком-нибудь подходящем вероятностном пространстве случайные элементы $(\zeta^1, \zeta^2, \zeta^3)$ с совместным распределением μ. Тогда для любой ограниченной непрерывной функции $f : S_1 \times S_2 \to \mathbb{R}$

$$\mathsf{E} f(X_v, Y_v) = \int_{S_1\times S_2\times S_3} f(x,y)\mu_v(dx\,dy\,dt) \to \mathsf{E} f(\zeta^1, \zeta^2), \quad v \to \infty.$$

Таким образом, $Law(\zeta^1, \zeta^2) = Law(X, Y)$. Аналогично проверяем равенство $Law(\zeta^2, \zeta^3) = Law(R, T)$. $\square$

10 Сильный принцип инвариантности (начало).

Теорема 10.1 *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_2 = 1$ и $\mathsf{E}|X_1|^3 = \beta_3 < \infty$, а функция распределения X_1 непрерывна. Тогда эту последовательность можно задать на другом вероятностном пространстве, на котором задан также винеровский процесс $W = \{W(t), t \ge 0\}$, причем для некоторого $\varepsilon > 0$*

$$S_n - W_n = O(n^{1/2-\varepsilon}) \text{ п.н.}, n \to \infty,$$

здесь $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Доказательству предпошлем следующую лемму, имеющую самостоятельное значение.

Лемма 10.2 *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathsf{E}X_1 = 0$, $\mathsf{E}X_2 = 1$ и $\mathsf{E}|X_1|^3 = \beta_3 < \infty$. Тогда существует такое $C > 0$, зависящее от β_3, что*

$$\mathsf{E}|X_1 + \ldots + X_n|^3 \le C n^{3/2} \text{ для любого } n \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Точно так же, как в доказательстве теоремы Морица, легко убедиться, что лемму достаточно получить для $n = 2^k$, $k \ge 0$. Указанное утверждение будет проверять по индукции. При $k = 0$ оно верно, если $C \ge \beta_3$. Пусть оно справедливо для всех k, не превосходящих данного; тогда, пользуясь неравенством

$$|x + y|^3 \le |x|^3 + |y|^3 + 2(x^2|y| + |x|y^2),$$

справедливым для всех $x, y \in \mathbb{R}$, имеем

$$\mathsf{E}|X_1 + \ldots + X_{2^{k+1}}|^3 \le 2\mathsf{E}|X_1 + \ldots + X_{2^k}|^3 + 4\mathsf{E}|X_1 + \ldots + X_{2^k}|\mathsf{E}(X_1 + \ldots + X_{2^k})^2.$$

Применяя предположение индукции и неравенство Ляпунова, получаем оценку

$$\mathsf{E}|X_1 + \ldots + X_{2^{k+1}}|^3 \le 2C \cdot 2^{3k/2} + 4 \cdot 2^{3k/2}.$$

Последнее выражение окажется меньше $C \cdot 2^{3(k+1)/2}$, если $C > 2 + 2\sqrt{2}$. $\square$

Пусть Φ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Лемма 10.3 *Пусть a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}$, — две последовательности чисел, принадлежащих интервалу $(0,1)$, причем выполнена одна из двух групп условий:*

$$a_n \to 1,\, b_n \to 1,\, \frac{1-a_n}{1-b_n} \to 1, \quad n \to \infty, \tag{10.1}$$

или

$$a_n \to 0,\, b_n \to 0,\, \frac{a_n}{b_n} \to 1, \quad n \to \infty. \tag{10.2}$$

Тогда $\Phi^{-1}(a_n)^2 - \Phi^{-1}(b_n)^2 \to 0$, $n \to \infty$.

Доказательство. Пусть выполнено (10.1). Можно считать, что $a_n \leq b_n$ (если это не так, рассмотрим отдельно две соответствующие подпоследовательности). Обозначим $x_n = \Phi^{-1}(a_n)$, $y_n = \Phi^{-1}(b_n)$. Тогда при достаточно больших n имеем $0 < x_n \leq y_n$ и $x_n \to\to \infty$, $y_n \to \infty$ при $n \to \infty$. В силу леммы 8.1, а) справедливо соотношение

$$\frac{1-a_n}{1-b_n} = \frac{\int_{x_n}^{\infty} e^{-t^2/2}dt}{\int_{y_n}^{\infty} e^{-t^2/2}dt} \sim \frac{y_n}{x_n} \exp\left\{\frac{y_n^2 - x_n^2}{2}\right\}.$$

В последнем выражении оба множителя не меньше 1, а их произведение по условию стремится к 1. Значит, каждый из множителей стремится к единице, что и требовалось.

