

## Задачи 12

21 ноября 2012 г.

### Гомотопии

232. Доказать, что для пары Борсука  $(X, A)$  два пространства  $X/A$  и  $X \cup CA$  гомотопически эквивалентны.
233. Пусть у пары Борсука  $(X, A)$  вложение  $A \hookrightarrow X$  гомотопно постоянному отображению. Доказать, что фактор пространство  $X/A$  гомотопически эквивалентно букету  $X \vee SA$ .
- ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пространство  $X/A$  гомотопически эквивалентно  $Z = X \cup CA$ , которое можно понимать, как приклейку пространства  $CA$  к пространству  $X$  по вложению  $\varphi : A \hookrightarrow X$ ,  $Z = X \cup_{\varphi} CA$ . Поскольку отображение  $\varphi$  гомотопно постоянному отображению  $\varphi_0$ , то пространство  $Z$  гомотопически эквивалентно пространству  $z' = X \cup_{\varphi_0} CA$ , т.е. пространству  $X \vee SA$ .
234. Доказать, что  $\mathbb{S}^n / \mathbb{S}^k$  гомотопически эквивалентно  $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^{k+1}$ .
235. Если отображение  $f : X \rightarrow Y$  есть гомотопическая эквивалентность, то  $X$  является деформационным ретрактом цилиндра отображения  $f$ , т.е. пространства  $Y \cup_f (X \times I)$ . И обратно.
236. Показать, что пространство  $X$  стягиваемо тогда и только тогда когда любое непрерывное отображение  $f : X \rightarrow Y$  гомотопно постоянному отображению.
237. Показать, что пространство  $X$  стягиваемо тогда и только тогда когда любое непрерывное отображение  $f : Y \rightarrow X$  гомотопно постоянному отображению.
238. Показать, что бесконечномерная сфера, т.е.  $\mathbb{S}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{S}^n$  стягиваемая.
239. Показать, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  является гомотопической эквивалентностью, если существуют такие отображения  $g, h : Y \rightarrow X$ , что композиции  $fg$  и  $hf$  гомотопны тождественным отображениям. Показать, что при этом отображения  $g$  и  $h$  гомотопны.

240. Показать, что отображение  $f : X \rightarrow Y$  является гомотопической эквивалентностью, если существуют такие отображения  $g, h : Y \rightarrow X$ , что композиции  $fg$  и  $hf$  являются гомотопическими эквивалентностями.
241. (см. стр.20, №№22 и т.д.)

## Список литературы

- [1] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, 2000.
- [2] Постников, М.М. *Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий*, М., «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1984.