"Введение в топологию",
конспект лекции 2.

А.С.Мищенко

12 сентября 2012 г.

План

Топологические пространства. Топологии. Сравнение топологий. Открытые множества. Простейшие примеры. Замкнутые множества. Эквивалентное определение топологии.
База открытых множеств. Предбаза.
Замыкание и внутренность подмножества. Окрестность точки. Точки прикосновения. Внутренние, внешние, граничные, предельные, изолированные точки подмножества.
Подпространства.
Метрические пространства. Шаровая окрестность. Открытость шаровой окрестности. Эвклидово пространство.
Вещественная прямая. Интервал. Структура открытого множества на прямой. Отрезок. Пространство рациональных чисел. Канторово совершенное множество.
Топология на упорядоченных множествах

Топологические пространства

Топологические пространства

Топологическим пространством называется произвольное множество X с фиксированной дополнительной структурой. Эта дополнительная структура задается как семейство $\mathcal{T}$ подмножеств множества X, которое удовлетворяет следующим условиям:

1. Пустое подмножество $\emptyset$ и все множество X принадлежат семейству $\mathcal{T}$;

2. Если подмножества $U_\alpha \subset X, \quad \alpha \in A$ принадлежат семейству $\mathcal{T}$, т.е. $U_\alpha \in \mathcal{T}$, то объединение
$$U = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$
принадлежит семейству $\mathcal{T}$, т.е. $U \in \mathcal{T}$. Множество индексов A может быть произвольным, конечным или бесконечным.

3. Если подмножества $U_\alpha \subset X, \quad \alpha \in A$ принадлежат семейству $\mathcal{T}$, т.е. $U_\alpha \in \mathcal{T}$, и множество индексов A конечно, то пересечение

$$U = \bigcap_{\alpha \in A} U_\alpha$$

также принадлежит семейству $\mathcal{T}$, т.е. $U \in \mathcal{T}$.

Топологии, сравнение топологий

Определение 1 *Множество X, оснащенное дополнительным семейством $\mathcal{T}$, описанным в параграфе , т.е. пара $(X;\mathcal{T})$ называется топологическим пространством. Семейство $\mathcal{T}$ называется топологией на множестве X, формирующей топологическое пространство $(X;\mathcal{T})$.*

В случае, когда это не будет приводить к разночтению, мы будем опускать обозначение топологии и кратко обозначать топологическое пространство через X, подразумевая, что топология $\mathcal{T}$ фиксирована (и известна).

Элементы $x \in X$ называются *точками* топологического пространства X.

Подмножества $U \subset X$ из семейства $\mathcal{T}$, т.е. $\mathbf{U} \in \mathcal{T}$ называются *открытыми подмножествами* топологического пространства $(X;\mathcal{T})$.

Простейшие примеры

- Пусть X – произвольное множество. Пусть $\mathcal{T}$ состоит из всех подмножеств множества X, т.е. $\mathcal{T} = 2^X$ согласно традиционному обозначению из абстрактной теории множеств. Семейство $\mathcal{T}$ задает топологию на множестве X. Так получающееся топологическое пространство $(X;\mathcal{T})$ называется *дискретным пространством* .

- На том же множестве X можно задать другую топологию, скажем $\mathcal{T}'$, состоящую только из двух подмножеств $\mathcal{T}' = \{\emptyset, X\}$. Так получающееся топологическое пространство $(X;\mathcal{T}')$ называется *антидискретным пространством* .

Приведенные примеры показывают, что на одном и том же множестве X можно задавать различные топологии, т.е. топологические пространства с одним и тем же (подстилающим) множеством и различными семействами $\mathcal{T}$, задающими топологию на множестве X.

Если $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}'$ – две топологии на одном и том же множестве X, и если выполнено условие $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}'$, то мы будем говорить, что топология $\mathcal{T}$ является *более слабой*, чем топология $\mathcal{T}'$ или топология $\mathcal{T}'$ является *более сильной*, чем топология $\mathcal{T}$. В этом случае будем писать $\mathcal{T} \prec \mathcal{T}'$ или $\mathcal{T}' \succ \mathcal{T}$.