Доказательство леммы при условиях (10.2) получается, если перейти к последовательностям $1-a_n$, $1-b_n$ и заметить, что $\Phi^{-1}(-t) = 1 - \Phi^{-1}(t)$, $t \in (0,1)$. $\square$

Начнем доказывать теорему. Пусть $\alpha > 1$ — число, точное значение которого мы подберем позже. Разобьем множество $\{1, 2, \dots\}$ на последовательные блоки $\{H_1, H_2, \dots\}$ так, чтобы число точек в блоке H_k равнялось $[k]^{\alpha}$. Положим

$$N_k = \sum_{i=1}^{k} |H_i| \sim \frac{k^{\alpha+1}}{1+\alpha},\, k \to \infty.$$

Введем обозначения

$$\xi_k = |H_k|^{-1/2} \sum_{i \in H_k} X_i,\;\; F_k(x) = \mathsf{P}(\xi_k \leq x) \text{ для } x \in \mathbb{R}.$$

Как следует из формулы свертки, функция F_k непрерывна. Поэтому можно ввести случайные величины

$$\eta_k = \Phi^{-1}(F_k(\xi_k)), \quad k \in \mathbb{N},$$

которые независимы и имеют стандартное нормальное распределение.

Далее $C_1, C_2, \dots$ — положительные множители, не зависящие от переменной, по которой совершается предельный переход.

Лемма 10.4 *Пусть $K \in (0, \alpha^2)$. Тогда для всех достаточно больших k и любого $x \in [-K\sqrt{\ln k}, K\sqrt{\ln k}]$ определена функция $\Phi^{-1}(F_k(x))$ справедливо неравенство*

$$|\Phi^{-1}(F_k(x)) - x| \leq C_1 k^{K^2/2-\alpha/2}.$$

Доказательство. По теореме Берри-Эссеена справедлива оценка

$$|F_k(x) - \Phi(x)| \le C_2 k^{-\alpha/2},\ x \in \mathbb{R}. \tag{10.3}$$

Другими словами, при $|x| \le K\sqrt{\ln k}$

$$F_k(x) \in [\Phi(x) - C_2 k^{-\alpha/2}, \Phi(x) - C_2 k^{-\alpha/2}] \subset [\Phi(-K\sqrt{\ln k}) - C_2 k^{-\alpha/2}, \Phi(K\sqrt{\ln k}) + C_2 k^{-\alpha/2}] =: I_k.$$

При $k \to \infty$ согласно лемме 8.1, a), имеем

$$1 - \Phi(K\sqrt{\ln k}) = \Phi(-K\sqrt{\ln k}) \sim \frac{1}{K k^{K^2/2}\sqrt{2\pi \ln k}},\ \ k \to \infty.$$

Таким образом,

$$\frac{\Phi(K\sqrt{\ln k}) - C_2 k^{-\alpha/2}}{\Phi(K\sqrt{\ln k})} \to 1,\ k \to \infty.$$

Прежде всего, это показывает, что функция $\Phi^{-1}(F_k(x))$ при достаточно больших k определена. По лемме 10.3

$$(\Phi^{-1}(\Phi(K\sqrt{\ln k}) \pm C_2 k^{-\alpha/2}))^2 - K^2 \ln k =$$

$$\Phi^{-1}(\Phi(K\sqrt{\ln k}) \pm C_2 k^{-\alpha/2}) - (\Phi^{-1}(\Phi(K\sqrt{\ln k})))^2 \to 0,\ k \to \infty. \tag{10.4}$$

Теперь из формулы Лагранжа и формулы для производной обратной функции следует, что

$$|\Phi^{-1}(F_k(x)) - x| \le |F_k(x) - \Phi(x)| \sup_{u \in I_k} \frac{d\Phi^{-1}(u)}{du} = \sqrt{2\pi}|F_k(x) - \Phi(x)| \sup_{u \in I_k} e^{(\Phi^{-1}(u))^2/2}.$$

В силу 10.3 и 10.4

$$|F_k(x) - \Phi(x)| \sup_{u \in I_k} e^{(\Phi^{-1}(u))^2/2} \le C_3 k^{-\alpha/2} e^{K^2 \ln k/2}.$$

Лемма доказана. □

11 Сильный принцип инвариантности (окончание).

