"Введение в топологию", конспект лекции 7.

А.С.Мищенко

23 октября 2012 г.

План

a
b
c
d
e
f
g

Компактные пространства

Определение 1 *Предел направленности и предельная точка направленности.*

Скажем, что направленность $x_\alpha, \quad \alpha \in A$, имеет предельную точку x_0, если для любой открытой окрестности $U \ni x$ и любого индекса $\alpha \in A$ существует больший индекс $\beta \succeq \alpha$, для которого $x_\beta \in U$.

Теорема 1 *Направленность имеет предельную точку тогда и только тогда, когда она имеет поднаправленность, сходящуюся к этой точке.*

Доказательство. Пусть направленность $x_\alpha, \quad \alpha \in A$ имеет предельную точку $x_0 \in X$. Рассмотрим новую направленное множество B, состоящую из всех пар (α, U), где $U \ni x$ — произвольная окрестность точки x, а $\alpha \in A$ удовлетворяет условию $x_\alpha \in U$. Система окрестностей $\mathfrak{U} = \{U \ni x\}$ образует направленное семейство. Множество B является подмножеством в декартовом произведении $B \subset A \times \mathfrak{U}$, и, значит частично упорядочено. В действительности же множество B направлено. В самом деле, если $(\alpha, U), (\beta, V) \in B$, то в силу того, что точка x_0 является предельной, существует такой индекс $\gamma \succ \alpha, \quad \gamma \succ \beta$, для которого $x_\gamma \in U \cap V$, что и означает, что множество B направлено. Направленное множество B конфинально направленному множеству A, поскольку отображение $f : B \longrightarrow A, \quad f(\alpha, U) = \alpha$, монотонно и для любого индекса α имеется индекс $\beta \succ \alpha$, для которого $x_\beta \in U$, т.е. $(\beta, U) \in B$ и $f(\beta, U) \succ \alpha$.

Таким образом, имеем поднаправленность $y_{(\alpha,U)} = x_\alpha, (\alpha, U) \in B$ направленности x_α, которая сходится к точке x_0.

Обратное утверждение теоремы очевидно: если поднаправленность $y_{(\alpha,U)} = x_\alpha, (\alpha, U) \in B$ сходится к точке x_0, то точка x_0 является предельной точкой направленности x_α.

Определение 2 *Скажем, что направленность x_α, $\alpha \in A$, почти содержится в подмножестве $Y \subset X$, если существует такой индекс $\alpha_0 \in A$, что хвост $T_{\alpha_0}(x_\alpha)$ содержится в Y, $T_{\alpha_0}(x_\alpha) \subset Y$.*

Скажем, что направленность x_α, , часто бывает в подмножестве $Y \subset X$, если каждый хвост $T_{\alpha_0}(x_\alpha)$ пересекается с Y, $T_{\alpha_0}(x_\alpha) \cap Y \neq \emptyset$.

Скажем, что направленность x_α, , универсальна, если для любого подмножества $Y \subset X$ направленность x_α, почти содержится в одном из подмножеств Y или $X \setminus Y$.

Теорема 2 *У любой направленности $x_\alpha \in X$, $\alpha \in A$, имеется универсальная поднаправленность.*

Доказательство. Рассмотрим семейство $\mathfrak{W}$ непустых подмножеств, у которого выполняются два свойства:

- Если $U, V \in \mathfrak{W}$, то $U \cap V \in \mathfrak{W}$;
- Если $U \in \mathfrak{W}$, то направленность x_α часто бывает в U.

Такое семейство $\mathfrak{W}$ назовем присоединенным к направленности x_α. Выберем максимальное семейство $\mathfrak{W}_0$, присоединенное к направленности x_α. Семейство $\mathfrak{W}_0$ направлено по включению: $U \succ V \Leftrightarrow U \subset V$. Тогда имеется поднаправленность y_β; $\beta \in B$, направленности x_α; $\alpha \in A$, которая почти содержится в каждом $U \in \mathfrak{W}_0$. В силу максимальности семейства $\mathfrak{W}_0$ эта поднаправленность y_β; $\beta \in B$ универсальна. ∎

Теорема 3 *Универсальная направленность сходится к любой своей предельной точке.*

Теорема 4 *Топологическое пространство компактно тогда и только тогда, когда любая направленность имеет предельную точку или, что то же самое, когда любая направленность имеет сходящуюся поднаправленность. Эквивалентным образом, пространство компактно тогда и только тогда, когда любая универсальная направленность имеет предел.*

