Задачи к курсу "Дифференциальная геометрия и топология

(математики, 3-й курс, лектор - А.С.Мищенко)
Осенний семестр 2004/05 уч. года

8 ноября 2004 г.

Лекция 1 (7 сентября 2004 г.)

1. Тензоры, валентность тензоров, сумма, свертка.
2. Альтернирование и симметрирование тензоров.
3. Классические примеры тензоров, градиент функции, функционал, скалярное произведение, линенйный оператор.
4. Тезорный характер операций векторного и смешанного произведений векторов в R^3.
5. Тензорное произведение, тензорная интерпретация следа и детерминанта матрицы.
6. Теорема о представлении тензора в виде суммы тензорных произведений простейших тензоров.

Задачи:

1. Определить валентность тензоров, компоненты которых выражаются следующим образом:
   (a) $T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$;
   (b) $T_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$ в точках, где градиент функции f равен нулю;
   (c) T^i_j — компоненты матрицы линейного оператора векторного пространства;
   (d) T_{ij} — компоненты матрицы билинейной формы на векторном пространстве.

2. Пусть

$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{если } i \neq j, \\ 1 & \text{если } i = j. \end{cases} \qquad (1)$$

Показать, что компоненты $\{\delta^i_j\}$ образуют тензор валентности (1,1).

3. Пусть $\xi = \{\xi^{ij}\}$ — тензор валентости (2,0), а числа $\{\eta_{ij}\}$ удовлетворяют условиям

$$\xi^{ij}\eta_{jk} = \delta^i_j \qquad (2)$$

для произвольных значений индексов i, j. Доказать, что компоненты $\{\eta_{ij}\}$ образуют тензор валентности (0,2).

4. Пусть тензор валентности (0,2) задается в некоторой системе координат $(x^1, ..., x^n)$ матрицей $g = \{g_{ij}(x)\}$. Допустим, что матрица g

   (a) симметрична,

   (b) невырождена и

   (c) неотрицательно определена.

   Доказать, что свойства (4a), (4b), (4c) сохраняются при любой регулярной заменене координат.

5. Привести пример, показывающий, что опреация перестановки верхнего индекса с нижним индексом не является тензорной операцией.

6. Пусть $T = \{T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}(x)\}$ — тензорное поле. Показать, что операция

$$\begin{aligned} T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} \quad &\Rightarrow \quad S^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{q+1}} : \\ S^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{q+1}} \quad &= \quad \frac{\partial}{\partial x^{j_{q+1}}} T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} \end{aligned} \qquad (3)$$

является тензорной операцией только при $p = 0$ и $q = 0$.

Через V^m_n будем обозначать пространство всех тензоров валентности (m,n).

7. Определить размерность тензорного пространства V^m_n.

8. Пусть $f : V^m_n \to V^p_q$ —линейное отображение тензорных пространств. Показать, что коэффициенты (относительно компонент тензоров в пространствах V^m_n и V^p_q) линейного отображения f образуют тензор. Определить его валентность.

9. Найти тип тензора, компоненты которого суть коэффициенты

   (a) векторного произведения,

   (b) смешанного произведения

   векторов в $\mathbf{R}^3$. Показать, что эти тензоры получаются друг из друга путем подымания или опускания индексов.

Лекция 2 (14 сентября 2004 г.)

1. Линейное пространство тензоров.
2. Тензорные операции над линейными пространствами. Симметрические и внешние степени линейного пространства. Вычисление размерностей пространств тензоров.
3. Канонические базисы в тензорных степенях.
4. Полилинейные функции и их линейное тензорное продолжение.
5. Тензорный вид коэффициентов линейной зависимости между тензорами.

Задачи:

10. Показать, что любой тензор валентности (2,0) однозначно разлагается в сумму симметрического и кососимметрического слагаемых. Показать, чта для тензоров валентности (3,0) аналогичное утверждение не верно.
11. Доказать, что операторы альтернирования и симметрирования являются проекторами в пространстве тензоров.
12. Показать, что операция перестановки индексов коммутирует с операциями альтернирования и симметрирования.
13. Показать, что композиция операций альтернирования и симметрирования является нулевой операцией.