С точки зрения введенных терминов топология дискретного топологического пространства сильнее топологии антидискретного пространства (с одним и тем же подстилающим множеством). Более того дискретная топология является самой сильной топологией, а антидискретная топология является самой слабой топологией среди всех топологий подстилающего множества.

Эквивалентное определение

Пусть $(X;\mathcal{T})$ – топологическое пространство. Назовем подмножество $F \subset X$ *замкнутым* если его дополнение $U = X \setminus F$ является открытым подмножеством, т.е. $U \in \mathcal{T}$. Тогда топология $\mathcal{T}$ может быть задана при помощи семейства всех замкнутых подмножеств $\mathcal{T}^c = \{F \in X : X \setminus F \in \mathcal{T}\}$, которое удовлетворяет двойственным условиям:

1. Пустое подмножество $\emptyset$ и все множество X принадлежат семейству $\mathcal{T}^c$;

2. Если подмножества $F_\alpha \subset X, \quad \alpha \in A$ принадлежат семейству $\mathcal{T}^c$, т.е. $F_\alpha \in \mathcal{T}^c$, то пересечение
$$F = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha$$
принадлежит семейству $\mathcal{T}^c$, т.е. $F \in \mathcal{T}^c$. Множество индексов A может быть произвольным, конечным или бесконечным.

3. Если подмножества $F_\alpha \subset X, \quad \alpha \in A$ принадлежат семейству $\mathcal{T}^c$, т.е. $F_\alpha \in \mathcal{T}^c$, и множество индексов A конечно, то объединение
$$F = \bigcup_{\alpha \in A} F_\alpha$$
также принадлежит семейству $\mathcal{T}^c$, т.е. $F \in \mathcal{T}^c$.

База открытых множеств

Замыкание и внутренность подмножества

Замыканием подмножества $H \subset X$ топологического пространства $(X;\mathcal{T}^c)$ называется множество $\overline{H}$, определяемое формулой
$$\overline{H} = \bigcap \{F \in \mathcal{T}^c : H \subset F\}.$$

Замыкание $\overline{H}$, очевидно, является замкнутым подмножеством, т.е. $\overline{H} \in \mathcal{T}^c$, причем замыкание замкнутого подмножества F совпадает с ним самим: $\overline{F} = F, \quad F \in \mathcal{T}^c$. Следовательно, повторное применение замыкания оставляет результат на месте: $\overline{(\overline{H})} = \overline{H}$. Замкнутое множество F определяется условием $\overline{F} = F$.

Двойственным образом, переходя к дополнениям подмножеств, скажем, что *внутренностью* подмножества $H \subset X$ топологического пространства $(X;\mathcal{T})$ называется множество $\mathbf{Int}\,(H)$, определяемое формулой
$$\mathbf{Int}\,(H) = \bigcup \{U \in \mathcal{T} : U \subset H\} \subset H.$$

Внутренность $\mathbf{Int}\ (H)$ подмножества $H \subset X$ является открытым подмножеством, $\mathbf{Int}\ (H) \in \mathcal{T}$, и аналогично операции замыкания двойное применение операции внутренности оставляет результат на месте: $\mathbf{Int}\ (\mathbf{Int}\ (H)) = \mathbf{Int}\ (H)$. Если U – открытое множество и $U \subset H$, то $U \subset \mathbf{Int}\ (H)$.

Окрестность точки. Точки прикосновения, внутренние, внешние, граничные и предельные точки

Рассмотрим топологическое пространство $(X;\mathcal{T})$ и некоторую его точку $x \in X$. Подмножество $H \subset X$ называется *окрестностью* точки x, если выполнено условие

$$x \in \mathbf{Int}\ (H) \subset H \subset X.$$

Пересечение конечного числа окрестностей H_α точки x является окрестностью (точки x):

$$x \in \bigcap_\alpha \mathbf{Int}\ (H_\alpha) \subset \mathbf{Int}\ (\bigcap_\alpha H_\alpha).$$

Точка $x \in X$ называется *внутренней точкой* подмножества H, если H есть окрестность точки x. Точка $x \in X$ называется *внешней точкой* подмножества H, если имеется окрестность H' точки x, которая не пересекается с подмножеством H. Наконец, точка $x \in H$ называется *граничной точкой* подмножества H, если эта точка не является ни внутренней, ни внешней точкой подмножества H, т.е. всякая ее окрестность H' пересекается как с подмножеством H, так и с его дополнением $X \setminus H$. Внутренние и граничные точки образуют *точки прикосновения* подмножества H. Это такие точки, у которых всякая окрестность H' пересекается с подмножеством H.

