Уточнение "теории спекуляции"Л.Башелье

А. И. Нейштадт, $\boxed{\text{Т. В. Селезнева}}$, В. Н. Тутубалин, Е. Г. Угер *

1 Общее введение

Век назад Л.Башелье опубликовал свою (знаменитую теперь) диссертацию [1]. Ее основная идея состоит в том, что вероятностные методы математической физики могут быть использованы для анализа динамики рыночных цен, если от самих цен активов перейти к их приращениям. На современном нам языке речь идет о концепции случайного процесса со стационарными приращениями. Примерно через полвека было осознано, что правильно сначала перейти к логарифмам цен: возникла концепция геометрического (экономического) броуновского движения П. Самуэльсона (см., напр. [2]). Она заключается в том, что приращения

$$\Delta_h \ln S_t = \ln S_{t+h} - \ln S_t, \tag{1}$$

где S_t - рыночный курс, имеют нормальное распределение с какими-то (не зависящими от t) параметрами. Эта замена переменной оказалась исключительно удачной: приращения (1) в самом деле оказываются примерно стационарными (и независимыми) на очень больших отрезках времени (порядка нескольких лет). На основе этой модели в стохастической финансовой математике было сделано второе (после Башелье) существенное открытие: разработана теория хеджирования опционов. Но вскоре после своего возникновения модель Самуэльсона подверглась серьезной критике. Дело в том, что расширившиеся возможности обработки данных позволили изучать тысячи, а затем и многие тысячи, миллионы и т.д. значений рыночных цен, а на массивах такого объема эта простая модель не согласуется с фактическими данными.

В начале 60-х годов Мандельброт обработал несколько тысяч цен на хлопок и выдвинул гипотезу устойчивых распределений для приращений (1) (см. недавнее изложение этих работ в книге [3]). В дальнейшем эта гипотеза не получила единодушного признания и были выдвинуты многие другие. Например, Кларк в [4] предложил в качестве модели смесь нормальных распределений по масштабному параметру. Барндорф-Нильсен [5] и затем Эберляйн с соавторами [6] предложили семейство гиперболических распределений, хвосты которых убывают по показательному закону (т.е медленнее, чем хвосты нормального распределения, но быстрее, чем хвосты устойчивых законов). Разрабатывались и модели зависимости приращений

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант N 00-01-00247).

(1), в частности, так называемые условно гетероскедастичные модели, называемые также моделями типа ARCH, GARCH и т.п. (см., напр., обзор Шепарда [7]).

На основании собственных экспериментов по обработке фактических данных авторы данной работы пришли к выводу, что предложенные уточнения модели геометрического броуновского движения малоэффективны. В отношении моделей типа GARCH этот вывод независимо получили также Микош и Старика (сравните работы [8, 9]). Дело в том, что статистическая устойчивость приращений (1) имеет место лишь в грубом приближении: примерно в тех пределах, в каких действует модель геометрического броуновского движения. Отклонения от этой модели недостаточно статистически устойчивы, чтобы можно было говорить о каком-то их распределении, отличном от нормального. К этому выводу приводят простейшие эксперименты, когда длинный ряд наблюдений цен фиксированного актива делится на две или несколько частей в хронологическом порядке, а затем изображаются эмпирические функции распределения приращений (1) при каком-то фиксированном h, например, при $h = 1$ день (однодневные приращения цен закрытия торгов). Для разных частей ряда эти эмпирические функции могут значительно отличаться. Например, может быть так, что они близки в той области, где действует нормальный закон. Но может быть и так, что и в этой области стандартные отклонения существенно различны, т.е. данные статистически неоднородны не только в области хвостов. Конечно, тесты по правилам проверки статистических гипотез возможны лишь в том случае, когда приращения (1) предполагаются независимыми или когда их зависимость описывается определенной статистической моделью. Опровергнуть гипотезу сколь угодно сложной статистической зависимости, но сохранения вероятностной структуры при сдвигах времени (т.е. стационарности) невозможно. (Гипотеза стационарности выдвигается, в частности, Мандельбротом в книге [3].) Но мы предлагаем обсудить более простой взгляд на вещи. Он заключается в следующем.

Приращения (1) для достаточно больших h, в частности при $h = 1$ день, имеют нормальное распределение с нулевым средним (поскольку при оценке среднего по фактическим данным никакого устойчиво отличного нуля числа не получается) и с переменным стандартным отклонением $\sigma(t)$. В финансовой математике величина $\sigma(t)$ называется волатильностью, но при оценках приходится иметь дело с величиной $\sigma^2(t)$, которая не называется никак, и это неудобно. Мы предлагаем для последней величины название "температура"по аналогии с физическим броуновским движением (для которого коэффициент диффузии σ^2 пропорционален, как известно, первой степени абсолютной температуры). Температура считается некоторой неизвестной (но подлежащей оценке) функцией времени. Таким образом, если образовать выборку значений приращений (1) при значениях t, меняющихся в каких-то пределах, то у нее не будет никакого теоретического закона распределения. По нашему мнению, правильный ответ на вопрос о том, какому закону точно удовлетворяет распределение приращений (1), состоит в том, что никакому. В литературе установился взгляд, что волатильность цен актива является стохастической. По нашему мнению, она является просто переменной во времени и о ее стохастичности, т.е. о статистически устойчивых при сдвиге времени свойствах, априори говорить не стоит. Надо сначала ее оценить, а уж потом решать, можно ли эту функцию времени описывать в вероятностных терминах (по нашим данным, ответ отрицательный, по крайней мере, для описания в целом за длительное время).

Наглядный образ - это физическое броуновское движение в среде переменной температуры. Конечно, физики начала XX века, измерявшие коэффициент диффузии броуновской частицы с целью определения числа Авогадро, прекрасно знали о его зависимости от температуры, но допустим ради литературной метафоры, что это не так. Таким образом, результаты измерений в разные дни в одной и той же лаборатории могли бы быть несколько различными, в зависимости от погоды и условий отопления лаборатории (начало XX века: отопление еще печное). Уместна ли в такой ситуации стохастическая температура? Только лишь в ансамбле многих лабораторий и различного времени года, но такого ансамбля реально нет.

Можно говорить о переменной температуре (волатильности), а можно о переменном ходе биржевого (операционного) времени. Это два эквивалентных способа думать о переменном масштабном параметре. Мы предпочитаем говорить о температуре, управляемой некоторыми внешними, не полностью отражаемыми в динамике рыночных цен воздействиями. Кроме того, переменный ход биржевого времени слишком завязан на представление о его стохастичности, в то время как мы считаем целесообразным избегать априорно принимаемой стохастичности. Поэтому мы предпочитаем говорить о температуре, зависящей от физического (т.е. равномерно текущего) времени.