Через $V^{\otimes k}$ обозначим k-ю тензорную степень пространства V, через $\Lambda^k V$ — k-ю внешнюю степень, а через $S^k V$ — k-ю симметрическую степень. Если $F : V \longrightarrow V$ линейный оператор, то для тензорных, внешних и симметрических степеней определены операторы, которые обозначаются следующим образом:

$$\begin{array}{rccc} F^{\otimes k}: & V^{\otimes k} & \longrightarrow & V^{\otimes k}, \\ \Lambda^k F: & \Lambda^k V & \longrightarrow & \Lambda^k V, \\ S^k F: & S^k V & \longrightarrow & S^k V. \end{array} \tag{4}$$

14. Определить размерности пространств $\Lambda^k V$ и $S^k V$.

Рангом тензора валентности (p,q) будем называть число $p+q$. Тензор называется инвариантным, если его компоненты не меняются ни при каких заменах координат.

15. Описать все инвариантные тензоры ранга 0, 1, 2, 3 и 4.
16. Выразить через коэффициенты характеристического многочлена оператора $c = \{c^i_j\}$ величины $\det c$, c^i_i, $c^i_j c^j_i$, $c^i_j c^j_k c^k_i$ и т.д.

17. Представить определитель линейного оператора как результат выполнения последовательности элементарных тензорных операций.

Лекция 3 (21 сентября 2004 г.)

1. Скалярное произведение как тензор второй валентности.

2. Поднятие и опускание индексов у тензора.

3. Понятие тензорного поля, векторное поле, градиент гладкой функции. Различие между векторным полем и градиентом функции.

4. Двойственность между векторным и ковекторным полем. Производная гладкой функции вдоль векторного поля.

5. Канонические базисы в пространстве тензоров, порожденные локальной системой координат

Задачи:

Градиентом функции f назывется векторное поле, которое получается в результате опускания индекса у тезроного поля $df = \{\frac{\partial f}{\partial x^i}\}$, т.е.

$$grad\ f = \{v^i\}: \quad v^i = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^j} \tag{5}$$

18. Доказать, что градиент $\operatorname{grad} f$ функции f перпендикулярен поверхностям уровня функции f.

19. Выразить $\operatorname{tr} \Lambda^k F$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора F.

20. Выразить $\operatorname{tr}(F \otimes F)$, $\operatorname{tr} F^{\otimes k}$, $\det (F \otimes F)$ через коэффициенты характеристического многочлена оператора F.

21. Пусть тензор X имеет валентность $(1,0)$, а тензор W имеет валентность $(0,1)$. Найти ранг оператора $X \otimes W$.

22. Пусть $\xi \in \Lambda^1 V$, $\xi \neq 0$, $\omega \in \Lambda^k V$. Доказать, что равенство $\xi \wedge \omega = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда ω представляется в виде $\omega = \xi \wedge \psi$ для некоторого $\psi \in \Lambda^{k-1} V$.

23. Пусть тензор $T = \{T_{ijk}\}$ симметричен по первым двум индексам и кососимметричен по второму и третьему индексам. Доказать, что $T = 0$.

24. Пусть $a = \{a_{ij}\}$ — симметрический тензор, а $d = \{b^{ij}\}$ — кососимметрический тензор. Доказать, что $a_{ij}b^{ij} = 0$.

25. Пусть $T = \{T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}(x)\}$ тензорное поле. Доказать, что для любой системы координат имеет место единственное разложение

$$T = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\ldots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\otimes dx^{j_1}\otimes\ldots\otimes dx^{j_q}.$$

Лекция 4 (28 сентября 2004 г.)

1. Ковариантная производная и ковариантый градиент векторного поля. Линейная связность, коэффициенты линейной связности. Закон изменения коэффициентов линейной связности при замене координат.
2. Ковариантный градиент тензорных полей произвольной валентности.
3. Формулы ковариантной производной по направлению и вдоль кривой.
4. Операция параллельного перенесения.

Задачи:

26. Пусть $\Gamma = \{\Gamma^k_{ij}\}$ — линейная связность. Доказать, что $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ образуют тензор валентности (1,2).

27. Пусть $\Gamma = \{\Gamma^k_{ij}\}$ и $\widetilde{\Gamma} = \{\widetilde{\Gamma}^k_{ij}\}$ — две линейные связности. Доказать, что $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ образуют тензор валентности (1,2). И обратно, если $T = \{T^k_{ij}\}$ —тензор валентности (1,2), а $\Gamma = \{\Gamma^k_{ij}\}$ — линейная связность, то $\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + T^k_{ij}$ образуют коэффициенты некоторой линейной связности.