Внутренние точки подмножества H образуют его внутренность $\mathbf{Int}\ (H)$. Точки прикосновения подмножества H образуют его замыкание $\overline{H}$. Внешние точки подмножества H образуют внутренность его дополнения $\mathbf{Int}\ (X \setminus H)$.

Среди точек прикосновения подмножества H выделяются *предельные* точки и *изолированные* точки . Точка $x \in X$ называется *предельной* точкой множества H, если x является точкой прикосновения подмножества $H \setminus \{x\}$. Другими словами у предельной точки x любая ее окрестность $U \ni x$ имеет непустое пересечение с подмножеством $H \setminus \{x\}$. В противном случае точка прикосновения x подмножества H называется *изолированной* точкой. Легко проверить, что изолированная точка x подмножества H ему же и принадлежит, $x \in H$. Если подмножество H совпадает со всем топологическим пространством X, то предельная точка x подмножества H просто называется *предельной* точкой топологического пространства X . Аналогично, изолированная точка подмножества $H = X$ называется *изолированной* точкой топологического пространства X . Легко проверить, что изолированная точка x топологического пространства X является открытым (одноточечным) подмножеством $\{x\} \subset X;\ \{x\} \in \mathcal{T}$.

Плотные подмножества. Сепарабельность

Подмножество $H \subset X$ топологического пространства X называется *плотным* подмножеством, если $\overline{H} = X$. Топологическое пространство X называется сепарабельным, если в нем имеется счетное плотное подмножество.

Подпространства

Рассмотрим некоторое подмножество $H \subset X$ топологического пространства $(X; \mathcal{T})$. Подмножество H можно рассматривать как самостоятельное множество, на котором можно задать собственную топологию. Рассмотрим специальную топологию $\mathcal{T}|_H$ на множестве H, составленную из всех подмножеств

$$\mathcal{T}|_H = \{U \cap H : U \in \mathcal{T}\}.$$

Семейство $\mathcal{T}|_H$, очевидно, образует некоторую топологию на множестве H. В этом случае топологическое пространство $(H; \mathcal{T}|_H)$ называется *подпространством* в топологическом пространстве $(X; \mathcal{T})$, которое задается подмножеством $H \subset X$. Так же как и в случае самого топологического пространства в случае, когда это не будет приводит к разночтению, мы будем кратко говорить, что $H \subset X$ есть подпространство в топологическом пространстве X, подразумевая, что топология $\mathcal{T}|_H$ фиксирована на подмножестве H.

Следует обратить внимание, что рассмотрение подмножеств $U \subset H \subset X$ может приводить к терминологической путанице в понятии открытого подмножества. Множество U одновременно является подмножеством как в множестве X, так и в множестве H. Поэтому во избежании путаницы, свойства подмножества быть открытым или замкнутым следует относить или к пространству X или к его подпространству H. Поэтому в таком случае мы будем говорить более точно, что подмножество U *открыто в пространстве* X, если $U \in \mathcal{T}$, и что подмножество U открыто в подпространстве H, если $U \in \mathcal{T}|_H$. Аналогично, будем говорить, что подмножество U *замкнуто в пространстве* X, если $U \in \mathcal{T}^c$, и что подмножество U замкнуто в подпространстве H, если $U \in \mathcal{T}^c|_H$.

В некоторых случаях понятия открытого или замкнутого множества может не зависеть от того в каком топологическом пространстве рассматривается подмножество U.

Например, пусть подпространство $H \subset X$ является открытым подмножеством в пространстве X. Тогда подмножество $U \subset H \subset X$ является открытым подмножеством в подпространстве H тогда и только тогда, когда оно является открытым подмножеством в пространстве X.