Может показаться, что спор о том, является ли температура просто неизвестной априори функцией физического времени или случайной функцией (для которой эффективно то или иное вероятностное описание) является чисто схоластическим. Но это не так: от выбора той или иной точки зрения существенно зависит порядок действий в тех или иных прикладных целях. Для приложений обычно важно составить себе представление о распределении вероятностей будущих приращений цен активов. Если мы принимаем представление о стохастической температуре (или операционном времени), то мы будем стараться привлечь возможно больший материал прошлых наблюдений, чтобы точнее оценить соответствующие распределения вероятностей. Если же температура просто переменна, то мы постараемся использовать данные по возможности недавнего прошлого, предполагая, что за сравнительно небольшой отрезок будущего времени температура не успеет существенно измениться. Привлечение уточненных и потому более сложных моделей распределений вероятностей в этом случае особого смысла не имеет, а предлагается ограничиться тем нормальным распределением, которое рассматривал еще Башелье (с поправкой за счет логарифмирования). Это и есть уточнение "теории спекуляции"Башелье, который предполагал (в наших терминах) температуру постоянной.

Представление о переменной температуре может быть научно содержательным, если одновременно предлагается какой-то способ ее измерения. Мы предлагаем измерять температуру по динамике тиковых цен в течение одной или нескольких биржевых сессий (тиковые цены - – это объявления цен спроса и предложения). При измерении любых функций времени точность измерения конфликтует с разрешающей способностью во времени. Для оценки возможностей в этом смысле того "термометра", которым мы пользуемся, мы сначала изучаем распределения приращений цен в микромасштабе по времени (при $h = 10$ минут). Эти распределения можно было бы исследовать с помощью семейств вероятностных законов, которые упоминались выше, например, с помощью гиперболических законов. Но финансовые данные довольно грубы и связаны некоторыми произвольными ограничениями. Большая точность при их исследовании неуместна. Мы предлагаем упрощенный способ исследования с помощью так называемого "растянутого нормального распределения"(см. ниже). Дело сводится к тому, что бесселевы функции, через которые выражаются гиперболические законы, заменяются на квадратный трехчлен.

Обсуждаются также возможности приложений предлагаемой модели с переменной температурой. Хотя работа Башелье и называется "теория спекуляции", но получилась такая теория, которая принципиально отрицает самую возможность прибыльных спекуляций: ведь современная стохастическая финансовая математика ориентируется на модели динамики цен, близкие к мартингалам (см. монографию А.Н.Ширяева [10]). Конечно, при спекуляциях, связанных, например, с опционами, нельзя обойтись без применения соответствующей теории, но нам представляется, что настоящая сфера приложений этой науки другая. Это регулирование рыночной волатильности или ограничение ее последствий законодательными средствами, которое в настоящее время еще только начинает намечаться. В сравнении с этим обслуживание интересов отдельных спекулянтов - дело, сравнительно, второстепенное. Обсуждение приложений ориентируется на вопрос формирования банковских резервов.

2 Техническое введение.

Мы работали с фактическими данными о ценах акций некоторых американских компаний за период 1990 - август 1998 г. В основном, обрабатывались данные о ценах акций произвольно выбранной компании HWP (Hewlett-Packard), причем результаты частично сопоставлены с данными по другим компаниям. Данные о ценах сделок сводились к ежедневным ценам закрытия. Тиковые данные (т.е. данные об объявлениях цен спроса и предложения) были представлены в виде файлов, содержащих все объявления. Эти объявления поступают теоретически за время между 9 час. 30 мин. и 16 часами каждого биржевого дня, но небольшая часть может фактически поступить чуть позже 16 часов (эти данные мы отбросили).

Данные о ценах и тиковые данные имеют ряд особенностей, которые не учитываются в теоретических моделях динамики цен. Начнем с того, что в диссертации Башелье [1] имеется довольно существенная экономическая ошибка. (Речь не идет о нестрогостях математического плана, в которых упрекали Башелье некоторые математики. По нашему мнению, Башелье писал в обычном жанре математической физики, для которого особая математическая строгость по существу неуместна). Но дело в том, что Башелье работал с рентой, по которой полагались систематические купонные выплаты. В день этих выплат рыночная цена ренты, естественно, падала на сумму выплаты. Это падение не укладывается в модель броуновского движения, которое непрерывно во времени. Путем некоторых непонятных рассуждений Башелье приходит к выводу, что купонные выплаты можно все-таки уложить в модель непрерывного процесса, если к броуновскому движению добавить постоянный во времени положительный снос, который за год увеличивает среднее значение цены как раз на сумму выплат. Понятно, что такое (т.е. систематический рост рыночных цен на ренту) экономически совершенно невозможно, потому что рента выпускалась на вечные времена, т.е. услуга в виде купонных выплат, которая предоставлялась покупателю ренты, все время оставалась той же самой. Самуэльсон [2] поправил ошибку Башелье, сказав (научно правильно, но историко-научно - ошибочно), что Башелье считал снос реальных рыночных цен нулевым. Но проблема осталась и в настоящеее время для курсов тех акций, по которым выплачиваются дивиденды. Выплата дивидендов, в общем, предсказуема, хотя и не с такой абсолютной точностью, как купонные выплаты по ренте. И конечно, в дни выплаты дивидендов (т.е. один-два раза в год) происходит соответствующее предсказуемое падение курсов акций. При образовании файла данных для приращений (логарифмов) цен следовало бы исключить эти дни, но наша база данных не содержит этой информации. Уже по этой причине часть данных (порядка 1%) для ежедневных приращений цен закрытия должна считаться дефектной. Имеются, конечно, и другие причины (типа биржевых паник), которые могут нарушить статистическую однородность исходных данных (не говоря уж о предполагаемых колебаниях волатильности/температуры во времени). В общем, вряд ли разумно требовать описания хвостов распределений в области вероятностей порядка 0.01 и менее.

Тиковые данные имеют еще более выраженные отрицательные особенности. Слишком большие для наших компьютеров файлы тиковых данных мы несколько преобразовали по следующим правилам. Во-первых, мы (как это обычно делается в финансовой математике) рассматриваем условную (среднегеометрическую) цену, логарифм которой равен полусумме логарифмов цен спроса и предложения. Во- вторых, мы дискретизовали файлы исходных данных с шагом по времени 10 минут следующим образом. Для каждого биржевого дня рассматриваются 39 моментов времени с шагом 10 минут, первый из которых есть 9 час 30 мин, а последний 15 час 50 мин. К началу первого интервала (т.е. к 9 час 30 мин) привязывается первое объявление цены в интервале от 9-30 до 9-40, а остальные объявления в этом интервале отбрасываются. Так же привязываются данные к началам остальных десятиминутных интервалов. Однако если в каком-то из этих десятиминутных интервалов не было ни одного тика, то к его началу привязывается цена, уже привязанная к началу предыдущего интервала. Время между 16 часами одного дня и 9-30 следующего биржевого дня отбрасывается, так что точка 9-30 следующего дня занимает положение 16 часов предыдущего дня. Таким образом, для каждого дня возникают 39 (а не 38) приращений цен с шагом по времени 10 минут.