28. Пусть $\Gamma = \{\Gamma^k_{ij}\}$ и $\gamma = \{\gamma^k_{ij}\}$ — две линейные связности, α и β — две гладкие функции, причем $\alpha(x) + \beta(x) \equiv 1$. Показать, что компоненты $\{\alpha\Gamma^k_{ij} + \beta\gamma^k_{ij}\}$ служат коеффициентами некоторой линейной связности.

29. Доказать, что тензорное поле δ^i_j символов Кронекера параллельно вдоль любой кривой для любой линейной связности.

30. Показать, что ковариантная производная тензорного поля вдоль кривой зависит от значения коэффициентов связности и компонент поля только на этой кривой. Иными словами, если тензорное поле задано только в точках кривой, то, тем не менее, можно вычислить ковариантную производную этого тензорного поля вдоль вектора скорости кривой.

31. Доказать, что при одновременном параллельном перенесении нескольких тензоров вдоль данной кривой параллельно переносятся и тензоры, полученные из исходных при помощи тензорных операций. Иными словами результат параллельного перенесения вдоль кривой коммутирует с тензорными операциями.

32. Показать, что если две гиперповерхности евклидова пространства соприкасаются вдоль некоторой кривой, то результат параллельного перенесения касательного вектора вдоль этой криой не зависит от выбора подмногообразия.

33. На римановом многообразии симметрическая риманова связность удовлетворяет условию: операция параллельного перенесения коммутирует с операциями опускания и поднятия индексов. Доказать.

34. Пусть векторное поле имет постоянную длину относительно римановой метрики. Доказать, что ковариантная производная относительно симметрической римановой связности в любом направлении ортогональна к исходному векторному полю.

Лекция 5 (5 октября 2004 г.)

1. Геометрическая интерпретация ковариатной производной.

2. Связность на поврехности в евклидовом пространстве.

3. Симметрическая связность, ассоциированная с римановой метрикой.

4. Сохранение длины угла между векторами при параллельном перенесении.

Задачи:

35. Вычислить символы Кристоффеля евклидовой метрики плоскости в полярных координатах.

36. Вычислить символы Кристоффеля метрики

$$ds^2 = \lambda(u, v)(du^2 + dv^2). \tag{6}$$

37. Вычислить символы Кристоффеля в $\mathbf{R}^3$ в сферической системе координат.

38. Вычислить символы Кристоффеля на сфере в сферической системе координат.

39. Вычислить угол, на какой повернется касательный вектор на прямом круговом цилиндре в $\mathbf{R}^3$ при параллельном перенесении вдоль замкнутой кривой. Зависит ли результат от вида кривой?

40. Вычислить угол, на какой повернется касательный вектор на прямом круговом конусе в $\mathbf{R}^3$ при параллельном перенесении вдоль замкнутой кривой. Установить зависимость от вида кривой.

41. Выписать в явном виде и решить уравнения параллельного переноса на сфере с метрикой $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$:

    а) вдоль кривой $\theta = \theta_0 =$ **const** , т.е. вдоль параллели;

    б) вдоль кривой $\varphi = \varphi_0 =$ **const** , т.е. вдоль меридиана.

42. На какой угол повернется касаткльный вектор на сфере в результате параллельного перенесения вдоль параллели.

43. Доказать, что касательный вектор на сфере можно перевести в любой другой касетельный вектор той же длины при помощи параллельного перенесения вдоль некоторой кривой.

Лекция 6 (12 октября 2004 г.)

1. Понятие n-мерного многообразия, карты, атлас карт.

2. Гладкие многообразия. Гладкие функции и отображения.

3. Теорема о существовании разбиения единицы.

4. Гладкие отображения многообазий. Дифференциал отображения, якобиан. Погружения и вложения. Подмногообразия.

Задачи:

44. Доказать, что n–мерная сфера S^n, задаваемая в $\mathbf{R}^n$ уравнением $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, является гладким многообразием.

    а) Построить атлас карт.

    б) Построить атлас карт из минимального числа карт.

    в) Построить атлас из минимального карт при условии, что каждая карта гомеоморфна диску.

    г) Построить атлас из $n + 2$ карты, при условии, что все карты и всевозможные непустые пересечения карт гомеоморфны дискам.