Аналогично, если подпространство $H \subset X$ является замкнутым подмножеством в пространстве X, то подмножество $F \subset H \subset X$ является замкнутым подмножеством в подпространстве H тогда и только тогда, когда оно является замкнутым подмножеством в пространстве X.

1 Примеры топологических пространств

Метрические пространства

Ключевые примеры топологических пространства доставляют пространства с дополнительной структурой метрики на нем. Пусть на множестве X задана вещественно значная функция от двух переменных $\rho(x,y) \in \mathbf{R}, \quad x,y \in X$, т.е. отображение декартового квадрата

$$\rho : X \times X \longrightarrow \mathbf{R},$$

удовлетворяющая условиям:

1. $\rho(x,y) \geq 0$, причем если $\rho(x,y) = 0$, то $x = y$,

2. для любых двух точек $x, y \in X$ выполнено условие симметрии

$$\rho(x,y) = \rho(y,x),$$

3. для любых трех точек $x, y, z \in X$ выполнено так *называемое неравенство треугольника*:

$$\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y).$$

Определение 2 *Функция ρ называется метрикой, значение $\rho(x,y)$ называется расстоянием между точками x и y, а пара (X,ρ) называется метрическим пространством.*

Множество

$$O_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(x,y) < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0\}$$

называется *шаровой окрестностью точки x радиуса ε,* а точка x при этом называется *центром* шаровой окрестности $O_\varepsilon(x)$.

Метрическое пространство (X,ρ) задает на множестве X топологию $\mathcal{T}_\rho$ по следующему правилу: открытым множеством $U \subset X$, будем считать всякое множество, для которого любая его точка $x \in U$ имеет некоторую шаровую окрестность целиком лежащую в U, $O_\varepsilon(x) \subset U$. Проверка аксиом топологии вытекает из следующих двух наблюдений:

1)Всякое множество открыто, если оно есть объединение семейства шаровых окрестностей некоторых радиусов всех своих точек. Следовательно, объединение любого семейства открытых множеств тоже есть объединение шаровых окрестностей всех своих точек, а, значит, открыто.

2)Если у точки x одна шаровая окрестность $O_{\varepsilon_1}(x)$ лежит в U_1, а вторая шаровая окрестность $O_{\varepsilon_2}(x)$ лежит в U_2, то их пересечение $O_{\varepsilon_1}(x) \cap O_{\varepsilon_2}(x)$ лежит в пересечении $U_1 \cap U_2$. Пересечение же $O_{\varepsilon_1}(x) \cap O_{\varepsilon_2}(x)$ (с одним и тем же центром x) тоже является шаровой окрестность радиуса $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$. Следовательно, пересечение открытых множеств U_1 и U_2 открыто.

Теорема 1 *В метрическом пространстве* (X, ρ) *шаровая окрестность* $O_\varepsilon(x)$ *любой точки любого радиуса является открытым множеством.*

Доказательство. Требуется лишь проверить, что если $y \in O_\varepsilon(x)$, то найдется такое положительное число δ, что $O_\delta(y) \subset O_\varepsilon(x)$. Такое число можно положить равным

$$\delta = \varepsilon - \rho(x, y) > 0.$$

Если $z \in O_\delta(y)$, то это значит, что $\rho(z, y) < \delta$. Применяя неравенство треугольника, получаем:

$$\rho(z, x) \leq \rho(z, y) + \rho(y, x) < \delta + \rho(x, y) = \varepsilon),$$

т.е. $z \in O_\varepsilon(x)$. Откуда вытекает включение $O_\delta(y) \subset O_\varepsilon(x)$. ∎

1.0.1 Пример: Эвклидово пространство

Эвклидово пространство в виде арифметического пространства $\mathbf{R}^n$ естественным образом задает расстояние между точками эвклидова пространства $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbf{R}^n$ и $\mathbf{y} = (y^1, \ldots, y^n) \in \mathbf{R}^n$ по формуле

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x^k - y^k)^2}.$$

Другими словами, расстояние $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ можно понимать как длину прямолинейного отрезка с концами в точках $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$. Поэтому неравенство

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

в определении метрики есть ничто иное как неравенство треугольника

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\|$$

в плоском треугольнике, образованном вершинами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, что и оправдывает название "неравенство треугольника". С другой стороны развернутое неравенство треугольника в эвклидовом пространстве, выраженное в координатах точек $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$,

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x^k - y^k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x^k - z^k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (z^k - y^k)^2},$$

является следствие неравенства Коши.