Важнейшая отрицательная черта этих данных состоит в том, что значительное количество десятиминутных приращений (до 40 и более процентов) точно равны нулю. Среди приращений ежедневных цен закрытия тоже довольно значительное количество нулей (несколько процентов). Такая особенность формально исключает моделирование распределений приращений с помощью тех или иных плотностей вероятностей. К тому же доля точно нулевых приращений не остается примерно постоянной во времени: она постепенно падает (в то время как курс акций со временем, в общем, растет). В этом смысле стационарность во времени определенно нарушается. Видимо, основная причина появления большого количества нулевых приращений заключается в дискретности шага, с которым может меняться цена акций. На американских рынках целые доллары цены акций считаются, разумеется, по десятичной системе, но дроби - по двоичной, причем далее 1/32 доллара не идут. Шаг в 1/32 доллара слишком велик (не для самих цен акций, но для их приращений, особенно 10-минутных): он навязывает возможным приращениям логарифма цены некоторую неудобную дискретную структуру, которую вряд ли стоит точно отражать в математических моделях. Понятно также, что вряд ли стоит применять шаг по времени меньше 10 минут.

Ввиду таких особенностей реальных данных мы применяем грубые приемы их обработки. Мы строим эмпирические функции распределения для приращений реальных данных в нормальном масштабе, но в области квантилей, близких к медиане, объявляем их как бы испорченными. (Примерно как Башелье рассматривал "истинные"цены в противовес реальным рыночным.) Мы говорим о "виртуальных"приращениях логарифмов цен, которые в области вероятностей <0.16 и >0.84 имеют те же квантили, что и реальные приращения, а в промежутке между этими числами имеют квантили, совпадающие с квантилями нормального закона. Вопрос состоит в том, можно ли с помощью виртуальных 10-минутных приращений тиковых данных объяснить определенные черты реальных ежедневных приращений цен закрытия. По нашему мнению, в результате экспериментов получается, что можно.

3 Растянутое нормальное распределение.

В компьютерную эпоху в значительной степени потеряла актуальность одна из основных задач классической математической статистики - задача о подборе того или иного параметрического распределения по эмпирической функции распределения исходных данных. Можно прямо пользоваться эмпирической функцией (если угодно - несколько сглаженной), вычисляя по ней моменты, свертки и все что угодно с помощью компьютера. Но если нужно соединить в единой обработке большое количество различных эмпирических распределений, то опять приходится обращаться к параметрическим семействам. Мы используем тот тривиальный факт, что любое непрерывное распределение можно преобразовать в любое другое с помощью монотонной замены переменной, но делаем это с одновременным исключением масштабного параметра.

Напомним, что при изображении функций распределения в нормальном масштабе ось ординат индексируется значениями параметра z, понимать которые надо как вероятности, равные $\Phi(z)$, где Φ — функция Лапласа. Соответствующие квантили обозначаются через $q(z)$ или через q_z. Например, излюбленными в классической статистике точками являются квантили q_{-1}, q_0, q_1, отвечающие значениям $z = -1, 0, 1$ (в случае нормального закона $q_1 - q_{-1} = 2\sigma$, где $\sigma-$ стандартное отклонение), q_0- это, другими словами, медиана.

Теперь определим понятие *функции растяжения квантилей* $R(z)$. (Точнее следовало бы сказать "функция растяжения квантилей по отношению к некоторым двум базовым нормальным распределениям".) Формально оно пригодно для (почти: см. ниже) любой функции распределения $G(x)$.

Для любой функции распределения $G(x)$ рассмотрим два нормальных закона: левый, у которого квантили q_{-1} и q_0 совпадают с квантилями $G(x)$ и правый, у которого совпадают q_0 и q_1. Левый закон рассмотрим при $x \le q_0$, а правый при $x \ge q_0$. Тогда вся функция $G(x)$ с какой-то точностью аппроксимируется двумя полупрямыми (в нормальном масштабе), составленными из левого и правого нормального закона. Дальнейшее предполагает, что $q_{-1} < q_0, \quad q_1 > q_0$ (строгие неравенства).

Опишем теперь точно функцию $G(x)$, опираясь на указанную кусочно-нормальную аппроксимацию. Введем функцию $R(z)$, опять-таки, состоящую из двух кусков: $R(z) = R_-(z)$ при $z \le 0$ и $R(z) = R_+(z)$ при $z \ge 0$ (причем $R(0) = 0$). Именно, положим

$$R_-(z) = -(q_z - q_0)/(q_{-1} - q_0), \quad R_+(z) = (q_z - q_0)/(q_1 - q_0),$$

где q_z — квантиль функции G. Понятно, что по функции $R(z)$ однозначно восстанавливается функция G (квантили q_{-1}, q_0, q_1 считаются заданными). В случае нормального закона G имеем: $R(z) \equiv z$. Тяжелые хвосты изображаются тем, что при больших значениях $|z|$ значение $R(z)$ по модулю больше $|z|$ (при близости $R(z)$ к z в средней части распределения). Возникают два масштабных параметра: левый $(q_0 - q_{-1})$ и правый $(q_1 - q_0)$ и две функции $R_-(z)$ и $R_+(z)$, которые вместе с медианой q_0 однозначно задают $G(x)$ через значения квантилей.

Для аналитических операций (типа, например, композиции) задание $G(x)$ в указанном виде крайне неуклюже. Но для метода Монте-Карло очень удобно. Например, ясно, что случайная величина η с законом распределения $G(x)$ создается из стандартной нормальной величины $\xi \sim N(0,1)$ с помощью следующей формулы:

$$\eta = q_0 + (q_1 - q_0) R_+(\xi) \quad \text{при} \;\; \xi \ge 0\,,$$

$$\eta = q_0 + (q_0 - q_{-1}) R_-(\xi) \quad \text{при} \;\; \xi \le 0\,. \tag{2}$$

Эмпирической функцией растяжения квантилей назовем то же самое, но построенное по эмпирической функции распределения (единственное требование: $q_{-1} < q_0, \quad q_1 > q_0$).

Особо отметим симметричный случай, который можно определить равенством $q_{-z} = -q_z$ при любом z. В этом случае все упрощается за счет равенств

$$-q_{-1} = q_1 = q\,, \quad q_0 = 0\,, \quad R_-(-z) = -R_+(z).$$

Этот случай является для нас основным.

Каким числом параметров может характеризоваться произвольная функция распределения $G(x)$? Имеются три параметра q_{-1}, q_0, q_1 и две функции $R_-(z)$ и $R_+(z)$. Если каждую из этих функций удастся охарактеризовать всего одним параметром, то вместе получается 5 параметров. Именно такое число параметров предлагается в [11] для обобщенного гиперболического распределения. Мы видим, что, в принципе, это число не завышено. Априори финансовые данные не обязаны быть симметричными. Но фактические данные, которые описываются ниже, убедили нас, что для приращений логарифмов цен акций нельзя найти устойчивых (во времени) отклонений от симметрии. Например, мнение о том, что левый хвост распределения (падение курса) тяжелее, чем правый (повышение курса) устойчиво не подтверждается. Поэтому мы ограничились симметричным случаем, для которого нужно два параметра: масштабный параметр q $(= q_1 = -q_{-1})$ и параметр формы, описывающий функцию $R(z)$. В этом случае моделирование случайной величины η упрощается и соответствующая формуле (2) формула принимает вид

$$\eta = qR(\xi) = qR(|\xi|)\mathrm{sgn}\xi\,, \tag{3}$$

где $\xi \sim N(0,1)$.