45. Доказать, что двумерный тор T^2, заданный как поверхность вращения вокруг оси Oz окружности, лежащей в плоскости Oxy и не пересекающейся с осью Oz, является гладким многообразием.

    а) Построить атлас карт.

    б) Построить атлас карт из минимального числа карт.

    в) Построить атлас из 4-х карт при условии, что каждая карта гомеоморфна диску.

    г) Построить атлас из 6-ти карт, при условии, что все карты и всевозможные непустые пересечения карт гомеоморфны дискам.

46. Доказать, что n–мерное проективное пространство $\mathbf{RP}^n$ является гладким (и вещественно-аналитическим) многообразием.

47. Доказать, что n–мерное комплексное проективное пространство $\mathbf{CP}^n$ является гладким (и комплексно-аналитическим) многообразием.

48. Введите структуру гладкого многообразия на множестве всех прямых в $\mathbf{R}^2$. Доказать, что полученное многообразие гомеоморфно листу Мёбиуса.

49. Доказать гомеоморфность мноообразий $\mathbf{S}^2$ и $\mathbf{CP}^1$.

Лекция 7 (19 октября 2004 г.)

1. Способы задания многообразия.

2. Теорема Уитни о вложении многообразия в евклидово пространство.

3. Риманова метрика на многообразии, линейная связность на многообразии. Индуцированная симметрическая римановап связность на подмногообразии.

Задачи:

50. Доказать, что матрица Якоби композиции двух гладких отображений является композицией матриц Якоби сомножителей.

51. Доказать, что ранг матрицы Якоби не зависит от выбора локальной системы координат.

52. Вычислить ранг матрицы Якоби отображения

$$f(x, y) = (x, 0) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2. \tag{7}$$

53. Доказать, что группа $\mathbf{SO}(2)$ диффеоморфна окружности. Какому многообразию диффеоморфна группа $\mathbf{O}(2)$?

54. Доказать, что группа $\mathbf{SO}(3)$ гомеоморфна проективному пространству $\mathbf{RP}^3$.

55. Доказать, что система уравнений

$$\begin{aligned} \sum z_i^2 &= 0, \\ \sum |z_i|^2 &= 2 \end{aligned} \tag{8}$$

в комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$ задает гладкое многобазие, которое диффеоморфно пространству единичных касательных векторов к сфере $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbf{R}^n$.

56. Доказать, чо группа $\mathbf{SU}(2)$ гомеоморфна сфере $\mathbf{S}^3$

57. Доказать, что уравнение
$$z_1^2 + z_2^2 = 1 \tag{9}$$
в комплексном пространстве $\mathbf{C}^2$ определяет многообразие, гомеоморфное цилиндру.

58. Доказать, что объединение двух координатных осей в $\mathbf{R}^2$ не является многообразием.

59. Являются ли гладкими многообразиями следующие кривые на плоскости:

    а) треугольник;

    б) объединение двух треугольников, имеющих только одну общую точку — вершину?

60. Показать. что свере $\mathbf{S}^n$ нельзя вести атлас, состоящий из одной карты.

61. Показать, что при $n \neq m$ пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ не диффеоморфны.

62. Привести пример гладкого гомеоморфизма, не являющегося диффеоморфизмом.

63. Показать, что на плоскости $\mathbf{R}^2$ можно вести такую структуру гладкого многообразия, что кривая $y = x^2$ перестает быть гладкой.

64. Показать, что декартово произведение гладких многобазий допускает структуру гладкого многобазия, причем проекции являются гладкими отображениями.

65. Доказать, что n–мерное комплексное многобразие яляется гладким ориентируемым мноообразием размерности $2n$.

66. Показать, что окружность $\mathbf{S}^1$, сфера $\mathbf{S}^n$, тор $\mathbf{T}^2$ являются ориентируемыми многообразиями.

67. Доказать, что лист Мёбиуса, проетивная плоскось $\mathbf{RP}^2$, бутылка Клейна суть неориентируемые многообразия.

68. Доказать существование римановой метрики на любом (компактном) гладком многообразии

    а) с помощью разбиения единицы;

    б) с помощью теоремы Уитни.

