Задачи к экзамену по курсу "Дифференциальная геометрия и топология

(математики, 3-й курс, лектор - А.С.Мищенко)
Осенний семестр 2004/05 уч. года

18 декабря 2004 г.

1. Определить валентность тензоров, компоненты которых выражаются следующим образом:
$$T_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$
2. Определить валентность тензоров, компоненты которых выражаются следующим образом:
$$T_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$$
в точках, где градиент функции f равен нулю.
3. Определить валентность тензоров, компоненты которых выражаются следующим образом:

   T^i_j — компоненты матрицы линейного оператора векторного пространства.
4. Определить валентность тензоров, компоненты которых выражаются следующим образом:

   T_{ij} — компоненты матрицы билинейной формы на векторном пространстве.
5. Пусть
$$\delta^i_j = \begin{cases} 0 & \text{если } i \neq j, \\ 1 & \text{если } i = j. \end{cases} \tag{1}$$
Показать, что компоненты $\{\delta^i_j\}$ образуют тензор валентности (1,1).
6. Пусть $\xi = \{\xi^{ij}\}$ — тензор валентности (2,0), а числа $\{\eta_{ij}\}$ удовлетворяют условиям
$$\xi^{ij}\eta_{jk} = \delta^i_j \tag{2}$$
для произвольных значений индексов i, j. Доказать, что компоненты $\{\eta_{ij}\}$ образуют тензор валентности (0,2).

7. Пусть тензор валентности (0,2) задается в некоторой системе координат $(x^1,...,x^n)$ матрицей $g = \{g_{ij}(x)\}$. Допустим, что матрица g

   (a) симметрична,

   (b) невырождена и

   (c) неотрицательно определена.

   Доказать, что свойства (7a), (7b), (7c) сохраняются при любой регулярной замене координат.

8. Привести пример, показывающий, что операция перестановки верхнего индекса с нижним индексом не является тензорной операцией.

9. Пусть $T = \{T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}(x)\}$ — тензорное поле. Показать, что операция

$$
\begin{array}{rcl}
T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q} & \Rightarrow & S^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{q+1}} : \\
S^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_{q+1}} & = & \frac{\partial}{\partial x^{j_{q+1}}} T^{i_1,\ldots,i_p}_{j_1,\ldots,j_q}
\end{array}
\tag{3}
$$

   является тензорной операцией только при $p = 0$ и $q = 0$.

10. Определить размерность тензорного пространства V^m_n.

11. Пусть $f : V^m_n \to V^p_q$ —линейное отображение тензорных пространств. Показать, что коэффициенты (относительно компонент тензоров в пространствах V^m_n и V^p_q) линейного отображения f образуют тензор. Определить его валентность.

12. Найти тип тензора, компоненты которого суть коэффициенты векторного произведения, векторов в $\mathbf{R}^3$. Показать, что эти тензоры получаются друг из друга путем подымания или опускания индексов.

13. Найти тип тензора, компоненты которого суть коэффициенты смешанного произведения векторов в $\mathbf{R}^3$. Показать, что эти тензоры получаются друг из друга путем подымания или опускания индексов.

14. Показать, что любой тензор валентности (2,0) однозначно разлагается в сумму симметрического и кососимметрического слагаемых. Показать, что для тензоров валентности (3,0) аналогичное утверждение не верно.

15. Доказать, что операторы альтернирования и симметрирования являются проекторами в пространстве тензоров.

16. Показать, что операция перестановки индексов коммутирует с операциями альтернирования и симметрирования.

17. Показать, что композиция операций альтернирования и симметрирования является нулевой операцией.

18. Определить размерности пространств $\Lambda^k V$ и $S^k V$.

19. Описать все инвариантные тензоры ранга 0 и 1.

20. Описать все инвариантные тензоры ранга 2.

21. Выразить через коэффициенты характеристического многочлена оператора $c = \{c^i_j\}$ величины $\det c$, c^i_i, $c^i_j c^j_i$.

22. Представить определитель линейного оператора как результат выполнения последовательности элементарных тензорных операций.

23. Доказать, что градиент $\operatorname{grad} f$ функции f перпендикулярен поверхностям уровня функции f.

24. Пусть тензор X имеет валентность $(1,0)$, а тензор W имеет валентность $(0,1)$. Найти ранг оператора $X \otimes W$.

25. Пусть $\xi \in \Lambda^1 V$, $\xi \neq 0$, $\omega \in \Lambda^k V$. Доказать, что равенство $\xi \wedge \omega = 0$ выполняется тогда и только тогда, когда ω представляется в виде $\omega = \xi \wedge \psi$ для некоторого $\psi \in \Lambda^{k-1} V$.