4 Первые результаты статистической обработки

За время набора статистики приращений $\Delta_h \ln S_t$ $(h = 10\,\text{мин.}$, S_t- условная, т.е. среднегеометрическая цена, дискретизованная по времени, как описано выше) мы приняли один календарный месяц. При 39 значениях приращения за сутки это составляет примерно 800 наблюдений ("примерно"потому, что число рабочих дней в месяце колеблется). Из реальных приращений, вычисленных по фактическим данным, мы создали, так сказать, *виртуальные* приращения, квантили которых при $|z| \le 1$ совпадают с квантилями нормального закона, а при $1 \le |z| \le 3$ берутся из наблюдений. Из наблюдений же берется и масштабный параметр $q = (q_1 - q_{-1})/2$, где q_1 и $q_{-1}-$ эмпирические квантили (к счастью, для акций HWP всегда выполняется неравенство $q_{-1} < 0 < q_1$, а есть акции, для которых это не так; для таких акций лучше увеличить шаг дискретизации цен по времени). Главный вопрос состоит в том, связаны ли статистические свойства этих виртуальных приращений (к тому же не реальных цен сделок, а условной – среднегеометрической – цены) со свойствами ежедневных приращений цены закрытия.

Обратимся сначала к рис. 1, на котором представлены (с шагом по z, равным 0.1) графики "растяжки", т.е. эмпирической функции растяжения квантилей для данных по девяти январям (1990 – 1998 гг.). (При этих вычислениях медиана q_0 априори принималась равной нулю, да впрочем, всегда так и было для фактических данных из-за большого процента нулей. Масштабный параметр q оценивался как $(q_1 - q_{-1})/2$, но симметрия при замене $z \to (-z)$ априори не предполагалась.) Рассмотрим среднюю кривую на рис. 1. При $|z| < 1$ она частью равна нулю, частью имеет изломы (но область $|z| < 1$ мы априори исключили из рассмотрения), а в области $1 \le |z| \le 3$ она имеет прекрасный гладкий вид. На глаз, она достаточно симметрична ($R(-z) = -R(z)$); во всяком случае, если и есть какие-то отклонения от симметрии, они невелики в сравнении с шириной "метлы", образованной данными по отдельным месяцам.

Сделав несколько проб параметрического выражения усредненной кривой, мы остановились на зависимости $R(z)$, имеющей вид сплайна линейной и квадратичной функции (склеивание происходит в точке $z = 1$), а именно

$$R(z) = z + a(z-1)^2 J(z > 1), \quad z \ge 0; \qquad R(-z) = -R(z). \tag{4}$$

Мы не раскаялись в выборе такой параметрической формы при обработке данных по другим календарным месяцам (не представленных на рис. 1), а также данных для других компаний (не HWP). Параметр формы a можно определять по значению $R(z)$ в точке $z = 3$: например, на рис. 1 $R(3) = 7$, откуда $a = 1$, но для большей научности мы приняли следующий способ его определения. Во-первых, эмпирически найденная функция $R(z)$ при $z \le -1$ симметрично отражается на полуось $z \ge 1$ и усредняется с уже имеющейся $R(z)$ при $z \ge 1$. Получаются 20 значений R_k некоторой (усредненной) функции в точках $z_k = 1 + 0.1k$, $k = 1, \ldots, 20$. Для каждого значения определяется значение a_k (из уравнения $R_k = z_k + a_k(z_k - 1)^2$), а потом в качестве оценки $\hat{a}$ для a из уравнения (4) берется *медиана* значений a_k. Получилось что-то вроде робастного способа оценки a. Мы рассмотрели динамику получающихся оценок для a по последовательным отрезкам данных длиной в 1 месяц и нашли, что получаемые величины примерно постоянны. (Для акций HWP мы в дальнейшем при приближенных расчетах пользовались значением $a = 1$).

Обработка данных по другим месяцам дала сходные результаты (это означает, что каких-либо сезонных эффектов в наших данных не выявлено).

Таким образом, распределение 10-минутных приращений явно не нормальное (распределения, задаваемые формулой (4), мы будем называть *растянутыми нормальными*). Но вместо функций Бесселя, предлагавшихся для описания ненормальных распределений в [5,6, 11], мы используем квадратный трехчлен (4) (точнее, сплайн линейной функции с параболой).

Теперь, полагая, что функции распределения 10-минутных приращений достаточно описаны формулой (4) с $a = 1$ и какими-то (*своими* для *каждого месяца* и даже, вполне возможно, для каждого *отдельного дня торгов*) значениями масштабного параметра q, мы будем пытаться складывать из *виртуальных* 10-минутных приращений *реальные* ежедневные приращения цен закрытия

Прежде всего, возникает вопрос о независимости 10-минутных приращений. Подсчет эмпирических структурных функций привел к тому выводу, что они неотличимы от прямых линий, да впрочем, понятно, что невозможно разобраться одновременно и в статистической неоднородности и в статистической зависимости. Таким образом, независимость приращений принимается. Растянутые нормальные распределения имеют очень большой эксцесс (см. ниже). Поэтому возникло предположение о том, что при суммировании 39 таких независимых величин распределение суммы, возможно, отличается от нормального. (А эта сумма как раз и моделирует ежедневные приращения цен закрытия.) Но подсчет композиции методом Монте-Карло дал отрицательный результат: в области квантилей q_z, отвечающих значениям z, которые по модулю меньше трех (а более широкую область нет смысла рассматривать), получалось идеальное нормальное распределение. Хвосты распределения 10-минутных приращений не столь тяжелы, чтобы дать при суммировании заметное отклонение от нормального закона. Остается объяснять тяжелые хвосты ежедневных приращений колебаниями во времени масштабного параметра q.

Динамика оценок параметра q по выборкам данных, отвечающих одной календарной неделе, представлена на рис.2. (Одна календарная неделя — это 5 биржевых дней, что дает 195 значений 10-минутных приращений.) Следует заметить, что при одном взгляде на этот график совершенно отпадает мысль о полезности трактовки значений q как случайного процесса. Действительно, за 8 с лишним лет наблюдений состоялись всего лишь 2 или 3 крупномасштабных колебания величины этого параметра. Если для независимых наблюдений количество статистической информации грубо оценивается числом наблюдений, то для случайных процессов исстари рекомендуется оценивать это количество по числу данных в наблюдениях волнообразных колебаний, а здесь оно совершенно ничтожно. Надо пользоваться отдельными значениями масштабного параметра, и решительный (на наш взгляд) эксперимент состоял в следующем.

Берется тот отрезок времени, для которого имеются как ежедневные данные о ценах закрытия, так и тиковые данные (это 1990 – начало 1997 года). Ежедневных разностей в этом отрезке наблюдений оказалось 1826. Весь материал разбивается хронологически на условные "недели"(по 5 или более рабочих дней) по правилу: для каждого месяца создаются 3 первые "недели"по пять рабочих дней каждая, а остальные рабочие дни месяца объединяются в четвертую "неделю". Каждая ежедневная разность имеет вид $\delta_t = (\ln S_{t+1} - \ln S_t)$, где $t-$ календарный день. Эта разность нормируется ее стандартным уклонением, которое вычисляется по следующему правилу. Рассматриваем 10-минутные фактические данные за ту "неделю", в которую входит день t, и с ними поступаем двояко.