69. Пусть $N \subset M$ подмногообразие риманова многообразия M. Пусть ∇, ∇^0 — симметрические римановы связности на многообразии M и подмногообразии N (с индуцированой римановой метрикой на нем). Пусть xi — векторное поле на M, касательное к подмногообразию N. Доказать формулу
$$\nabla^0_\eta \xi = \text{ pr } (\nabla_\eta \xi) \tag{10}$$

для любого вектора η, касательного к подмноообразию N, где pr — ортогональная проекция на касательное пространство к подмногообразию N.

70. Описать все линейные связности на окружности. Написать формулу для параллельного перенесения для произвольной связности на окружности.

Лекция 8 (26 октября 2004 г.)

1. Геодезические линии, уранение геодезической.
2. Теорема о том, что достаточно близкие точки соединяются единственной геодезической.
3. Изометрия. Теорема о сохранении гедезических при изометрии.
4. Геодезические на плоскости и сфере. Группы движений прямой, плоскости и сферы.

Задачи:

71. Показать, что геодезическая линия на двумерной поверхности в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$ вполне характеризуется свойством: в каждой точке, где ее кривизна отлична от нуля, нормаль к повхрехности коллинеарна с нормалью к кривой.
72. Пусть прямая линия лежит на поверхности в $\mathbf{R}^3$. Доказать, что эта прямая является геодезической линией на поверхности.
73. Пусть две пверхности соприкасаются по некоторой линии, которая являются геодезической на одной поверхности. Показать, что эта линия является геодезической и на другой поверхности.
74. На поверхности $\mathbf{r}(u, v) \in \mathbf{R}^3$ задана кривая линия $u = u(s),\ v = v(s)$. Показать, что геодезическая линия задается уравнением

$$\left(m(u(s), v(s)), \frac{d}{ds}\mathbf{r}, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r}\right) = 0, \tag{11}$$

где m — вектор нормали поверхности.

75. Доказать, что в евклидовом пространстве геодезическими линиями являются прямые и только они.
76. Доказать, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими линиями.
77. Доказать, что парллель поверхности вращения является геодезической тогда и только тогда, когда касательная к меридиану в ееточках параллельна оси вращения.

78. Найти все геодезические линии двумерной сферы.

79. Показать, что геодезические линии поврехности с первой квадратичной формой
$$ds^2 = v\left(du^2 + dv^2\right) \tag{12}$$
изображаются на плоскости (u, v) параболами.

80. Пусть две поврехности трансверсально пересекаются по линии,которя является геодезической на каждой из этих поврехностей. Доказать, что эта линия является прямой.

Лекция 9 (2 ноября 2004 г.)

1. Псевдосфера. Геодезические на псевдосфере.
2. Тензор кривизны риманового многообразия, формулы тензора кривизны.
3. Свойства симметрии и косой симметрии тензора кривизны.
4. Тензор Риччи и скалярная кривизна. Связь с Гауссовой кривизной поверхности.

Задачи:

81. Вычислить тензор кривизны на двумерной сфере $\mathbf{S}^2$ в сфериеских координатах.

82. Доказать, что риманова етрика двумерного многообразия являетс ялокально эвклидвой тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны равен тождественно нулю.

83. Вычисляить калярную кривизну следующих римановых многообразий:

а) сферы $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$,

б) тора $\mathbf{T}^2$, вложенного в $\mathbf{R}^3$ как поверхность вращения,

в) тора $\mathbf{T}^2$, вложенного в $\mathbf{C}^2$, задаваемого уравнениями
$$\begin{array}{rcl} |z|^2 + |w|^2 & = & 1, \\ |z| & = & |w|; \end{array} \tag{13}$$

г) прямого кругового конуса;

д) цилндра;

е) сферы $\mathbf{S}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

84. Показать, что у двумерной поврехности тензор РИччи пропорционален метрическому тензору. Найти коэффициент пропорциональности.

85. Доказать тождество

$$\nabla^i \left(R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \right) = 0. \tag{14}$$

86. Доказать, если связность в n–мерном многообразии допускает n линейно независимых в каждой точке ковариантно постоянных векторных полей, то тензор кривизны равен нулю.

Лекция 10 (9 ноября 2004 г.)

1. Теорема о независимости параллельного перенесения от кривой при нулевом тензоре кривизны.
2. Теорема о приведении метрического тензора к единичной матрице в случае нулевогоо тензора кривизны поверхноости.
3. Дифференциальный формы и алгебраические операции над ними.
4. Внешний дифференциал и его свойства.
5. Представление дифференциальных форм в локальных координатах.
6. Прообраз диффренциальной формы при гладком отображении.