26. Пусть тензор $T = \{T_{ijk}\}$ симметричен по первым двум индексам и кососимметричен по второму и третьему индексам. Доказать, что $T = 0$.

27. Пусть $a = \{a_{ij}\}$ — симметрический тензор, а $d = \{b^{ij}\}$ — кососимметрический тензор. Доказать, что $a_{ij} b^{ij} = 0$.

28. Пусть $T = \{T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x)\}$ тензорное поле. Доказать, что для любой системы координат имеет место единственное разложение
$$T = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}.$$

29. Пусть $\Gamma = \{\Gamma^k_{ij}\}$ — линейная связность. Доказать, что $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$ образуют тензор валентности (1,2).

30. Пусть $\Gamma = \{\Gamma^k_{ij}\}$ и $\widetilde{\Gamma} = \{\widetilde{\Gamma}^k_{ij}\}$ — две линейные связности. Доказать, что $T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \widetilde{\Gamma}^k_{ij}$ образуют тензор валентности (1,2). И обратно, если $T = \{T^k_{ij}\}$ —тензор валентности (1,2), а $\Gamma = \{\Gamma^k_{ij}\}$ — линейная связность, то $\widetilde{\Gamma}^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} + T^k_{ij}$ образуют коэффициенты некоторой линейной связности.

31. Пусть $\Gamma = \{\Gamma^k_{ij}\}$ и $\gamma = \{\gamma^k_{ij}\}$ — две линейные связности, α и β — две гладкие функции, причем $\alpha(x) + \beta(x) \equiv 1$. Показать, что компоненты $\{\alpha \Gamma^k_{ij} + \beta \gamma^k_{ij}\}$ служат коэффициентами некоторой линейной связности.

32. Доказать, что тензорное поле δ^i_j символов Кронекера параллельно вдоль любой кривой для любой линейной связности.

33. Доказать, что при одновременном параллельном перенесении нескольких тензоров вдоль данной кривой параллельно переносятся и тензоры, полученные из исходных при помощи тензорных операций. Иными словами результат параллельного перенесения вдоль кривой коммутирует с тензорными операциями.

34. На римановом многообразии симметрическая риманова связность удовлетворяет условию: операция параллельного перенесения коммутирует с операциями опускания и поднятия индексов. Доказать.

35. Пусть векторное поле имеет постоянную длину относительно римановой метрики. Доказать, что ковариантная производная относительно симметрической римановой связности в любом направлении ортогональна к исходному векторному полю.

36. Вычислить символы Кристоффеля евклидовой метрики плоскости в полярных координатах.

37. Вычислить символы Кристоффеля метрики

$$ds^2 = \lambda(u,v)(du^2 + dv^2). \tag{4}$$

38. Вычислить символы Кристоффеля в $\mathbf{R}^3$ в сферической системе координат.

39. Вычислить символы Кристоффеля на сфере в сферической системе координат.

40. Вычислить угол, на какой повернется касательный вектор на прямом круговом цилиндре в $\mathbf{R}^3$ при параллельном перенесении вдоль замкнутой кривой. Зависит ли результат от вида кривой?

41. Вычислить угол, на какой повернется касательный вектор на прямом круговом конусе в $\mathbf{R}^3$ при параллельном перенесении вдоль замкнутой кривой. Установить зависимость от вида кривой.

42. Выписать в явном виде и решить уравнения параллельного переноса на сфере с метрикой $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ вдоль кривой $\theta = \theta_0 = \mathbf{const}$, т.е. вдоль параллели;

43. Выписать в явном виде и решить уравнения параллельного переноса на сфере с метрикой $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$ вдоль кривой $\varphi = \varphi_0 = \mathbf{const}$, т.е. вдоль меридиана.

44. На какой угол повернется касательный вектор на сфере в результате параллельного перенесения вдоль параллели.

45. Доказать, что n–мерная сфера S^n, задаваемая в $\mathbf{R}^n$ уравнением $x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$, является гладким многообразием.

    Построить атлас карт.

46. Доказать, что двумерный тор T^2, заданный как поверхность вращения вокруг оси Oz окружности, лежащей в плоскости Oxy и не пересекающейся с осью Oz, является гладким многообразием.

    Построить атлас карт.

47. Доказать, что n–мерное проективное пространство $\mathbf{RP}^n$ является гладким (и вещественно-аналитическим) многообразием.

48. Доказать, что n–мерное комплексное проективное пространство $\mathbf{CP}^n$ является гладким (и комплексно-аналитическим) многообразием.