Лемма 11.1 *Справедлива оценка*

$$\mathsf{E}(\xi_k - \eta_k)^2 \le C_4 k^{-\alpha/12}.$$

Доказательство. Возьмем K так, чтобы $K^2 = \alpha/2$. В силу неравенств Гельдера и Минковского

$$\mathsf{E}(\xi_k - \eta_k)^2 = \mathsf{E}(\xi_k - \eta_k)^2 I\{|\xi_k| \le K\sqrt{\ln k}\} + \mathsf{E}(\xi_k - \eta_k)^2 I\{|\xi_k| > K\sqrt{\ln k}\} \le$$

$$\le \mathsf{E}(\xi_k - \eta_k)^2 I\{|\xi_k| \le K\sqrt{\ln k}\} + (\mathsf{E}|\xi_k - \eta_k|^3)^{2/3} \mathsf{P}(|\xi_k| > K\sqrt{\ln k})^{1/3} \le$$

$$\leq \mathsf{E}(\xi_k-\eta_k)^2 I\{|\xi_k|\leq K\sqrt{\ln k}\} + ((\mathsf{E}|\xi_k|^3)^{1/3} + (\mathsf{E}|\eta_k|^3)^{1/3})^2 \mathsf{P}(|\eta_k| > K\sqrt{\ln k})^{1/3} +$$

$$+((\mathsf{E}|\xi_k|^3)^{1/3} + (\mathsf{E}|\eta_k|^3)^{1/3})^2 |\mathsf{P}(|\eta_k|\leq K\sqrt{\ln k}) - \mathsf{P}(|\eta_k|\leq K\sqrt{\ln k})|^{1/3} =: R_1+R_2+R_3.$$

Здесь в последней оценке мы еще воспользовались неравенством $x^{1/3}\leq |x-y|^{1/3}+y^{1/3}$, при $x,y\geq 0$. Согласно лемме 10.4 имеем $R_1\leq C_5 k^{-\alpha/2+K^2/2}=C_5k^{-\alpha/4}$. В силу леммы 10.2, того, что $\eta_k\sim N(0,1)$, и леммы 8.1, а) имеем

$$R_2\leq C_6 \mathsf{P}(|\eta_k|\leq K\sqrt{\ln k})^{1/3}\leq C_7 e^{-K^2(\ln k)/6} = C_7 k^{-\alpha/12}.$$

Наконец, по тем же соображениям и теореме Берри-Эссеена $R_3\leq C_8 k^{-\alpha/6}$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 11.2 *Если параметр α выбран достаточно большим, то существует $\varepsilon_1>0$ такое, что*

$$S_{N_k}-\sum_{i=1}^k \sqrt{|H_i|}\eta_i = O(N_k^{1/2-\varepsilon_1}) \text{ п.н., } k\to\infty.$$

Доказательство. Очевидно, $S_{N_k}-\sum_{i=1}^k\sqrt{|H_i|}\eta_i=\sum_{i=1}^k\sqrt{[i^\alpha]}(\xi_i-\eta_i)$. Введем малое $\mu>0$, точное значение которого подберем позже, и события

$$A_i=\{\sqrt{[i^\alpha]}|\xi_i-\eta_i|>i^{(\alpha-1)/2-\mu}\},\ i\in\mathbb{N}.$$

Согласно неравенству Маркова и лемме 11.1

$$\mathsf{P}(A_i)\leq \mathsf{P}(|\xi_i-\eta_i|>i^{-1/2-\mu})\leq i^{1+2\mu}\mathsf{E}(\xi_i-\eta_i)^2\leq C_4 i^{1+2\mu-\alpha/12}.$$

