"Введение в топологию",
конспект лекции 3.

А.С.Мищенко

17 сентября 2012 г.

План

Определение.
Непрерывность отображения в точке
Предел отображения по Коши.
Сходимость по направленному множеству.
Единственность предела направленности.
Предел отображения в предельной точке по Гейне.
Предел отображения в предельной точке по Гейне для метрических пространств.
Непрерывность по Коши и по Гейне.
Свойства непрерывных отображений.
Композиция непрерывных отображений.
Сужение непрерывного отображения.
Непрерывность объединения отображений.
Кривая Пеано.
Гомеоморфизмы.
Примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств

1 Непрерывные отображения

Определение

Рассмотрим два топологических пространства X, Y с топологиями $\mathcal{T}_X$ и $\mathcal{T}_Y$, соответственно.

Определение 1 *Отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется непрерывным, если для каждого открытого подмножества $U \subset Y$, т.е. $U \in \mathcal{T}_Y$, прообраз $f^{-1}(U) \subset X$ является открытым подмножеством в топологическом пространстве X, т.е. $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$. Свойство непрерывности отображения можно переформулировать в терминах замкнутых множеств: отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется непрерывным, если для каждого замкну-*

того подмножества $F \subset Y$ прообраз $f^{-1}(F) \subset X$ является замкнутым подмножеством в топологическом пространстве X.

В самом деле подмножество F замкнуто тогда и только тогда, когда его дополнение $Y \setminus F$ открыто. Поскольку прообраз $f^{-1}(F)$ можно выразить формулой через его дополнение:

$$f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F),$$

то замкнутость подмножества $f^{-1}(F)$ эквивалентна открытости подмножества $f^{-1}(Y \setminus F)$, что эквивалентно непрерывности отображения f по первому определению.

Непрерывность отображения в точке

Непрерывность отображения $f : X \longrightarrow Y$ можно подразбить на отдельные свойства в каждой точке $x_0 \in X$.

Определение 2 *Скажем, что отображение $f : X \longrightarrow Y$ непрерывно в точке x_0 , если для любой открытой окрестности $U \ni f(x_0)$ образа $f(x_0)$ найдется окрестность $V \in x_0$ точки x_0, для которой выполнено включение*

$$f(V) \subset U.$$

Теорема 1 *Если точка $x_0 \in X$ является изолированной точкой пространства X, то любое отображение f автоматически непрерывно в точке x_0.*

Очевидно, что

Теорема 2 *непрерывное отображение непрерывно в каждой точке, и наоборот, если отображение f непрерывно в каждой точке, то оно является непрерывным отображением.*

Непрерывность отображения в предельной точке тоже можно разбить на два отдельных свойства: существования предела функции в точке и совпадения предела со значением в точке.

Предел отображения по Коши

Определение 3 *Скажем что отображение $f : X \longrightarrow Y$ имеет предел (по Коши) в предельной точке $x_0 \in X$, равный $y \in Y$,*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = y,$$

если для любой открытой окрестности $U \ni y$ точки y найдется открытая окрестность точки x_0, $V \ni x_0$, для которой выполнено включение образа выколотой окрестности

$$f(V \setminus x_0) \subset U.$$

Определение 4 *Тогда определение непрерывности отображения $f: X \longrightarrow Y$ в точке x_0 можно сформулировать как равенство предела отображения в точке x_0 и его значения в той же точке:*

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

В частности, если условие равенства предела и значения не выполнено, т.е. в случае, когда

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0),$$

отображение f можно доопределить в точке x_0 по непрерывности, изменяя значение отображения f в точке x_0, положив $f(x_0) = \lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x)$. Так измененное отображение уже будет непрерывным в точке x_0.

Сходимость по направленному множеству

Рассмотрим направленное множества индексов $(A, \prec)$ и направленность точек x_α топологического пространства X, индексированное направленным множеством A.

Определение 5 *Скажем, что предел направленности x_α равен точке x_0 (которая не обязана быть предельной точкой),*

$$\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} x_\alpha = x_0,$$

или, что направленность сходится к точке x_0, если для любой открытой окрестности $U \ni x_0$ точки x_0 найдется такой индекс $\alpha_0 \in A$, что для любого индекса $\alpha \succ \alpha_0$ выполнено включение $x_\alpha \in U$.