49. Доказать гомеоморфность многообразий $\mathbf{S}^2$ и $\mathbf{CP}^1$.

50. Доказать, что матрица Якоби композиции двух гладких отображений является композицией матриц Якоби сомножителей.

51. Доказать, что ранг матрицы Якоби не зависит от выбора локальной системы координат.

52. Вычислить ранг матрицы Якоби отображения

$$f(x,y) = (x,0) : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2. \tag{5}$$

53. Доказать, что группа $\mathbf{SO}(2)$ диффеоморфна окружности. Какому многообразию диффеоморфна группа $\mathbf{O}(2)$?

54. Доказать, что группа $\mathbf{SO}(3)$ гомеоморфна проективному пространству $\mathbf{RP}^3$.

55. Доказать, что группа $\mathbf{SU}(2)$ гомеоморфна сфере $\mathbf{S}^3$

56. Доказать, что уравнение

$$z_1^2 + z_2^2 = 1 \tag{6}$$

    в комплексном пространстве $\mathbf{C}^2$ определяет многообразие, гомеоморфное цилиндру.

57. Доказать, что объединение двух координатных осей в $\mathbf{R}^2$ не является многообразием.

58. Можно ли ввести структуру гладкого многообразия для следующих кривых на плоскости:

    а) треугольник;

    б) объединение двух треугольников, имеющих только одну общую точку — вершину?

59. Показать. что сфере $\mathbf{S}^n$ нельзя вести атлас, состоящий из одной карты.

60. Показать, что при $n \neq m$ пространства $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ не диффеоморфны.

61. Привести пример гладкого гомеоморфизма, не являющегося диффеоморфизмом.

62. Показать, что на плоскости $\mathbf{R}^2$ можно вести такую структуру гладкого многообразия, что кривая $y = x^2$ перестает быть гладкой.

63. Показать, что декартово произведение гладких многообразий допускает структуру гладкого многообразия, причем проекции являются гладкими отображениями.

64. Доказать, что n–мерное комплексное многообразие является гладким ориентируемым многообразием размерности $2n$.

65. Показать, что окружность $\mathbf{S}^1$, сфера $\mathbf{S}^n$, тор $\mathbf{T}^2$ являются ориентируемыми многообразиями.

66. Доказать существование римановой метрики на любом (компактном) гладком многообразии с помощью разбиения единицы;

67. Доказать существование римановой метрики на любом (компактном) гладком многообразии с помощью теоремы Уитни.

68. Описать все линейные связности на окружности. Написать формулу для параллельного перенесения для произвольной связности на окружности.

69. Показать, что геодезическая линия на двумерной поверхности в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^3$ вполне характеризуется свойством: в каждой точке, где ее кривизна отлична от нуля, нормаль к поверхности коллинеарна с нормалью к кривой.

70. Пусть прямая линия лежит на поверхности в $\mathbf{R}^3$. Доказать, что эта прямая является геодезической линией на поверхности.

71. Пусть две поверхности соприкасаются по некоторой линии, которая являются геодезической на одной поверхности. Показать, что эта линия является геодезической и на другой поверхности.

72. На поверхности $\mathbf{r}(u, v) \in \mathbf{R}^3$ задана кривая линия $u = u(s),\ v = v(s)$. Показать, что геодезическая линия задается уравнением

$$\left(m(u(s), v(s)), \frac{d}{ds}\mathbf{r}, \frac{d^2}{ds^2}\mathbf{r} \right) = 0, \tag{7}$$

где m — вектор нормали поверхности.

73. Доказать, что в евклидовом пространстве геодезическими линиями являются прямые и только они.

74. Доказать, что меридианы поверхности вращения являются геодезическими линиями.

75. Доказать, что параллель поверхности вращения является геодезической тогда и только тогда, когда касательная к меридиану в ее точках параллельна оси вращения.

76. Найти все геодезические линии двумерной сферы.

77. Пусть две поверхности трансверсально пересекаются по линии, которая является геодезической на каждой из этих поверхностей. Доказать, что эта линия является прямой.

78. Вычислить тензор кривизны на двумерной сфере $\mathbf{S}^2$ в сферических координатах.

79. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: сферы $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{R}^3$,

80. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: тора $\mathbf{T}^2$, вложенного в $\mathbf{R}^3$ как поверхность вращения,

81. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: тора $\mathbf{T}^2$, вложенного в $\mathbf{C}^2$, задаваемого уравнениями

$$\begin{aligned} |z|^2 + |w|^2 &= 1, \\ |z| &= |w|; \end{aligned} \tag{8}$$

82. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: прямого кругового конуса;

83. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: цилиндра;

84. Вычислить скалярную кривизну следующего риманового многообразия: сферы $\mathbf{S}^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

85. Показать, что у двумерной поверхности тензор Риччи пропорционален метрическому тензору. Найти коэффициент пропорциональности.