Теперь пусть α и μ таковы, что $\alpha/12-2\mu-1>1$. Тогда ряд $\sum_i \mathsf{P}(A_i)$ сходится, и по лемме Бореля-Кантелли оценка $\sqrt{[i^\alpha]}|\xi_i-\eta_i|\leq i^{(\alpha-1)/2-\mu}$ выполняется для всех i, начиная с некоторого. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^k\sqrt{[i^\alpha]}|\xi_i-\eta_i|\leq \tau\sum_{i=1}^k i^{(\alpha-1)/2-\mu}\leq \tau C_9 k^{(\alpha+1)/2-\mu}$$

где τ — некоторая случайная величина. Остается вспомнить порядок роста последовательности N_k, и положить $\varepsilon_1=\mu$. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы 10.1. Введем пространство $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ всех числовых последовательностей с метрикой

$$\rho_1(x,y)=\sum_{j=1}^\infty 2^{-j}\frac{|x_j-y_j|}{1+|x_j-y_j|},\ x=\{x_j,j\in\mathbb{N}\},\ y=\{y_j,j\in\mathbb{N}\},$$

и пространство $C(\mathbb{R}_+)$ всех непрерывных на $[0,+\infty)$ числовых функций с метрикой

$$\rho_1(f,g)=\sum_{j=1}^\infty 2^{-j}\frac{\sup_{s\in[0,j]}|f(s)-g(s)|}{1+\sup_{s\in[0,j]}|f(s)-g(s)|},\ f,g\in C(\mathbb{R}_+).$$

Легко видеть, что эти пространства – польские. Также просто проверяется (аналогично соответствующему утверждению для процессов с непрерывными на отрезке траекториями), что любая последовательность случайных величин (соответственно случайный процесс с непрерывными траекториями) задает случайный элемент в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (соответственно в $C(\mathbb{R}_+)$).

Применим лемму о склейке (лемма 9.1) к польским пространствам

$$S_1 = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \;\; S_2 = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \;\; S_3 = C(\mathbb{R}_+)$$

и случайным элементам

$$X = \{X_j, j \in \mathbb{N}\}, \; Y = \{\eta_k, \, k \in \mathbb{N}\}, \; R = \left\{ \frac{W(N_k) - W(N_{k-1})}{\sqrt{|H_k|}}, k \in \mathbb{N} \right\}, \; T = W,$$

где $W = \{W(t), \, t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Это возможно, так как Y и R совпадают по распределению (последовательности независимых случайных величин). Указанная лемма позволяет построить все указанные случайные элементы на одном вероятностном пространстве так, чтобы совместное распределение последовательностей X и η сохранилось, но при этом

$$|H_k|\eta_k = W(N_k) - W(N_{k-1}), \; k \in \mathbb{N}.$$

Но это вместе с леммой 11.2 и означает, что

$$S_{N_k} - W_{N_k} = O(N_k^{1/2-\varepsilon_1}), \; k \to \infty. \tag{11.1}$$

Чтобы закончить доказательство теоремы, необходимо проверить, что изменение левой части на промежутках $[N_k, N_{k+1}]$ не влияет на ее оценку, данную в правой части.

Лемма 11.3 *Справедливы соотношения*

$$\max_{N_k \leq n \leq N_{k+1}} |S_n - S_{N_k}| = O(N_k^{1/2-\varepsilon_2}) \text{ п.н.},$$

$$\max_{N_k \leq t \leq N_{k+1}} |W_t - W_{N_k}| = O(N_k^{1/2-\varepsilon_2}) \text{ п.н.},$$

при $k \to \infty$.