Теорема 3 *Заметим, что если точка x_0 является изолированной, а $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow \infty} x_\alpha = x_0$, то в этом случае направленность x_α должна быть постоянной, начиная с некоторого индекса α_0:*

$$x_\alpha \equiv x_0 = \mathbf{const} \quad \textit{для } \alpha \succ \alpha_0.$$

Для метрического пространства (X, ρ) определение предела направленности можно переписать в терминах сходимости расстояний:

Теорема 4 *равенство $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow \infty} x_\alpha = x_0$ эквивалентно*

$$\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} \rho(x_\alpha, x_0) = 0.$$

Единственность предела направленности

Нет причин считать, что предел некоторой направленности (если он существует) единственен. Другими словами, если $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow \infty} x_\alpha = x_0$ и $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow \infty} x_\alpha = y_0$, то равенство $x_0 = y_0$ не обязательно.

Теорема 5 *Например, если топологическое пространство X состоит более, чем из одной точки, и антидискретно, т.е. у него открытыми подмножествами является только два подмножества, пустое подмножество $\emptyset$ и само X, то тогда всякая точка является пределом любой направленности.*

Теорема 6 *Пусть X такое топологическое пространство, что любая сходящаяся направленность имеет единственный предел. Тогда X хаусдорфово. И обратно, у хаусдорфова пространства любая сходящаяся направленность имеет единственный предел.*

Доказательство. Если пространство X не хаусдорфово, то тогда имеется пара различных точек $x \neq y \in X$, для которых любые открытые окрестности U точки $x \in U$ и окрестности V точки $y \in V$ пересекаются, т.е существует точка $z_{U,V} \in U \cap V$. Тогда направленность $z_{U,V}$ имеет по крайней мере два предела: точку y и точку x.

Предел отображения в предельной точке по Гейне

Применяя понятие предела направленности можно дать эквивалентное определение предела отображения в предельной точке. Рассмотрим произвольную направленность $x_\alpha,\ \alpha \in A$, удовлетворяющую двум условиям: 1) для любого индекса $\alpha \in A$ выполнено неравенство $x_\alpha \neq x_0$; 2) $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow \infty} x_\alpha = x_0$.

Определение 6 *Скажем, что отображение $f : X \longrightarrow Y$ имеет предел (по Гейне) в точке x_0, равный $y \in Y$, если для любой направленности $x_\alpha,\ \alpha \in A$, для которой выполнены предыдущие два условия, имеет место равенство*

$$\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} f(x_\alpha) = y.$$

Теорема 7 (Сходимость по Гейне) *Два определения предела отображения в предельной точке по Коши и по Гейне эквивалентны.*

Доказательство. (Коши)$\Rightarrow$(Гейне):

(Гейне)$\Rightarrow$(Коши): Если одноточечное подмножество $\{x_0\}$ является открытым, сходимость отображения f по Коши очевидна, поскольку выколотая окрестность $\{x_0\} \setminus x_0$ является пустым множеством, а, значит, образ $f(\{x_0\} \setminus x_0)$ пуст и лежит в любой окрестности точки y.

Противоположный случай заключается в том, что любой открытой окрестности $U \ni x_0$ ее выколотая окрестность не пуста. Рассмотрим следующее направленное множество $A = \{(U, x) : U$ – открытая окрестность точки x_0; $x \in U;\ x \neq x_0\}$. Положим $(U, x) \prec (V, y)$ если $U \supset V$. Рассмотрим направленность x_α, $\alpha = (U, x)$, $x_\alpha = x$. Направленность x_α удовлетворяет обоим условия определения по Гейне:

$$x_\alpha \neq x_0;$$

$$\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} x_\alpha = x_0.$$

Первое условие, очевидно, выполняется по построению направленного множества A. Проверяем второе условие. Пусть $V \ni x_0$ – некоторая открытая открытая окрестность точки x_0. Выберем точку $z \in V \setminus x_0$. Пара $\alpha_0 = (V, z)$ принадлежит направленному множеству A. Пусть другой индекс $\beta = (W, x) \in A$ удовлетворяет условию $\beta \succ \alpha_0$. Это значит, что $x \in W$, $x \neq x_0$, $W \subset V$. Следовательно, $x_\beta = x \in V$, что означает, что $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow \infty} x_\alpha = x_0$.

