Задачи 3

17 сентября 2012 г.

1 Непрерывные отображения

69. Покажите, что отображение $f : X \longrightarrow Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для любого подмножества $A \subset Y$ выполнено включение $\overline{f^{-1}(A)} \subset f^{-1}(\overline{A})$.

70. Непрерывно ли отображение $f : [0,2] \longrightarrow \mathbf{R}^1$, задаваемое формулой
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1) \\ x-2, & x \in [1,2] \end{cases} \quad ?$$

71. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле
$$h(x) = f(x) + g(x)$$
является непрерывным.

72. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле
$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$
является непрерывным.

73. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле
$$h(x) = f(x) - g(x)$$
является непрерывным.

74. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле
$$h(x) = |f(x)|$$
является непрерывным.

75. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

является непрерывным.

76. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$$

является непрерывным.

77. Пусть $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ непрерывные отображения, причем $0 \notin g(X)$. Докажите, что отображение $h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, определенное по формуле

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

является непрерывным.

78. Доказать, что функции $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n$ непрерывны тогда и только тогда, когда совместное отображение $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ является непрерывным.

79. Пусть $\mathbf{Mat}\ (p \times q, \mathbb{R})$ — пространство матриц размера $p \times q$ с вещественными коэффициентами. Показать, что отображение

$$\mathbf{Mat}\ (p \times q, \mathbb{R}) \times \mathbf{Mat}\ (q \times r, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{Mat}\ (p \times r, \mathbb{R}), \quad (A, B) \to AB,$$

является непрерывным.

80. Пусть $GL(n; \mathbb{R}) \subset \mathbf{Mat}\ (p \times n, \mathbb{R})$ — пространство обратимых матриц. Показать, что отображение $f : GL(n; \mathbb{R}) \longrightarrow GL(n; \mathbb{R}), \quad f(A) = A^{-1}$ является непрерывным.

81. Пусть X, Y - два топологических пространства, причем первое пространство есть объединение двух замкнутых подмножеств: $X = A \cup B$, $A = \bar{A}$, $B = \bar{B}$. Показать, что отображение $f \colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда сужения $f|_A : A \longrightarrow Y$ и $f|_B : B \longrightarrow Y$ непрерывны. Если же подмножество A не замкнуто, $A \neq \bar{A}$ то это, вообще говоря, неверно. Привести пример.(Взято из [**?**], стр. 92, задача 13.15).
Решение.Проверка непрерывности отображения отображения f сводится к тому, что если подмножество $F \subset Y$ замкнуто, $\bar{F} = F$, то его прообраз $f^{-1}(F)$ должен быть замкнут, т.е. $\overline{f^{-1}(F)} = f^{-1}(F)$. Имеем:

$$f^{-1}(F) = (f^{-1}(F) \cap A) \cup (f^{-1}(F) \cap B) = f_A^{-1}(F) \cup f_B^{-1}(F) =$$

$$= \overline{f_A^{-1}(F)} \cup \overline{f_B^{-1}(F)}.$$

Другими словами, множество $f^{-1}(F)$ есть объединение двух замкнутых подмножеств, т.е. замкнуто. ∎

82. Докажите, что образ плотного множества при непрерывном сюръективном отображении плотен.

83. Привести пример последовательности непрерывных функций $f_i : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad i \in \mathbf{N}$, для которой функция $f(x) = \mathsf{sup}\ \{f_i(x) : i \in \mathbf{N}\}$ не является непрерывной.

84. У метрического пространства X и его подмножеств A функция $f(x) = \rho(x, A)$ непрерывна. Доказать.

85. Пусть $f : X \longrightarrow Y$ — отображение метрических пространств, причем существует такая константа $C > 0$, для которой выполнено неравенство $\rho(f(x), f(y)) \leq C\rho(x, y)$ для любых точек $x, y \in X$. Доказать, что отображение f непрерывно.

86. Пусть функции $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n$ непрерывны. Показать, что множество всех решений системы уравнений $f_1(x) = 0, \ldots, f_n(x) = 0$, является замкнутым.

87. Пусть функции $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n$ непрерывны. Показать, что множество всех решений системы неравенств $f_1(x) \geq 0, \ldots, f_n(x) \geq 0$, является замкнутым. Можно ли конечную систему заменить на бесконечную?

88. Пусть функции $f_i : X \longrightarrow \mathbb{R}, \quad i = 1, \ldots, n$ непрерывны. Показать, что множество всех решений системы строгих неравенств $f_1(x) > 0, \ldots, f_n(x) > 0$, является замкнутым. Можно ли конечную систему заменить на бесконечную?

89. Построить непрерывное отображение Канторова совершенного множества на отрезок $[0, 1]$.

90. Построить непрерывное отображение Канторова совершенного множества K на его квадрат $K \times K$.

91. Докажите, что всякое непрерывное отображение $f : \mathbf{I} \longrightarrow \mathbf{I}^2$, у которого образ $f(\mathbf{I}) \subset \mathbf{I}^2$ всюду плотен, является сюръекцией.