Доказательство. Пусть $\mu > 0$ достаточно мало. По неравенству Маркова, лемме 10.2 и лемме Морица

$$\mathsf{P}(\max_{N_k \leq n \leq N_{k+1}} |S_n - S_{N_k}| > k^{(\alpha+1)(1/2-\mu)}) \leq k^{3(\alpha+1)(1/2-\mu)} \mathsf{E} \max_{N_k \leq n \leq N_{k+1}} |S_n - S_{N_k}| \leq$$

$$\leq C_{10} k^{3(\alpha+1)(1/2-\mu)} k^{3\alpha/2} = C_{10} k^{-3/2+3(\alpha+1)\mu}.$$

Можно взять μ так, чтобы ряд из оцениваемых вероятностей сходился. Тогда по лемме Бореля-Кантелли первое соотношение выполняется с $\varepsilon_2 = \mu$. Второе соотношение доказывается аналогично, только вместо леммы Морица следует учесть, что случайная величина $\max_{N_k \leq t \leq N_{k+1}}(W_t - W_{N_k})$ распределена так же, как модуль случайной величины $(W_{N_{k+1}} - W_{N_k}) \sim N(0, [k]^\alpha)$. $\square$

Пусть для $n \in \mathbb{N}$ число $k = k(n)$ таково, что $N_{k(n)} \leq n < N_{k(n)+1}$. Тогда в силу 11.1 и леммы 11.3

$$S_n - W_n = O(N_{k(n)}^{1/2-\varepsilon}),$$

где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Так как $N_{k(n)} \leq C_{11} n$, то из этого следует утверждение теоремы. $\square$

Замечание 11.4 Пусть $S(t)$ — непрерывная случайная функция на $\mathbb{R}_+$, совпадаюшая в целых точках $t = n$ со значениями последовательности $S_0 = 0$, $S_1, S_2, \ldots$ и линейная на отрезках вида $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда экстремумы этой функции на отрезке с целочисленными концами достигаются в целочисленных точках. Поэтому теорему 10.1 можно переформулировать, утверждая, что

$$S(t) - W(t) = O(t^{1/2-\varepsilon}), \text{ п.н. при } t \to \infty.$$

12 Приложения сильного принципа инвариантности.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых выполняется сильный принцип инвариантности. Введем ту же последовательность $\{W_n, n \in \mathbb{N}\}$ случайных элементов в $C[0,1]$, которая фигурировала в лекции 4, и положим $Z_n = W_n/\sqrt{2 \ln \ln n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 12.1 *Пусть $\varphi : C[0,1] \to \mathbb{R}$ — непрерывное отображение. Тогда последовательность $\{\varphi(Z_n), n \in \mathbb{N}\} \subset C[0,1]$ с вероятностью единица ограничена и множество ее предельных точек совпадает с множеством $\varphi(K)$, где K — шар Штрассена.*

Доказательство. Можно считать, что наши случайные величины уже заданы на вероятностном пространстве, на котором задан винеровский процесс $W = \{W(t), t \geq 0\}$ и справедливо утверждение из Замечания 10.4. Тогда $\|Z_n - \zeta_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, где ζ_n фигурирует в формулировке функционального закона повторного логарифма, а норма берется в $C[0,1]$. Поэтому с вероятностью единица последовательность $\{Z_n, n \in \mathbb{N}\}$ предкомпактна и множество ее предельных точек последовательности есть шар Штрассена.

В силу предкомпактности последовательность $\varphi(Z_n)$ с вероятностью единица ограничена. При этом для любого $n_0 \in \mathbb{N}$ замыкание множества $\{Z_{n_0}, Z_{n_0+1}, \ldots\}$ с вероятностью единица совпадает с K. Поэтому замыкание множества $\{\varphi(Z_{n_0}), \varphi(Z_{n_0+1}), \ldots\}$ совпадает с $\varphi(K)$. $\square$

Следствие 12.2 *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых выполняется сильный принцип инвариантности. Тогда*

$$\limsup_{n\to\infty} S_n/\sqrt{2n \ln \ln n} = 1 \quad \text{п.н.}$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться леммой 12.1, взяв в качестве функционала φ отображение $\varphi(x) = x(1)$. Очевидно, $\sup_{x \in K} x(1) = 1$. $\square$

Лемма 12.3 *Пусть $\mu > 0$ и функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна на множестве $[-1-\mu, 1+\mu]$. Тогда*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(Z_n(i/n)) - \int_0^1 f(Z_n(t))dt \to 0$$

с вероятностью единица, когда $n \to \infty$. Аналогичное соотношение имеет место при замене Z_n на ζ_n.