Замечание о неравенстве треугольника

Неравенство треугольника в метрическом пространстве (X, ρ) означает, что расстояние $\rho(x, y)$ между двумя точками $x \in X$ и $y \in X$ равно точной нижней грани суммы расстояний для произвольной цепочки точек $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая начинается в точке $x = x_0$ и кончается в точке $y = x_n$:

$$\rho(x, y) = \inf_{(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)} \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \cdots + \rho(x_{n-1}, x_n)\}.$$

Вышеприведенная точная нижняя грань достигается на простейшей цепочке, составленной из двух точек (x_0, x_1), $x = x_0$, $y = x_1$, т.е.

$$(x_0, x_1) = \mathop{\mathbf{arg\ inf}}_{(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)} \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \cdots + \rho(x_{n-1}, x_n)\}.$$

Если функция $\rho(x, y)$ не удовлетворяет неравенству треугольника, то при помощи этой функции можно определить уже новую функцию, скажем, $\bar{\rho}(x, y)$, которая уже удовлетворяет неравенству треугольника:

$$\bar{\rho}(x, y) = \inf_{(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)} \{\rho(x_0, x_1) + \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \cdots + \rho(x_{n-1}, x_n)\},$$

причем

$$\bar{\rho}(x, y) \leq \rho(x, y).$$

В случае, когда $\bar{\rho}(x, y) > 0$ для $x \neq y$, мы получаем максимально возможную метрику $\bar{\rho}$, которая не превосходит исходную функцию ρ.

Вещественная прямая

На *вещественной прямой* $\mathbf{R}^1$ как частном случае евклидового пространства каноническая метрика, задается формулой

$$\rho(x, y) = |x - y|, \quad x, y \in \mathbf{R}^1.$$

Шаровая окрестность $O_\varepsilon(x)$ точки $x \in \mathbf{R}^1$ представляет собой открытый интервал $O_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Каждое открытое подмножество $U \subset \mathbf{R}^1$ поэтому можно представить как объединение некоторого семейства *интервалов* :

$$U = \bigcup_\alpha (x_\alpha, y_\alpha).$$

Здесь каждый интервал (x_α, y_α) может быть как конечным, так и бесконечным. Другими словами наряду с обычными интервалами (x_α, y_α) допускаются интервалы вида $(-\infty, y_\alpha)$, (x_α, ∞) и $(-\infty, \infty)$. Это объединение выбирается неоднозначно: например, если два таких интервала (x_α, y_α) и (x_β, y_β) имеют непустое пересечение, скажем в случае, когда выполнены неравенства

$$x_\alpha \leq x_\beta < y_\alpha \leq y_\beta,$$

то вместо этих двух интервалов можно взять один больший интервал $(\mathbf{x}_\alpha, y_\beta)$.

Объединение открытого подмножества U при помощи интервалов является его покрытием $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, y_\alpha), \alpha \in A\}$. Если рассмотреть два таких покрытия $\mathcal{A} = \{(x_\alpha, y_\alpha), \alpha \in A\}$ и $\mathcal{B} = \{(u_\beta, v_\beta), \beta \in B\}$, для которых выполняется условия

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} (x_\alpha, y_\alpha),$$

$$U = \bigcup_{\beta \in B} (u_\beta, v_\beta),$$

то будем говорить, что покрытие $\mathcal{A}$ измельчает покрытие $\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \prec \mathcal{B}$, если каждый интервал (x_α, y_α) находится внутри некоторого интервала (u_β, v_β), $\beta = \beta(\alpha)$, т.е. выполнены неравенства

$$u_\beta \le x_\alpha < y_\alpha \le v_\beta.$$

Семейство покрытий подмножества U интервалами будет частично упорядочено относительно отношения $\prec$.