86. Доказать, что если дифференциальная форма ω имеет порядок p, т.е. $\omega \in \Lambda^p(V^*)$, а вектора $v_1, v_2, \ldots, v_p$ линейно зависимы, то

$$V(v_1, v_2, \ldots, v_p) = 0. \tag{9}$$

87. Доказать, что если формы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ линейно зависимы, то

$$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p = 0. \tag{10}$$

88. Пусть $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p \in V^*$; $v_1, v_2, \ldots, v_p \in V$. Доказать, что

$$(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_p)(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \frac{1}{n!} \det \|\omega_i(v_j)\|_{i,j=1}^n. \tag{11}$$

89. Пусть метрический тензор на ориентированном многообразии задан своими компонентами g_{ij} в локальной системе координат $(x^1, \dots, x^n)$. Показать, что выражение вида

$$\sqrt{\det\,(g_{ij})}dx^1 \wedge \dots \wedge x^n \tag{12}$$

корректно определяет дифференциальную форму на многообразии.

90. Записать дифференциальную форму $\omega = f(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$ в полярных координатах.

91. Записать дифференциальную форму $\omega = \sqrt{x^2 + y^2}(dx \wedge dy)$ в полярных координатах.

92. Записать дифференциальную форму $\omega = xdx + ydy + zdz$ в сферических координатах.

93. Записать дифференциальную форму

$$\omega = \frac{xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

в сферических координатах.

94. Записать дифференциальную форму $\omega = dx \wedge dy \wedge dz$ в сферических координатах.

95. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $z^2 dx \wedge dy + (z^2 + 2y)dx \wedge dz$;

96. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $13xdx + y^2dy + xyzdz$;

97. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$;

98. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$;

99. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы $f(x^2 + y^2)(xdx + ydy)$;

100. Вычислить внешний дифференциал дифференциальной формы fdg, где f и g — гладкие функции.

101. Доказать, что многообразие M, $\dim M = n$, ориентируемо тогда и только тогда, когда на M существует дифференциальная форма ω ранга n, невырожденная в каждой точке.

102. Пусть ω — дифференциальная форма ранга 1, нигде не обращающаяся в ноль, а Ω —произвольная форма ранга $p > 0$. Доказать, что форма Ω допускает представление $\Omega = \theta \wedge \omega$ тогда и только тогда, когда $\Omega \wedge \omega = 0$.

103. Доказать, что ограничение замкнутой формы на подмногообразие является замкнутой формой.

104. Доказать, что ограничение точной формы на подмногообразие является точной формой.

105. Доказать, что $H^0(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ и $H^i(\mathbf{R}) = 0$ при $i \neq 0$.

106. Описать нульмерные когомологии де Рама произвольного гладкого компактного многообразия.

107. Доказать, что на $\mathbf{R}^n$ любая замкнутая форма ранга $k > 0$ точна, а замкнутая форма ранга 0 есть постоянная функция.

108. Пусть многообразие M разлагается в несвязное объединение двух многообразий одинаковой размерности, $M = M_1 \sqcup M_2$. Доказать, что $H^p(M) = H^p(M_1) \oplus H^p(M_2)$.

109. Показать, что на окружности $\mathbf{S}^1$ форма ω ранга 1 является точной тогда и только тогда, когда $\int\limits_{\mathbf{S}^1} \omega = 0$.

110. Вычислить интеграл $\int\limits_M ((x+y)dx + (x-y)dy))$ по эллипсу

$$M = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}.$$

111. Вычислить интеграл

$$\int\limits_M (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$$

по сфере $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

112. Вычислить интеграл

$$\int\limits_M ((y-z)dy \wedge dz + (z-x)dz \wedge dx + (x-y)dx \wedge dy)$$

по сфере $M = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

113. Вычислить интеграл

$$\int\limits_M ((y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz)$$

по кривой

$$M = \{x = a\sin^2 t,\ y = 2a\cos t\sin t,\ z = a\cos^2 t, \quad 0 \le t \le 2\pi.\}$$

114. Вывести из общей формулы Стокса формулу Грина.

115. Вывести из обще формулы Стокса формулу Гаусса–Остроградского.

116. Вывести из общей формулы Стокса трехмерную формулу Стокса.