Доказательство. Для любой непрерывной функции $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ верна оценка

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} g(i/n) - \int_0^1 g(t)dt \right| \leq w_g(1/n),$$

где w_g — модуль непрерывности функции g на отрезке $[0,1]$. Поэтому разность в формулировке леммы не превосходит величины $\sup_{s,t:|s-t|\leq 1/n} |f(Z_n(t)) - f(Z_n(s))|$. Зафиксируем $\varepsilon \in (0,\mu)$. В силу функционального закона повторного логарифма с вероятностью единица при всех достаточно больших n функции Z_n пирнадлежат ε — окрестности K. Тогда $|Z_n(t)| \leq 1+\varepsilon$ при $t \in [0,1]$, а из соотношения $|s-t| \leq 1/n$ следует, что $|Z_n(s) - Z_n(t)| \leq n^{-1/2} + 2\varepsilon$. Следовательно, модуль разности в условии леммы не превосходит величины

$$\sup_{\alpha,\beta\in[-1-\mu,1+\mu]:|\alpha-\beta|\leq n^{-1/2}+2\varepsilon} |f(\alpha) - f(\beta)|,$$

но в силу непрерывности f эту величину можно сделать сколь угодно малой, выбирая ε и достаточно большое n. □

Лемма 12.4 *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых выполняется сильный принцип инвариантности, а $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции. Тогда с вероятностью единица*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^1 f(Z_n(t))g(t)dt = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(Z_n(i/n))g(i/n) = \sup_{x\in K} \int_0^1 f(x(t))g(t)dt.$$

Доказательство. Первое равенство следует из леммы 12.3, а второе — из леммы 12.1 и того, что отображение $x \mapsto \int_0^1 f(x(t))g(t)dt$ непрерывно на $C[0,1]$. □

Следствие 12.5 *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых выполняется сильный принцип инвариантности, $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ при $i \in \mathbb{N}$, а $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда с вероятностью единица*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{g(i/n)S_i}{\sqrt{2n^3 \ln\ln n}} = \|G\|_{L^2[0,1]},$$

где функция $G(t) = \int_t^1 g(u)du$.

Доказательство. По лемме 12.4 достаточно найти $\sup_{x\in K} \int_0^1 x(t)g(t)dt$. Используя представление $x(t) = \int_0^t h(s)ds$, где $h = \dot{x} \in L^2[0,1]$, $\|h\|_{L^2[0,1]} \leq 1$, имеем

$$\int_0^1 x(t)g(t)dt = \iint_{0\leq s\leq t\leq 1} h(s)g(t)ds\,dt = \langle h, G\rangle_{L^2[0,1]},$$

но максимум этой линейной формы, очевидно, достигается на функции $h = G/\|G\|_{L^2[0,1]}$ и равен $\|G\|_{L^2[0,1]}$. □

Следствие 12.6 *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых выполняется сильный принцип инвариантности, $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ при $i \in \mathbb{N}$. Тогда с вероятностью единица*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{|S_i|}{\sqrt{2n^3 \ln\ln n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Доказательство. Задача сводится к нахождению $\sup_{x\in K} \int_0^1 |x(t)|dt$. Легко видеть, что максимум достаточно искать только по неотрицательным функциям x (замена функции x на ее модуль лишь меняет знак функции $\dot{x}$ в некоторых точках отрезка). Но по вычислению, проведенному в предыдущем следствии, $\sup_{x\in K} \int_0^1 x(t)dt = 1/\sqrt{3}$. $\square$

Следствие 12.7 *Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых выполняется сильный принцип инвариантности, $S_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$ при $i \in \mathbb{N}$. Тогда с вероятностью единица*

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i^2}{2n^2 \ln\ln n} = \frac{4}{\pi^2}.$$

Доказательство. Задача сводится к нахождению $\sup_{x\in K} \int_0^1 x^2(t)dt$. Сохраняя те же обозначения, что в Следствии 11.5, имеем

$$\int_0^1 x^2(t)dt = \int_0^1 \int_0^t \int_0^t h(s)h(u)ds\,du\,dt = \int_0^1 \int_0^1 h(s)h(u)(1 - s \vee u)ds\,du = \langle Qh, h\rangle_{L^2[0,1]},$$