Таким образом, из существования предела по Гейне направленность $f(x_\alpha)$ сходится к точке $y \in Y$. Это значит, что для любой окрестности $U \ni y$ найдется индекс $\alpha_0 = (V, z)$, что при выполнении неравенства $(W, x) = \beta \succ \alpha_0$ получается включение $f(x_\beta) \in U$, т.е. $f(x) \in U$, где x может быть выбрана произвольной точкой подмножества $V \setminus x_0$. Это значит, что $f(V \setminus x_0) \subset U$. Последнее включение в точности означает наличие предела по Коши.

$\blacksquare$

Предел отображения в предельной точке по Гейне для метрических пространств

Для метрического пространства (X, ρ) определение предела отображения в предельной точке по Гейне может быть существенно упрощено рассмотрением счетных последовательностей вместо произвольных направленностей. Напомним, что под последовательностью $\{x_n\}$, $x_n \in X$ понимается такая направленность, которая индексируется индексами из натуральных чисел $n \in \mathbf{N}$.

Теорема 8 (Сходимость по Гейне в метрических пространствах) *Пусть (X, ρ) – некоторое метрическое пространство, $f : X \longrightarrow Y$ – отображение в топологическое пространство Y, $x_0 \in X$ – некоторая предельная точка. Отображение f имеет предел в точке x_0, равный $y \in Y$, $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = y$, тогда и только тогда, когда для любой последовательности $x_n \in X$; $n \in \mathbf{N}$, такой что $x_n \neq x_0$; $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = x_0$, существует предел последовательности $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} f(x_n)$ равный y:*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} f(x_n) = y.$$

Доказательство. Для доказательства нужно проверить, что счетных последовательностей достаточно для проверки сходимости отображения f.

Непрерывность по Коши и по Гейне

Таким образом, непрерывность отображения $f : X \longrightarrow Y$ в точке $x_0 \in X$ можно переформулировать по Гейне в терминах сходимости направленностей или в случае метрических пространств в терминах счетных последовательностей.

Теорема 9 (непрерывность отображения по Гейне) *Отображение* $f : X \longrightarrow Y$ *является непрерывным в точке* $x_0 \in X$ *тогда и только тогда, когда для любой сходящейся к точке* x_0 *направленности* $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow \infty} x_\alpha = x_0$ *существует предел* $\lim\limits_{\alpha \longrightarrow \infty} f(x_\alpha)$ *и выполняется равенство*

$$\lim_{\alpha \longrightarrow \infty} f(x_\alpha) = f(x_0).$$

Для метрического пространства X в предыдущей теореме класс всех направленностей достаточно заменить на счетные последовательности.

Свойства непрерывных отображений

Композиция непрерывных отображений

Сужение непрерывного отображения

Теорема 10 *Сужение отображения есть композиция двух отображений: исходного и вложения подпространства в пространство.*

Непрерывность объединения отображений

Теорема 11 *Если сужения отображения на замкнутые слагаемые непрерывны, то и само отображение непрерывно.*

Кривая Пеано

Теорема 12 *Пример непрерывного отображения отрезка на треугольник («кривая Пеано»).*

Возьмем разбиение отрезка $\delta = [0, 1]$ на две его половины $\delta_0 = [0, \frac{1}{2}]$ и $\delta_1 = [\frac{1}{2}, 1]$. Это разбиение отрезка $[0, 1]$ назовем разбиением первого ранга, а отрезки $[0, \frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{2}, 1]$ — отрезками первого ранга. Разбивая каждый отрезок первого ранга на две половины, получим четыре отрезка δ_{00}, δ_{01}, δ_{10}, δ_{11}, второго ранга, образующие разбиение второго ранга отрезка $[0, 1]$, и т. д.