Задачи:

87. Доказать, что если диффернциальная форма ω имеет порядок p, т.е. $\omega \in \Lambda^p(V^*)$, а вектора $v_1, v_2, \ldots, v_p$ линейно зависимы, то

$$V(v_1, v_2, \ldots, v_p) = 0. \tag{15}$$

88. Доказать, что если формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ линейно зависимы, то

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0. \tag{16}$$

89. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p \in V^*$; $v_1, v_2, \ldots, v_p \in V$. Доказать, что

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \det \|\omega_i(v_j)\|_{i,j=1}^n. \tag{17}$$

90. Пусть метрический тензор на ориентированном многообразии задан своими компонентами g_{ij} в локальной системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Показать, что выражение вида

$$\sqrt{\det(g_{ij})} dx^1 \wedge \cdots \wedge x^n \tag{18}$$

корректно определяет диффернциальную форму на многообразии.

91. Записать дифференциальную форму $\omega = f(x^2 + y^2)(x dx + y dy)$ в полярных координатах.

92. Записать дифференциальную форму $\omega = \sqrt{x^2 + y^2}(dx \wedge dy)$ в полярных координатах.

93. Записать дифференциальную форму $\omega = xdx + ydy + zdz$ в сферических координатах.

94. Записать дифференциальную форму

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

в сферических координатах.

95. Записать дифференциальную форму $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ в сферических координатах.

96. Вычислить внешний диффернциал следующих дифференциальных форм:

   (a) $z^2 dx \wedge dy + (z^2 + 2y)dx \wedge dz$;
   (b) $13xdx + y^2 dy + xyzdz$;
   (c) $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$;
   (d) $\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$;
   (e) $f(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$;
   (f) fdg, где f и g — гладкие функции.

Лекция 11 (16 ноября 2004 г.)

1. Понятие когомологий гладкого многообразия. Связь с решениями уравнения $dT = S$.

2. Вычисление когомологий окружности.

3. Независимость прообраза класса когомологий от деформации отображения.

4. Лемма Пуанкаре.

5. Группы когомологий евклидвого пространства.

Задачи:

97. Доказать формулу Картана

$$(d\omega)(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{X}(\omega(\mathbf{Y})) - \mathbf{Y}(\omega(\mathbf{X})) - \omega([\mathbf{X}, \mathbf{Y}]), \tag{19}$$

где ω — одномерня дифференциальная форма, а $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ — векторные поля.

98. Доказать, что мнообразие M, $\dim M = n$, ориентируемо тогда и только тогда, когда на M существует дифференциальная форма ω ранга n, невырожденная в каждой точке.

99. Пусть ω — дифференциальная форма ранга 1, нигде не обращающаяся в ноль, а Ω —произвольная форма ранга $p > 0$. Доказать, что форма Ω допускает представение $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

100. Доказать, что ограничение замкнутой формы на подмнообразие является замкнутой формой.

101. Доказать, что ограничение точной формы на подмнообразие является точной формой.

102. Доказать, что $H^0(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ и $H^i(\mathbf{R}) = 0$ при $i \neq 0$.

103. Описать нульмерные когомологии де Рама произвольного гладкого компактного многообразия.

104. Доказать, что на $\mathbf{R}^n$ любая замкнутая форма ранга $k > 0$ точна, а замкнутая форма ранга 0 есть постоянная функция.

105. Доказать, что n-мерные когомологии n-мерного компактного ориентируемого многообразия нетривиальны.

106. Пусть многообразие M разлагается в несвязное объединение двух многообразий одинаковой разерности, $M = M_1 \sqcup M_2$. Доказать, что $H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2)$.

107. Показать, что на окружности $\mathbf{S}^1$ форма ω ранга 1 является точной тогда и только тогда, когда $\int\limits_{\mathbf{S}^1} \omega = 0$.

Лекция 12 (23 ноября 2004 г.)

1. Понятие ориентированного многообразия с краем. Ориентация края гладкого ориетированного многообразия.
2. Ориетируемость многообразия S^1, S^2 , S^n , T^2.
3. Ориетируемость комплексно-аналитических многообразий.
4. Понятие интеграла дифференциальной формы по ориентированному многообразию. Независимость интеграла от выбора локальной системы координат.