где линейный оператор $Qh(s) = \int_0^1 h(u)(1 - s \vee u)du$. Согласно теореме Гильберта-Шмидта максимум данной квадратичной формы совпадает с максимальным собственным значением интегрального оператора Q. Найдем его:

$$\int_0^1 h(u)(1 - s \vee u)du = \lambda h(s),$$

$$(1-s)\int_0^s h(u)du + \int_s^1 h(u)(1-u)du = \lambda h(s),$$

$$-\int_0^s h(u)du = \lambda h'(s),$$

$$h(s) = -\lambda h''(s).$$

Следовательно, $h(s) = C_1 \cos(s/\sqrt{\lambda}) + C_2 \sin(s/\sqrt{\lambda})$. Из второго и третьего равенств вытекает, что $h(1) = h'(0) = 0$, поэтому $C_2 = 0$ и $\cos(1/\sqrt{\lambda}) = 0$. Таким образом, собственные значения Q имеют вид $(\pi/2 + \pi k)^{-2}$, $k \in \mathbb{Z}_+$. $\square$

13 Задачи

1. Пусть $\xi_n \sim N(a_n, \sigma_n^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Доказать, что $\xi_n \to \xi$ по распределению тогда и только тогда, когда $a_n \to a$ и $\sigma_n^2 \to \sigma^2$, $n \to \infty$ (и тогда $\xi \sim N(a, \sigma^2)$).

2. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность k-мерных случайных векторов и $\xi_n \sim N(a_n, B_n)$ (здесь $a_n \in \mathbb{R}^k$ и B_n — симметричные неотрицательно определенные матрицы, $n \in \mathbb{N}$). При каком условии на последовательности $\{a_n\}$ и $\{B_n\}$ она плотна?

3. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ — последовательность k-мерных случайных векторов, причем известно, что для любого $v \in \mathbb{R}^k$ последовательность скалярных произведений (ξ_n, v) имеет предел по распределению. Следует ли из этого, что сама последовательность $\{\xi_n\}$ сходится по распределению?

4. Пусть $\{\xi_n, n \in \mathbb{N}\}$ и $\{\eta_n, n \in \mathbb{N}\}$ — две последовательности случайных элементов, принимающих значения в метрических пространствах S и T соответственно. Предположим, что $\xi_n \to \xi$ и $\eta_n \to \eta$ при $n \to \infty$, и что при каждом $n \in \mathbb{N}$ случайные элементы ξ_n и η_n независимы. Доказать, что последовательность $\{(\xi_n, \eta_n), n \in \mathbb{N}\}$ случайных элементов в $S \times T$ имеет предел по распределению, и описать его.

5. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин, причем $C := \sup_n \mathsf{E}|X_n|^\delta < \infty$ (при некотором $\delta > 0$). Доказать, что последовательность их распределений плотна.

6. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин со средним 0 и дисперсией 1. Найти предельное распределение последовательности $n^{-1} \sum_{i=1}^n S_i^2$ при $n \to \infty$ (здесь $S_i = \sum_{j=1}^i X_j$, $i \in \mathbb{N}$).

7. Найти расстояние в $D[0,1]$ между функциями $I_{[1/2,1]}$ и $I_{[3/4,1]}$.

8. Пусть $W = \{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Найти

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\int_0^t sW(s)ds}{\sqrt{2t^5 \ln\ln t}}.$$

   Пусть $W = \{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Найти

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{s\in[0,1]}(1-s)W(s)}{\sqrt{2t \ln\ln t}}$$

   (указание: максимумы можно переставлять).

9. Пусть $W = \{W(t), t \geq 0\}$ — винеровский процесс. Найти

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{tW(t) + \int_0^t W(s)ds}{\sqrt{2t^3 \ln\ln t}}.$$

Список литературы

[1] П. Биллингсли.Сходимость вероятностных мер. М., Наука, 1977.

[2] А.В. Булинский, А.П. Шашкин. Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем. М., ФИЗМАТЛИТ, 2008.

[3] А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М., Наука, 1976.

[4] А.Н. Ширяев. Вероятность. М., МЦНМО, 2007.

[5] W. Strassen. An invariance principle for the law of the iterated logarithm. Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete. 1964. V. 3. P. 211–226.