Следующая теорема описывает структуру произвольного открытого подмножества U на вещественной прямой.

Теорема 2 *Существует и единственное покрытие подмножества U интервалами, максимальное относительно частичного порядка, задаваемого отношением $\prec$. В этом покрытии все интервалы попарно не пересекаются и их счетное число.*

Интервал вещественных чисел

Интервал $(0,1) \subset \mathbf{R}^1$ как подмножество в топологическом пространстве $\mathbf{R}^1$ всех вещественных чисел является подпространством, и поскольку $(0,1)$ является открытым подмножеством в $\mathbf{R}^1$, то каждое его открытое подмножество U является открытым подмножеством на вещественной прямой $\mathbf{R}^1$. Значит, согласно теореме 2 открытое множество U представляется как объединение попарно непересекающихся интервалов. Что касается замкнутых подмножеств в интервале $(0,1)$, то они не обязаны быть замкнутыми подмножествами на вещественной прямой. Например, сам интервал $(0,1)$ замкнут в пространстве $(0,1)$, но как подмножество вещественной прямой $\mathbf{R}^1$ интервал $(0,1)$ не замкнут.

Отрезок вещественных чисел

Отрезок $[0,1] \subset \mathbf{R}^1$ как подмножество в топологическом пространстве $\mathbf{R}^1$ является подпространством, и поскольку подмножество $[0,1]$ является замкнутым подмножеством в $\mathbf{R}^1$, то каждое его замкнутое подмножество F является замкнутым подмножеством на вещественной прямой $\mathbf{R}^1$. Открытое же подмножество $U \subset [0,1]$ может быть описано при помощи теоремы 2:

Всякое открытое подмножество $U \subset [0,1]$ однозначно представляется в виде попарно непересекающихся интервалов и, быть может, *полуинтервалов* вида $[0,x)$, $(y,1]$ или отрезка $[0,1]$.

Пространство рациональных чисел

Множество рациональных чисел $\mathcal{Q} \subset \mathbf{R}^1$ дает нам пример подпространства в пространстве $\mathbf{R}^1$, которое не является ни открытым подмножеством, ни замкнутым подмножеством. Легко проверить, что множество рациональных чисел плотно в пространстве вещественных чисел $\mathbf{R}^1$ и не имеет внутренних точек. Другими словами,

$$\overline{\mathcal{Q}} = \mathbf{R}^1, \quad \mathbf{Int}\ (\mathcal{Q}) = \emptyset.$$

Канторово совершенное множество

Канторово совершенное множество K — это подмножество единичного отрезка $K \subset [0,1]$, состоящего из всех чисел вида

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k},$$

у которых коэффициенты a_k могут принимать только значения 0 или 2. Легко проверить, что канторово множество является замкнутым подмножеством на отрезке, а, значит, и на всей вещественной оси.

Топология на упорядоченных множествах

Топология на линейно упорядоченном множестве

Определение 3 *На линейно упорядоченных множествах естественно задается структура топологического пространства, топология $\mathcal{T}_{\preceq}$ которого определяется при помощи интервалов (x,y),*

$$(x,y) = \{z \in X : x \prec z \prec y\}$$

или полуинтервалов $(x,+\infty)$, $(-\infty,y)$

$$(x,+\infty) = \{z \in X : x \prec z\}, \quad (-\infty,y) = \{z \in X : z \prec y\}.$$

Множество $U \subset X$ считается открытым, если оно является объединением некоторого семейства интервалов или полуинтервалов.

Проверка свойств топологии сводится к проверке того факта, что пересечение двух (полу)интервалов (x,y) и (u,v) является либо пустым множеством, либо (полу)интервалом.