1) Определяем параметр q, рассчитываем по этому q и $a = 1$ дисперсию $E\eta^2$ виртуального 10-минутного приращения (она равна $1.94\,q^2$, что получается в силу формул (3) и (4)

путем взятия интегралов), и наконец, трактуем $39E\eta^2$ как дисперсию δ_t. (Способ $delq$).

2) $E\eta^2$ оцениваем по сумме квадратов тех 10-минутных приращений, которые попали в указанную неделю. (Способ $dels$).

Ожидается, что для нормированных $\delta_t/\sqrt{D\delta_t}$ получится стандартное нормальное распределение $N(0,1)$.

Результаты даны на рис. 3 и 4. Рис. 3 дает распределение 1826 значений δ_t, нормированных по способу $delq$. Нормальность сохраняется до значений $|z| \approx 2.3$. На рис. 4 то же самое , что на рис. 3, но с нормировкой по способу $dels$. Здесь нормальность вплоть до $|z| \approx 2.8$.

Сделаем одно терминологическое замечание. Под смесью нормальных распределений (по масштабному параметру) понимается распределение случайной величины $U\xi$, где U — случайная величина, принимающая положительные значения, ξ — стандартная нормальная случайная величина и величины U и ξ независимы. Выборка из смеси нормальных распределений может быть получена как набор независимых значений $U_i\xi_i$. Нашу выборку ежедневных приращений мы представляем себе как такой же набор величин $U_i\xi_i$, но величины U_i просто переменные и свойствами статистической устойчивости не обладают. Иными словами, речь идет о том, что выборка — это смесь значений нормальных величин с различными масштабными множителями, а теоретического распределения, отвечающего такой выборке, строго говоря, не существует. (Строго говоря, и сам термин "выборка"здесь не должен применяться.) Различие между двумя способами выражаться, на первый взгляд, представляется чисто схоластическим, но становится существенным, если говорить о прогнозе для распределения вероятностей будущих приращений. В первом случае (теоретической модели в виде смеси нормальных распределений) нужно использовать все доступные прошлые данные, чтобы возможно точнее идентифицировать распределение вероятностей. Во втором случае на прошлые данные надежды нет, и нужно оценить температуру (волатильность) по возможно недавнему прошлому (рассчитывая на то, что в достаточно близком будущем она, вероятно, мало изменится) и воспользоваться нормальным распределением.

В этом втором случае возможность использования 10-минутных приращений важна: за каждый день вместо одного наблюдения (приращения логарифма цены закрытия) мы получаем 39 наблюдений. Но следует обратить внимание на то, что с оценкой температуры по этим наблюдениям связана некая не вполне решенная проблема.

Рисунки 3 и 4 хороши в том смысле, что демонстрируют нормальное распределение вплоть до таких хвостов, вероятность которых не более 0.01 (а лучшего и не следует ожидать). Цензура одного процента крайних слева и справа наблюдений (т.е. по полпроцента с каждой стороны) приводит данные к полному согласию с нормальным законом. Это означает, что нормальное распределение, с которого начинал Башелье, должно быть восстановлено в правах достаточно точной теоретической модели. Однако стандартное отклонение нормальных распределений, представленных на рис. 3 и 4, несколько больше теоретической единицы. Оба способа оценки температуры по 10-минутным приращениям несколько недооценивают дисперсию ежедневных приращений, причем способ $delq$ чуть больше, чем способ $dels$.

В принципе, это явление должно быть исследовано на акциях многих компаний. Но пока это не сделано. Мы будем предполагать, что такая недооценка температуры может быть устранена как систематическая ошибка термометра.

5 Выбор термометра

Мы как бы находимся в положении физика, который догадывается о статистической неоднородности приращений броуновского движения, но не имеет термометра и вынужден создавать его с помощью тех же наблюдений над броуновским движением. Одно из предложений Кларка [4] можно интерпретировать как измерение биржевой температуры в данный день по объему торгов. (Эта цифра сообщается биржей вместе с ценой закрытия.) Кларк работал с фьючерсными ценами на хлопок в конце сороковых — начале пятидесятых годов, когда цены отдельных сделок в течение сессии (либо тиковые данные) еще не могли быть доступны для исследования. У него получается тот вывод, что дисперсия приращения логарифма цены пропорциональна объему торгов в степени 2.15 для одного набора данных и в степени 2.18 для другого набора, что, наверно, можно понять и просто как объем торгов в квадрате. Точнее говоря, реальный объем торгов — это оценка (по одному наблюдению) для математического ожидания объема торгов за данный день, а это математическое ожидание (в квадрате), видимо, и измеряет температуру (если переводить на наш язык с языка Кларка, который рассуждал в терминах стационарного во времени распределения вероятностей). С помощью одного наблюдения в день можно устроить и другой термометр — по квадрату приращения логарифма цены. Сравнивать два подобных термометра следует по накопленной (кумулятивной) температуре. Так называется функция (дискретного аргумента), равная сумме значений соответствующих величин за время от некоторого 0 (начала отсчета) до данного дня t. Рисование таких графиков является стандартным приемом математической статистики, который легко позволяет судить о постоянстве математического ожидания складываемых случайных величин (тогда графики похожи на прямые линии), либо о его изменениях во времени (тогда наклон кривых меняется). На рис. 5 представлены две такие кривые (светлая — термометр Кларка, темная — квадрат приращения), и в общем, наклоны этих кривых коррелируют друг с другом. Но наклоны явно непостоянны во времени, что и отвергает гипотезу стационарности. Правда, отклонения этих кривых от прямой линии не так уж велики, откуда и пригодность геометрического броуновского движения (с постоянной температурой) в качестве грубого приближения.

Но если иметь внутрисессионные данные, то можно измерять температуру по квадратам 10-минутных приращений. Сравнение накопленных температур для ежедневных (верхняя кривая) и 10-минутных приращений (нижняя кривая) дано на рис.6. Кривые разнесены, потому что начало отсчета для нижней кривой сдвинуто на год позже. Теперь наклоны этих кривых прекрасно коррелируют друг с другом, с той (отмеченной выше) разницей, что нижняя кривая имеет систематическое отставание по скорости роста.

При измерении меняющейся во времени величины всегда измеряется некоторое среднее ее значение по какому-то отрезку времени. Точность конфликтует с разрешением по времени. Параметры прибора выбираются в результате некоторого компромисса. В нашем случае (термометра по сумме квадратов или по квантилям для 10-минутных приращений) параметр один — число наблюдений. Хотя растянутое нормальное распределение и не является адекватной моделью для 10- минутных приращений, с помощью него все-таки разумно оценить это число наблюдений. Приведем с этой целью выражения для моментов виртуальных приращений, которые задаются моделью растянутого нормального распределения.

Если случайная величина η (виртуальное 10-минутное приращение) создается из величины $\xi \sim N(0,1)$ по формулам (3) и (4), то взятие интегралов приносит следующие радующие глаз выражения:

$$E\eta^2 = q^2\{1 + 8a[\varphi(1) - \Phi(-1)] + 4a^2[5\Phi(-1) - 3\varphi(1)]\} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} E\eta^4 = q^4\{3 + a[64\varphi(1) - 48\Phi(-1)] + a^2[-216\varphi(1) + 408\Phi(-1)]+ \\ +a^3[864\varphi(1) - 1248\Phi(-1)] + a^4[-668\varphi(1) + 1498\Phi(-1)]\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где Φ и $\varphi-$ функция и плотность распределения стандартного нормального закона.

