Задачи 9

6 ноября 2012 г.

Гомотопии

218. Рассмотрим сферу $\mathbb{S}^2$ двоеточие на ней $\mathbb{S}^0 \subset \mathbb{S}^2$. Доказать, что фактор пространство $\mathbb{S}^2/\mathbb{S}^0$ и букет $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^1$ гомотопически эквивалентны.

219. Показать, что если у тора стянуть в точку конечное число меридиан, то получится букет некоторого числа сфер и окружности.

220. Другие примеры из ([1]), стр. 14, 18

221. Построить деформационную ретракцию тора с выколотой точкой на букет меридиана и параллели.

222. Построить деформационную ретракцию $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ на сферу $\mathbb{S}^{n-1}$.

223. Доказать, что пара (X, A) симплициальных пространств удовлетворяет аксиоме продолжения гомотопии (т.е. является парой Борсука).

224. Доказать, что для пары Борсука (X, A) подпространство

$$X \times \{0\} \cup A \times I \subset X \times I$$

является ретрактом в $X \times I$. И обратно, если подпространство $X \times \{0\} \cup A \times I \subset X \times I$ является ретрактом в $X \times I$, то пара (X, A) удовлетворяет аксиоме продолжения гомотопии.

225. Доказать, что пара (X, A) клеточных пространств удовлетворяет аксиоме продолжения гомотопии (т.е. является парой Борсука).

226. Проверить, что пара (I, A), $A = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$ не является парой Борсука.

227. Если $(X; A)$ есть клеточная пара и A есть стягиваемый подкомплекс, то фактор пространство X/A и X гомотопически эквивалентны, а отображение $q : X \longrightarrow X/A$ есть гомотопическая эквивалентность.

Доказательство. Если A – стягиваемое пространство, то имеется гомотопия $h_t : A \longrightarrow A$, $t \in [0, 1]$, такая, что $h_0(x) \equiv x$, $x \in A$,

$h_1(x) \equiv x_0 \in A$. Пусть $f_0 : X \longrightarrow X$, $f_0(x) \equiv x$, $\quad x \in X$ — продолжение отображения $h_0 : A \longrightarrow X$. Значит имеется продолжение гомотопии $h_t : A \longrightarrow X$, скажем, до гомотопии $f_t : X \longrightarrow X$. Гомотопия $f_t : X \longrightarrow X$ переводит A в A, есть гомотопия фактор-пространства $\bar{f}_t : X/A \longrightarrow X/A$, тождественная при $t = 0$. При $t = 1$ получаем отображение $f_1 : X \longrightarrow X$, которое продолжает отображение $h_1 : A \longrightarrow X$. Это значит, что $f_1(A) = x_0$, т.е. отображение f_1 расщепляется в композицию $f_1 = g \cdot q$, как показано на диаграмме

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f_1"] \arrow[dr, "q"'] & & X \arrow[dr, "q"] & \\
& X/A \arrow[ur, "g"'] \arrow[rr, "\bar{f}_1"'] & & X/A
\end{tikzcd}$$

Две возможные композиции $g \cdot q$ и $q \cdot g$ гомотопны тождественным отображениям. $\blacksquare$

228. Пусть $Z = X_0 \cup_f X_1$ — фактор пространство, полученное приклеиванием пространства X_0 к пространству X_1 вдоль отображения $f : A \longrightarrow X_0$, $A \subset X_1$. Пусть $g : A \longrightarrow X_0$ другое отображение, гомотопное f, $W = X_0 \cup_g X_1$. Доказать, что пространства Z и W гомотопически эквивалентны.

Доказательство. (см. [2], стр.91) Поскольку имеется гомотопия $H : A \times I \longrightarrow X_0$, то при ее помощи можно приклеить к пространству X_0 декартово произведение $X_1 \times I$ вдоль отображения H и получить пространство $W = X_0 \cup_H (X_1 \times I)$

Строим отображения $F : Z \longrightarrow W$ и $G : Y \longrightarrow Z$ следующим образом

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, hook] & = & X_0 & A \times \{0\} \arrow[l, "f"'] \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & X_1 \times \{0\} \arrow[d, hook] \\
W & = & X_0 & A \times I \arrow[l, "H"] \arrow[r, hook] & X_1 \times I
\end{tikzcd}$$

Пространство Z является деформационным ретрактом пространства W, т.е. они гомотопически эквивалентны.

229. Показать, что у стягиваемого пространства ретракт тоже стягиваемый. Но если ретракт есть стягиваемое пространство, но само пространство не обязано быть стягиваемым.

230. Показать, что две деформационных ретракции гомотопны.

231. Пусть дано три натуральных числа v, r, k, удовлетворяющих условию $v+k-r = 2$. Показать, что двумерную сферу можно разбить на клетки так, чтобы число вершин, ребер и клеток равнялось, соответственно, v, r и k.

Список литературы

[1] Allen Hatcher, *Algebraic Topology*, 2000.

[2] Постников, М.М. *Лекции по алгебраической топологии. Основы теории гомотопий,* М., «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, 1984.