Теорема 3 *В примере множества всех вещественных чисел* $\mathbf{R}^1$ *топология линейного порядка* $\mathcal{T}_{\preceq}$ *совпадает с классической топологией метрики на вещественных числах.*

Пусть $(X, \preceq)$ — линейно упорядоченное множество, а $Y \subset X$ — некоторое его подмножество. Тогда на подмножестве Y, с одной стороны, можно задать линейный порядок $\preceq_Y$, порождаемый линейным порядком на X, а с другой стороны, две топологии: одна топология $\mathcal{T}_Y$, порожденная топологией объемлющего пространства X, и другая $\mathcal{T}_{\preceq_Y}$, порожденная порядком $\preceq_Y$ на подмножестве Y.

Теорема 4 *Эти две топологии, вообще говоря, не совпадают, но топология* $\mathcal{T}_{\preceq_Y}$ *слабее, чем топология* $\mathcal{T}_Y$*:*

$$\mathcal{T}_{\preceq_Y} \preceq \mathcal{T}_Y.$$

Действительно, открытое множество в топологии $\mathcal{T}_{\preceq_Y}$ есть объединение интервалов $(x, y)_{\preceq_Y} \subset Y$. Каждый такой интервал есть пересечение интервала $(x, y)_{\preceq}$ с подмножеством Y, т.е. является открытым подмножеством в топологии $\mathcal{T}_Y$.

Имеются примеры, когда эти две топологии не совпадают:

$$\mathcal{T}_{\preceq_Y} \neq \mathcal{T}_Y.$$

Теорема 5 *На пример, рассмотрим в пространстве всех вещественных чисел* $\mathbf{R}^1$ *подмножество* $Y \subset \mathbf{R}^1$*, состоящее из полуинтервала* $[0, 1)$ *и отдельной точки* $\{2\}$*,*

$$Y = [0, 1) \cup \{2\}.$$

В топологии $\mathcal{T}_Y$*, порожденной топологий в пространстве вещественных чисел* $\mathbf{R}^1$*, одноточечное подмножество* $\{2\} \subset Y$*, очевидно, является открытым. Однако в топологии* $\mathcal{T}_{\preceq_Y}$*, которая порождается линейным порядком на множестве* Y*, это подмножество*

$\{2\} \subset Y$ не является открытым.

Топология на частично упорядоченном множестве.

На частично упорядоченных множествах тоже естественно задается структура топологического пространства, топология $\mathcal{T}_{\preceq}$ которого определяется следующим образом. Множество $U \subset X$ объявляется открытым, если для любого максимального по включению линейно упорядоченного подмножества $Y \subset X$ пересечение $U \cap Y$ является открытым подмножеством в Y с топологией $\mathcal{T}_{\preceq_Y}$.

В частности, на арифметическом пространстве $\mathbf{R}^k$ топология частичного порядка совпадает с классической топологией, порожденной метрикой в $\mathbf{R}^k$. В самом деле, пусть $U = O_\varepsilon(x_0)$ – шаровая окрестность радиуса ε с центром в точке $x_0 \in \mathbf{R}^k$. Пусть $Y \subset \mathbf{R}^k$ – максимальное по включению линейно упорядоченное подмножество в $\mathbf{R}^k$.

Задачи

Топологические пространства

1. Пусть X — бесконечное множество и $\mathcal{T} = \{ \subset : \setminus$ конечно или $A = \emptyset\}$. Докажите, что $\mathcal{T}$ является топологией на X.

2. Показать, что на бесконечном полуинтервале $X = (0, +\infty)$ семейство подмножеств $\{\emptyset, (a, +\infty), 0 \leq a < +\infty\}$ образует некоторую топологию.

3. Показать, что полуинтервал $[a, b) \subset \mathbf{R}$ представим как объединение замкнутых подмножеств и как пересечение открытых подмножеств не вещественной прямой $\mathbf{R}$.

4. Показать что множество $A = \{0\} \cup \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ замкнуто на вещественной прямой $\mathbf{R}$.

5. Докажите, что всевозможные бесконечные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, образуют базу некоторой топологии в $\mathbf{N}$.

6. Показать, что если множество U открыто, а множество F замкнуто, то $U \setminus F$ открыто, а $F \setminus U$ замкнуто.

7. Докажите, что для любых двух непересекающихся открытых множеств замыкание любого из них не пересекается с другим.