При $a = q = 1$ числа получаются следующие:

$$E\eta^2 = 1.94, \quad E\eta^4 = 94.5, \quad D(\eta^2) = 91$$

(Таким образом, распределение η имеет огромный эксцесс ≈ 22). Поэтому возникает мысль, что при оценке $E\eta^2$ даже по сумме 195 квадратов следует ожидать достаточно большой чисто статистической ошибки. Следовательно, нужно остановиться на термометре по сумме квадратов приращений за неделю. В этом случае неизвестная величина, примерно пропорциональная 2, будет оцениваться со среднеквадратической ошибкой около $\sqrt{91/195}$, т.е. с относительной ошибкой порядка 30%.

Робастный метод оценки масштабного параметра q по квантилям (с последующим пересчетом в дисперсию), казалось бы, может обойтись меньшим числом наблюдений, но мы не рискуем его рекомендовать, так как в этом случае систематическая недооценка температуры еще больше. Впрочем, мы ниже приводим и некоторые результаты, полученные с его помощью.

6 Практические возможности предлагаемого подхода

Оценивать те или иные модели стохастической финансовой математики, ориентируясь на их адекватность, вряд ли стоит, потому что сами исходные наблюдения частично дефектны, и полной адекватности никогда не получится. Вопрос следует переориентировать в сторону практической эффективности. Ввиду сложившейся ориентации этой науки на мартингальные модели (см. введение), ясно, что такая "теория спекуляции"не склонна на самом деле обслуживать интересы рыночных спекулянтов. Правда, нет сомнений в том, что при спекуляциях на опционах нельзя обойтись без теории Блэка-Шоулса-Мертона в качестве начального ориентира. Но ведь реальные цены опционов не совпадают с ценами Блэка-Шоулса, так что этот ориентир имеет некоторую ограниченную область применения, а границы ее выяснены совершенно недостаточно.

Предлагается некоторая совершенно другая мысль. Обратимся к историческому примеру актуарной математики. Уже во второй половине XIX века любая западная страховая компания не могла не иметь в своих штатах актуария: отчасти в силу законодательства, но также и в силу общественного мнения. Актуарии, теоретически, занимаются расчетом будущих платежей по страховым договорам. Хорошо ли они умеют это делать? Вряд ли, так как для них существует та же проблема статистической неоднородности потока страховых исков, которой мы здесь занимаемся применительно к ценам акций. Но они являются частью системы, которая обеспечивает стабильность существования страховых компаний, а эта система на Западе достаточно хорошо справляется со своей задачей. А что означает существование профессии актуария для математики и профессиональных математиков? К престижной должности актуария допускаются лишь лица, владеющие математикой довольно высокого уровня, что немаловажно при ныне существующей тенденции к упадку физико-математического образования. А профессиональные математики их обучают, а главное — экзаменуют с помощью неравенства Лундберга-Крамера, которое вряд ли имеет практические применения, но в высшей степени годится для экзамена. Также они разрабатывают актуарную теорию (чтобы совершенствовать экзаменационные орудия) и за все за это получают приличную зарплату.

Теперь поставим вопрос о том, всем ли мы довольны в рыночной экономике. Например, после долгой борьбы правительств всех стран с черным валютным рынком пришлось в конце концов сделать его легальным: теперь курсы валют определяются путем спекуляций. В целом это, по-видимому, хорошо, но ведь спекулянты могут увлечься, и тогда приходится спасать то доллар, то рубль, то иену он неразумно низких или высоких котировок. И нефть, и сахар, и кофе... Рынок обеспечивает необходимую динамику, но он не может стабилизировать сам себя, и его приходится стабилизировать извне законодательными средствами. Когда мы говорим, что "рынок акций перегрет", то ведь это означает что-то отрицательное, с чем следует бороться, например, повышением банковского процента.

Волатильность (температура) является хорошо измеримым параметром (его можно измерять многими способами, не только тем, который мы здесь предлагаем). Вот и предлагается регулировать не само направление движения рыночных цен, а скорость его динамики путем законодательного установления правил регулирования рыночной волатильности. Самым простым способом регулирования волатильности могло бы быть установление штрафа (или налога) за превышение волатильности. Таким налогом должна облагаться игровая площадка, т.е., например, биржа или электронная система торгов. Конечно, такая площадка собственных денег не имеет, и может только разложить налог на участников торгов. При этом возникает стимул для изучения персональной активности каждого игрока. Ведь исследователь, который занимается рынком, должен сейчас довольствоваться сущими крохами информации по сравнению с тем, что в компьютерную эпоху возможно. Биржа предоставляет данные лишь о ценах и объемах сделок, а поведение каждого участника торгов считается коммерческой тайной. Доступ к этой тайне имеет лишь персонал, обеспечивающий проведение электронных торгов. Но он не обрабатывает эту информацию, потому что игровой площадке это не нужно. Интереснейшая информация о коллективном поведении участников рынка полностью пропадает. Хорошо, не будем со стороны совать нос в коммерческие тайны, но пусть эту информацию изучает биржа, чтобы по справедливости разложить между игроками налог на волатильность. Ну а для специалистов по финансовой математике, владеющих вероятностными методами, это — новые рабочие места. По аналогии с актуариями проектируется новая профессия: скажем, "рыночного ординатора".

Впрочем, столь радикальные предложения пока (насколько нам известно) не обсуждаются в литературе. Перейдем к тому, что обсуждается. Речь идет о законодательных предположениях в области формирования банковских резервов. Обсудим следующую рекомендацию Базельского комитета (излагается по книге [12]).

Каждый банк вычисляет *как умеет* функцию распределения вероятностей для приращения своего капитала, которое наступит на следующий день (или через 10 дней) по причине рыночных колебаний котировок ценных бумаг, и определяет какую-нибудь квантиль, скажем, 5%. Эта квантиль называется *Value at Risk (VaR)*, а по-русски, – величиной риска. (Т.е. потери, бóльшие, чем $|VaR|$, могут наступить лишь с вероятностью 0.05.) Размер резерва C_{t+1}, который нужно образовать на день $t+1$, определяется формулой

$$C_{t+1} = \max\{VaR_t\,,\ (M+m)\frac{1}{60}\sum_{j=t-60}^{t-1} VaR_j\}\,, \tag{7}$$

в которой VaR_t- значение VaR, вычисленное в день t, $M=3$, а $m-$ некоторое значение из интервала $0 \le m \le 1$, выбираемое в зависимости от качества внутренней модели банка, с помощью которой рассчитывается распределение вероятностей для возможных потерь. (Имеется в виду, что по прошлым данным вычисленные на каждый день значения VaR сопоставляются с реальными потерями на следующий день, и превышение потерь над рассчитанными должно происходить с частотой примерно 0.05. Если это так, то можно положить $m=0$, а уж если совсем не так, то $m=1$, т.е. придется замораживать больший капитал.)