Разбиение n-го ранга состоит из 2^n отрезков вида $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, где индексы могут принимать два значения $i_1, i_2, \ldots, i_n = 0$ или 1. Длина этих отрезков равна $\frac{1}{2^n}$.

2 Гомеоморфизмы

Определение

Непрерывное отображение $f : X \longrightarrow Y$ называется *гомеоморфизмом*, если f является биективным, причем обратное отображение $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ является тоже непрерывным отображением.

Определение гомеоморфизма $f : X \longrightarrow Y$ можно сформулировать следующим эквивалентным образом: непрерывное отображение f является гомеоморфизмом, если существует другое непрерывное отображение $g : Y \longrightarrow X$ такое, что две возможных композиции отображений f и g являются тождественными отображениями:

$$f \cdot g = \mathbf{Id} Y,$$

$$g \cdot f = \mathbf{Id}_X,$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{Id}_X"] & Y \arrow[r, "g=f^{-1}"'] \arrow[rr, bend left, "\mathbf{Id}_Y"] & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd} .$$

Два топологических пространства X и Y называются *гомеоморфными* , если существует гомеоморфизм $f : X \longrightarrow Y$ между пространствами X и Y. У гомеоморфных пространств семейства всех открытых (замкнутых) множеств находятся во взаимно однозначном соответствии, что позволяет не различать гомеоморфные топологические пространства, с точки зрения их непрерывных отображений.

Примеры гомеоморфных и негомеоморфных пространств

1. Конечные топологические пространства в дискретной топологии гомеоморфны, если они равномощны.

2. Отрезки вещественных числе $[a, b]$ гомеоморфны друг другу для различных значений чисел $a < b$.

3. Интервалы вещественных чисел (a, b) гомеоморфны друг другу для различных значений чисел $a < b$.

4. Полуинтервалы вещественных чисел $(a, b]$ и $[a, b)$ гомеоморфны друг другу для различных значений чисел $a < b$.

5. Открытый диск $\overset{\circ}{D}{}^n$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ гомеоморфен $\mathbf{R}^n$.

6. Открытый куб $\overset{\circ}{I}{}^n = \prod_1^n (0, 1)$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ гомеоморфен $\mathbf{R}^n$.

7. Замкнутый куб $I^n = \prod_1^n [0, 1]$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ гомеоморфен замкнутому диску D^n.

Следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

1. вся плоскость $\mathbb{R}^2$;

2. открытый квадрат;

3. открытая полуплоскость $\mathbb{C}^+$;
4. открытый круг;
5. открытый прямоугольник;
6. открытый квадрант;
7. открытый угол;
8. открытый полукруг;
9. открытый сектор;
10. плоскость с вырезанным лучом $\{y = 0, x \geq 0\}$;

Следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

1. Полуплоскость $\{x \geq 0\}$;
2. квадрант $\{x, y \geq 0\}$;
3. угол $\{x \geq y \geq 0\}$;
4. полуоткрытая полоса $\{(x, y) : y \in [0, 1)\}$;
5. квадрат без трёх сторон (и всех вершин) $\{(x, y) : 0 < x < 1, 0 \leq y < 1\}$;
6. квадрат без двух смежных сторон (и трех вершин) $\{(x, y) : 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1\}$;
7. квадрат без стороны (и двух вершин) $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y < 1\}$;
8. квадрат без одной вершины $\{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\, xy < 1\}$;
9. круг без одной граничной точки $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y < 1\}$;
10. полукруг без диаметра $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1, y > 0\}$
11. круг без радиуса;

Следующие плоские фигуры гомеоморфны друг другу:

1. плоскость без точки $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_0\}$;
2. открытый круг без точки $\{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\}$;
3. кольцо $\{(x, y) : a < x^2 + y^2 < b\}$;
4. плоскость без круга $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$;
5. плоскость без квадрата $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbf{I}^2$
6. плоскость без отрезка $\mathbb{R}^2 \setminus [0, 1]$
7. дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$, где X есть объединение нескольких отрезков с общим концом;
8. дополнение $\mathbb{R}^2 \setminus X$, где X есть незамкнутая конечнозвенная ломаная без самопересечений;