Задачи:

108. Вычислить когомологии сферы $\mathbf{S}^n$.

109. Вычислить когомологии тора $\mathbf{T}^2$.

110. Вычислить когомологии плоскости $\mathbf{R}^2$, у которйо удалено k точек.

111. Доказать, что на сфере $\mathbf{S}^n$, $n > 1$, не существует завмкнутых форм ранга 1, ненулевых в каждой точке.

112. Вычислить интеграл $\int\limits_M ((x+y)dx + (x-y)dy))$ по эллипсу

$$M = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

113. Вычислить интеграл

$$\int\limits_M (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$$

по сфере $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

114. Вычислить интеграл

$$\int\limits_M ((y-z)dy \wedge dz + (z-x)dz \wedge dx + (x-y)dx \wedge dy)$$

по сфере $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

115. Вычислить интеграл

$$\int\limits_M ((y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz)$$

по кривой

$$M = \{x = a\sin^2 t,\ y = 2a\cos t \sin t,\ z = a\cos^2 t, \quad 0 \le t \le 2\pi.\}$$

Лекция 13 (30 ноября 2004 г.)

1. Общая формула Стокса.
2. Формулы Грина, Стокса и Гаусса-Остроградского.
3. Интегралы первого и второго рода в векторном анализе.
4. Объем риманового ориентированного компактного многообразия.

Задачи:

116. Вывести из общей формулы Стокса формулу Грина.

117. Вывести из обще формулы Стокса формулу Гаусса–Остроградского.

118. Вывести из общей формулы Стокса трехмерную формулу Стокса.

119. Вывести из общей формулы Стокса формулу интегрирования по трехмерному объему V, ограниченного замкнутой поверхностью Σ:

$$\iiint\limits_V (\varphi\Delta\psi + (\operatorname{grad}\varphi,\ \operatorname{grad}\psi))\,dV = \iint\limits_\Sigma \varphi\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}d\sigma,$$

где $\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}$ — производная вдоль нормали к поверхности Σ.

120. Вывести из общей формулы Стокса формулу интегрирования по трехмерному объему V, ограниченного замкнутой поверхностью Σ:

$$\iiint\limits_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,dV = \iint\limits_\Sigma \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} - \psi\right)d\sigma,$$

где $\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}}$ — производная вдоль нормали к поверхности Σ.

Лекция 14 (7 декабря 2004 г.)

1. Регулярные точки отображений. Лемма Сарда.
2. Теорема Уитни о вложении компактного многообразия в евклидово пространство.
3. Степень отображения и ее свойства.
4. Группа гомеоморфизмов, порожденная векторным полем
5. Выражение интеграла дифференциальной формы через степень отображения.
6. Гауссово сферическое отображение.
7. Теорема Гаусса-Боне.

Задачи:

121. Пусть $f : \mathbf{S}^2 \longrightarrow \mathbf{S}^2$ — центральная симметрия. Вычислить степень $\deg f$ отображения f.

122. Найти степень канонического отображения

$$\mathbf{S}^{2k+1} \longrightarrow \mathbf{RP}^{2k+1}$$

.

123. Привести в явномвиде пример отображения $f : \mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n$ степени k.

124. Построить гладкое отображение тора $\mathbf{T}^2$ на сферу $\mathbf{S}^2$ степени 1.

125. Построить гладкое отображение тора $\mathbf{T}^2$ на сферу $\mathbf{S}^2$ степени k

126. Доказать, что два гладких отображения $\mathbf{S}^1 \longrightarrow \mathbf{S}^1$ гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень отображения.

127. Доказать, что два гладких отображения $\mathbf{S}^n \longrightarrow \mathbf{S}^n$ гомотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую степень отображения.

128. Для стандартного вложения тора $\mathbf{T}^2$ в $\mathbf{R}^3$ пусть $f : \mathbf{T}^2 \longrightarrow \mathbf{S}^2$ сопоставляет точке $x \in \mathbf{T}^2$ ее нормаль $f(x) = \mathbf{n}$. Вычислить стеень отображения f.

Лекция 15 (14 декабря 2004 г.)

1. Уравнение Эйлера для вариационной задачи.

2. Уравнение экстремалей для функционала действия на римановом многообразии.

3. Уравнение экстремалей для функционала длины.