Что касается практической эффективности такой рекомендации, то прямого смысла в ней почти и нет, поскольку банковские крахи обычно случаются в периоды общих финансовых кризисов, когда не имеют смысла никакие вероятностные расчеты. Но некоторый косвенный смысл ориентации банков на менее волатильные ценные бумаги все же имеется. Появлению такой рекомендации все рады: вкладчики банков потому, что думают, что ученые и политики заботятся о сохранении их вкладов; политики — потому, что доставляют своим избирателям удовольствие надеяться на заботу об их вкладах; ученые — потому, что получают хорошо оплачиваемое поле приложений. Ведь вычислять какие-то вероятности возможно только в рамках теории Башелье; вычислять их непросто, а тут надо еще и сопоставить с реальностью, чтобы иметь право сделать поменьше m. Банкам, несомненно, придется нанимать специалистов по вероятностной финансовой математике (если их еще нет в штатах банка).

Не рады могут быть только банкиры. У нас достаточно данных, чтобы грубо прикинуть, сколько будет стоить банкам ученая рекомендация. Если средства банка вложены только в один актив (акции) с дневной волатильностью 0.02, то VaR_j составляет $0.02 \cdot 1.645 = 0.033$ ($z = 1.645 -$ это значение z, которое отвечает вероятности 0.05 в случае применения нормального закона). Это значение предлагается то ли утроить, то ли учетверить, так что получится, что 10-12% капиталов, вложенных в актив, должны перейти в резерв. Правда, банк вкладывает деньги сразу во много активов, и волатильность такой смеси должна быть ниже. Но из-за согласованности направления рыночных колебаний ниже не так уж намного. Несомненно, банкиры огорчатся, но по размышлении поймут, что проще согласиться, чем протестовать.

Понятно, что при существующих в науке разногласиях по поводу уточнения модели геометрического броуновского движения не может быть и единства взглядов относительно вычисления VaR. Предметом соревнования между специалистами, которые придерживаются различных взглядов, может быть возможно точное вычисление распределения вероятностей для будущих приращений логарифма курса. Практически это не очень важно, так как получаемые числа все равно умножаются то ли на 3, то ли на 4, но соревнование за большую точность вычислений хвостов все же уместно. Приведем результаты экспериментов, которые получаются в рамках предлагаемого нами подхода.

Эксперименты состояли в том, что температура оценивалась тем или иным способом по данным за пять или десять биржевых дней (включая тот день, в конце которого делается прогноз) и применялось нормальное распределение для приращения логарифма на 1, 3, 5 и 10 дней вперед. Точнее говоря, реальное приращение логарифма нормировалось соответствующим стандартным уклонением и для полученных значений составлялась эмпирическая функция распределения. При идеальном действии теории получилось бы стандартное нормальное распределение $N(0,1)$. Фактически получались несколько другие распределения, а их отклонения от идеала выражались в терминах растянутого нормального распределения (напомним, что в данном случае это не гипотеза, а просто способ выражаться: ведь любое распределение можно представить как растянутое нормальное). Чтобы избежать приведения большого количества графиков, результаты сведены в таблицу 1.

Для подхода с переменной температурой имеется тривиальный конкурент: геометрическое броуновское движение, с помощью которого можно делать то же самое, используя общеизвестную статистическую технику оценки следующего элемента нормальной выборки по нескольким известным предыдущим. Вопрос сводится к применению распределения Стьюдента. При этом мы решили использовать такое же количество прошлых данных (т.е. 5 значений цены закрытия в случае 5 предыдущих дней и 10 значений в случае 10 дней). Соответственно получается 4 или 9 приращений, т.е. 4 или 9 степеней свободы для распределения Стьюдента (математическое ожидание элемента выборки принималось равным нулю). Эти данные тоже внесены в таблицу 1, но сравнивать с теоретическим идеалом их надо, используя представление распределения Стьюдента в виде растянутого нормального, которое дано в таблице 2. Читателя, интересующегося техническими деталями, мы просим прочесть нижеследующие пояснения к таблице 1, а если такого интереса нет, можно перейти прямо к обсуждению результатов, которое следует после таблиц 1 и 2.

Пояснения к таблице 1

Горизонт прогнозирования k $(= 1, 3, 5, 10)$– число дней, на которые делается прогноз: прогноз делается для приращения $\ln(S_{t+k}/S_t)$, где t– номер календарного дня. Число предшествующих дней $(=5, 10)$ – это число прошлых дней, кончая днем t, данные по которым использованы для прогноза (например, при 5 предшествующих днях для прогноза используются данные за дни t, $t-1$, $t-2$, $t-3$, $t-4$).

Способ нормировки означает следующее:

а) робастный – сначала оценивается параметр масштаба q по 10-минутным приращениям; он пересчитывается в дисперсию ежедневных приращений по формуле $1.94 \cdot 39q^2$.

б) $\sum$кв. 10-мин. – по сумме квадратов 10-минутных приращений.

в) $\sum$кв. дневн. – по сумме квадратов ежедневных приращений.

Сигма – оценка параметра масштаба для эмпирической функции распределения нормированных приращений, равная $(q_1 - q_{-1})/2$.

Число z $(= 1.5, 2.0, 2.5, 3.0)$– обозначение для вероятности $\Phi(z)$.

Прочие числа в таблице – значения функции растяжения квантилей для соответствующего z.

(Растяжение квантилей здесь понималось как отношение $(q_z - q_{-z})/(q_1 - q_{-1})$, которое равно z в случае точного нормального закона.)

Звездочкой *) отмечены те случаи, когда медиана выборочного распределения принимала заметное положительное значение (это смещение не может быть устранено как систематическая ошибка из-за переменного характера трендов цен).

Таблица 1

Сопоставление различных способов прогноза для распределения вероятностей будущих приращений логарифма цены акций HWP

	Число предшествующих дней = 5			Число предшествующих дней = 10		
	Способ нормировки			Способ нормировки		
	робастный	$\sum$кв. 10-мин.	$\sum$кв. дневн.	робастный	$\sum$кв. 10-мин.	$\sum$кв. дневн.
а) горизонт прогнозирования $k = 1$день						
сигма	1.17	1.12	1.12	1.16	1.06	1.10
$z = 1.5$	1.50	1.50	1.63	1.50	1.50	1.50
2.0	2.10	2.10	2.74	2.12	2.08	2.30
2.5	3.32	3.00	4.32	3.32	2.97	3.28
3.0	5.25	4.80	6.45	4.80	5.14	5.30
б) горизонт прогнозирования $k = 3$дня						
сигма	1.14	1.14	1.18	1.16	1.04	1.04
$z = 1.5$	1.57	1.53	1.59	1.50	1.58	1.52
2.0	2.36	2.22	2.70	2.23	2.28	2.57
2.5	3.49	3.14	4.26	3.29	3.50	3.46
3.0	6.58	5.92	6.45	6.99	6.83	6.50
в) горизонт прогнозирования $k = 5$дней						
сигма	1.17*)	1.16*)	1.15	1.15*)	1.11*)	1.05*)
$z = 1.5$	1.60	1.50	1.74	1.50	1.50	1.55
2.0	2.24	2.28	2.78	2.18	2.10	2.45
2.5	3.29	3.21	4.13	3.33	3.10	3.22
3.0	6.56	6.14	6.23	6.10	6.14	6.62
г) горизонт прогнозирования $k = 10$дней						
сигма	1.10*)	1.09*)	1.20	1.10*)	1.08*)	1.04*)
$z = 1.5$	1.58	1.60	1.67	1.59	1.54	1.66
2.0	2.45	2.31	2.75	2.32	2.31	2.68
2.5	3.80	3.33	4.58	3.30	3.40	4.21
3.0	5.05	4.90	8.03	5.14	5.16	5.42