8. Доказать, что $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. (Взято из [**?**], стр. 92, задача 13.20).

9. Докажите, что если множества U и V открыты и не пересекаются, то $\mathbf{Int}\ (\overline{U}) \cap \mathbf{Int}\ (\overline{V}) = \emptyset$.

10. Приведите пример пространства, в котором все одноточечные множества замкнуты и одновременно любые два непустых открытых множества пересекаются).

11. Докажите, что, если каждая отдельная точка является замкнутым множеством, то каждое множество является пересечением некоторого семейства открытых множеств.

12. На вещественной прямой $\mathbf{R}^1$ построить три попарно различных открытых множества, имеющих общую границу

13. Докажите, что если в топологическом пространстве X нет других плотных подмножеств кроме самого X, то пространство X дискретно.

14. Приведите пример топологического пространства, в котором имеется одноточечное плотное подмножество, а само пространство состоит более чем из одной точки.

15. Верно ли, что объединение плотных подмножеств плотно?

16. Верно ли, что пересечение плотных подмножеств плотно?

17. Покажите, что пересечение двух (конечного семейства) плотных открытых подмножеств плотно.

18. Докажите, что пересечение счетного семейства плотных открытых подмножеств на вещественной прямой $\mathbf{R}^1$ плотно.

Метрические пространства

19. Пусть ρ_1 и ρ_2 две метрики на множестве X. Показать, что $\rho_3 = \rho_1 + \rho_2$ тоже является метрикой.

20. Пусть ρ_1 и ρ_2 две метрики на множестве X. Показать, что $\rho_3 = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ тоже является метрикой.

21. Пусть ρ_1 и ρ_2 две метрики на множестве X. Является ли метрикой функция $\rho_3 = \min\{\rho_1, \rho_2\}$?

22. Пусть ρ_1 – метрика на множестве X. Показать, что $\rho_2 = \frac{\rho_1}{1+\rho_1}$ тоже является метрикой. Являются ли метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентными?

23. Пусть ρ_1 – метрика на множестве X. Показать, что $\rho_2 = \min\{\rho_1, 1\}$ тоже является метрикой. Являются ли метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентными?

24. Пусть ρ_1 – метрика на множестве X. Показать, что $\rho_2 = f(\rho_1)$ тоже является метрикой, если f – монотонно неубывающая функция. причем $f(0) = 0$ и $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

25. Обобщить предыдущую задачу на случай двух метрик: Пусть ρ_1 и ρ_2 две метрики на множестве X. Показать, что $\rho_3 = f(\rho_1, \rho_2)$ тоже является метрикой, если функция f – является монотонно неубывающая функцией относительно пары переменных, причем $f(0,0) = 0$ и $f(x+y, u+v) \leq f(x,u) + f(y,v)$.

26. Приведите пример такого метрического пространства, в котором имеется два шара, причем шар с большим радиусом содержится в шаре с меньшим радиусом. Покажите, что в этом случае больший радиус не превышает удвоенного меньшего радиуса.

27. Покажите, что отрезок $[a, b]$ в эвклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ задается условием
$$[a, b] = \{x \in \mathbf{R}^n : \rho(a, x) + \rho(x, b) = \rho(a, b).$$

    Описать аналогичные "отрезки"в метрике ρ_p.

28. Показать, что все метрики ρ_p в пространстве $\mathbf{R}^n$ задают одну и ту же топологию.

29. Показать, что в пространстве непрерывных функций на отрезке $C[0,1]$ две метрики, задаваемые формулами

$$\rho_1(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)| dt,$$

$$\rho_2(f,g) = \sqrt{\int_0^1 |f(t) - g(t)|^2 dt},$$

задают неэквивалентные топологии.

30. Пусть $G \subset \mathbf{R}^1$ — открытое множество на на вещественной прямой. Доказать, что G есть объединение непересекающихся интервалов. (Взято из [**?**], стр. 91, задача 13.13).

31. Показать, что в эвклидовом пространстве функция

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

задает некоторую метрику.

32. Пространство l_p с метрикой

$$\rho_p(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

является полным метрическим пространством.