Таблица 2

Представление распределения Стьюдента в виде растянутого нормального распределения

Число степеней свободы	Сигма	$z = 1.5$	2.0	2.5	3.0
4	1.14	1.65	2.60	3.86	5.40
9	1.06	1.57	2.25	3.06	4.00

Перейдем к обсуждению результатов, данных в таблице 1. В случае нормального закона (способ нормировки: робастный и по сумме квадратов 10-мин. приращений) значение "сигма"должно сравниваться с единицей, а прочие числа, данные в таблице, — с соответствующими значениями z. Однако все значения "сигма"больше единицы. Но это отклонение — результат недооценки температуры по 10- минутному термометру. Возможно, оно может быть устранено как систематическая ошибка. Прочие числа, данные в таблице, не зависят от этого предположения. Для прогнозирования на 1 день с помощью нормального закона получается неплохое совпадение с теорией примерно до значения $z = 2$, т.е. до вероятностей порядка 2%. С увеличением горизонта прогнозирования хвосты расширяются против теоретических ожиданий. Скажем, для $k = 10$ можно говорить лишь о $z = 1.5$, т.е. о вероятностях порядка 7%. Кроме того, соответствующие значения z в таблице отмечены звездочкой, что означает наличие ненулевой медианы в нормированных приращениях. Это не может быть устранено как систематическая ошибка, потому что связано с общим значительным ростом цен акций за рассматриваемый период, а он непредсказуем после перехода к приращениям.

В случае закона Стьюдента (способ нормировки по сумме квадратов дневных приращений) числа, данные в таблице 1, должны сравниваться с числами, данными в таблице 2. При 4 степенях свободы (т.е. число предшествующих дней = 5) получается заметно худший результат (при $k = 1$), чем для нормального закона, использующего 10-минутные приращения. Но при 9 степенях свободы результат уже при $k = 1$ лишь ненамного хуже, чем при использовании 10-минутных приращений, а с увеличением k разница еще более сглаживается. Вывод: при оценке VaR предложенный метод (учета 10-минутных приращений) имеет некоторое (довольно скромное) преимущество перед тривиальным конкурентом.

С другой стороны, наш метод все-таки очень прост в сравнении, например, с гиперболическими распределениями и потому сам является по отношению к ним тривиальным конкурентом. Следует сравнить получаемые тем и другим методом результаты. В работе Эберляйна [11, рис. 14] представлен гораздо лучший результат, из которого вытекает возможность прогноза распределения вероятностей приращения вплоть до вероятностей порядка 1%. Но здесь возможно недоразумение. Эберляйн исходит из существования стационарного во времени распределения вероятностей для приращений. Возможно поэтому, что в его работе представлен просто результат пересчета в VaR того выборочного распределения для приращений, которое было аппроксимировано гиперболическим законом. Это означало бы, что эксперимента по прогнозу вероятностей будущих приращений на основании прошлой информации не проводилось. Изложение Эберляйна кратко и не дает возможности ответить на поставленный вопрос.

7 Выводы

Нормальное распределение для приращений (логарифмов) рыночных цен за одну сессию, которое было предложено Башелье, может быть восстановлено в правах достаточно точной модели, если учесть переменную во времени температуру (волатильность). Нет оснований для трактовки динамики температуры как стационарного (при сдвигах времени) случайного процесса. Но текущее значение температуры может быть (с определенной точностью и разрешением по времени) оценено по динамике цен внутри биржевой сессии.

Приращения рыночных цен в микромасштабе по времени (на 10-минутных интервалах) с трудом допускают описание с помощью вероятностных моделей, потому что минимально принятый шаг для изменения биржевых цен навязывает этим приращениям логарифма некую неудобную дискретную структуру. Но все-таки возможно грубое описание в виде растянутого нормального распределения, задаваемого простой формулой, зависящей от двух параметров — масштаба и формы. Показано, что значительная статистическая неоднородность этих приращений в разные периоды времени объясняется, главным образом, изменением параметра масштаба.

Прогностические возможности для переменной температуры, видимо, довольно скромны (и сравнимы с возможностями прогноза самих цен акций). Поэтому оценка VaR, которая эквивалентна прогнозу распределений вероятностей для будущих приращений, представляет собой сложную задачу, если требовать прогноза хвостов распределения. Получаемые различными методами результаты требуют детального сопоставления.

Авторы выражают благодарность рецензенту за критические замечания, позволившие устранить некоторые терминологические неточности, а в особенности за указание на работу Кларка [4].

Список литературы

[1] Bachelier L. Théorie de la spéculation. //Annales de l'Ecole Normale Supérieure. 1900. V. 17. P. 21-86.

[2] Samuelson P. A. Mathematics of speculative price.//Mathematical topics in economic theory and computation. Ed. By R. H. Day and S. M. Robinson. SIAM, Philadelphia, 1972, pp. 1 — 42.

[3] Mandelbrot B. B. Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk. X+551pp. Springer, 1997.

[4] Clark P. K. A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices.// Econometrica. 1973. V. 41. N1. P.135-155.

[5] Barndorf-Nielsen O.E. Gaussian/Inverse Gaussian processes and the modeling of stock returns. Preprint. Aarhus: Aarhus University, 1994.

[6] Eberlein E., Keller U., Prause K. New insights into smile, mispricing, and value at risk: the hyperbolic model. // Journ. of Business. 1998. V. 71, N3, 371-405

[7] Шепард Н. Статистические аспекты моделей типа ARCH и стохастическая волатильность. — Обозрение прикл. и промышл. Матем., сер. финанс. и страх. матем., 1996, т.3, в.6, с. 764—826.

[8] Селезнева Т.В., Тутубалин В.Н., Угер Е.Г Исследование прикладных возможностей некоторых моделей стохастической финансовой математики.— Обозрение прикл. и промышл. матем., секц.. "Финансовая и страх. матем.", 2000, т. 7, в. 2, с. 210—238.

[9] Mikosch T., Starica C. Change of structure in financial time series, long range dependence and the GARCH model. Preprint. Aarhus:Aarhus University, 2000.

[10] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики.

Т. 1. Факты. Модели. Т. 2. Теория. XXXVII+ 1017 стр. М., ФАЗИС, 1998.

[11] Eberlein E. Recent advances in more realistic market and credit risk management: the hyperbolic model. Univ. of Freiburg, Inst. for Math. Stochastic and Center for Data Analysis and Modelling. February 25, 2000. p. 1-19.

[12] Tapiero S. Applied stochastic models and control for finance and insurance. Kluwer Academic Publishers (Boston/Dordrecht/London), 1998. 341pp.