Доказательство. Пусть топологическое пространство X компактно и x_α, $\alpha \in A$ — некоторая направленность. Если точка y не является предельной, то это значит, что существует открытая окрестность $U_y \ni y$, для которой имеется такой индекс $\alpha = \alpha_y \in A$, что если $\beta \succ \alpha_y$, то $x_\beta \notin U_y$. Если у направленности x_α нет предельных точек, то система окрестностей $\{U_y : y \in X\}$ покрывает все пространство X, т.е.

$$\bigcup_{y \in X} U_y = X.$$

Поскольку пространство X компактно, то открытое покрытие $\{U_y : y \in X\}$ имеет конечное подпокрытие, т.е. имеется конечное число точек $\{y_k \in X, \quad k = 1, \dots N\}$, для которых

$$\bigcup_{k=1}^{N} U_{y_k} = X.$$

Поскольку число точек $\{y_k \in X, \quad k = 1, \dots N\}$, конечно, то существует такой индекс $\beta \in A$, для которого выполнены все неравенства

$$\beta \succ \alpha_{y_k}, \quad k = 1, \dots N,$$

и, значит $x_\beta \notin U_{y_k}, \quad k = 1, \dots N$, т.е. $x_\beta \notin \bigcup\limits_{k=1}^{N} U_{y_k} = X$. Противоречие.

Обратно, предположим, что всякая направленность у топологического пространства X имеет предельную точку. Покажем, что X компактно. Рассмотрим некоторое открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$. Допустим противное, т.е., что всякое конечное подмножество $B \subset A$ не дает покрытия множествами $\mathfrak{U}_B = \{U_\alpha, \alpha \in B\}$, т.е. $\bigcup \mathfrak{U}_B \neq X$. Другими словами, имеется точка $x_B \in X$, которая не содержится в объединении $\bigcup \mathfrak{U}_B$,

$$x_B \notin \bigcup \mathfrak{U}_B.$$

Конечные множества $B \subset A$ образуют направленное семейство $\mathfrak{B} = \{B \subset A : \#(B) < \infty\}$ по включению. Значит, получаем направленность $\{x_B, B \in \mathfrak{B}\}$. По предположению, эта направленность имеет предельную точку, скажем, $x_0 \in X$, которая принадлежит некоторому элементу открытого покрытия, т.е. $x_0 \in U_{\alpha_0}$. А тогда существует такой индекс $B \in \mathfrak{B}$, что $B \succ \{\alpha_0\}$ и $x_B \in U_{\alpha_0}$. Условие же $B \succ \{\alpha_0\}$ означает, что $\alpha_0 \in B$, т.е. $x_B \notin U_{\alpha_0}$. Противоречие. ∎

Теорема 5 (Лемма Шуры-Буры) *Пусть X компактное топологическое пространство, $U \subset X$ — его открытое подмножество, $\mathfrak{F} = \{F_\alpha, \quad \alpha \in A\}$ семейство замкнутых подмножеств такое, что*

$$\bigcap \mathfrak{F} = \bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \subset U.$$

Тогда имеется конечное подсемейство $\mathfrak{F}_0 = \{F_\alpha, \quad \alpha \in A_0 \subset A\}$, для которого выполнено то же самое включение

$$\bigcap \mathfrak{F}_0 = \bigcap_{\alpha \in A_0} F_\alpha \subset U.$$

Теорема 6 (Теорема Тихонова) *Тихоновское произведение компактных пространств компактно.*

Доказательство.

Тихоновская топология на произведении топологических пространств — это минимальная топология, в которой все проекции на исходные пространства непрерывны. Конструктивно её можно также описать следующим образом: в качестве предбазы топологии на X берётся семейство множеств $\mathfrak{P} = \{\pi_\alpha^{-1}(U) : U \subset X_\alpha$ – -открыто $\}$. База топологии — всевозможные конечные пересечения множеств из $\mathfrak{P}$, а топология — всевозможные объединения множеств из базы.

Теорема Тихонова: Если все множества $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ компактны, тогда компактно и их тихоновское произведение $X = \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Доказательство. Согласно теореме Александера о предбазе, достаточно доказать, что всякое покрытие элементами предбазы $\mathfrak{P}$ допускает конечное подпокрытие.

Покрытие элементами предбазы $\mathfrak{P}$ есть семейство открытых множеств вида $\mathfrak{W} = \{W_\beta = \pi_{\alpha(\beta)}^{-1}(U_\beta), \quad U_\beta \subset X_{\alpha(\beta)}\}$. Для всякого пусть — объединение всех множеств , для которых множество содержится в покрытии. Тогда непокрытая часть пространства X, выражается формулой . Поскольку это множество пусто, пустым должен быть хотя бы один сомножитель. Это означает, что рассматриваемое покрытие при некотором содержит -прообраз покрытия пространства . В силу компактности пространства , из его покрытия можно выделить конечное подпокрытие, и тогда его прообраз относительно отображения будет конечным подпокрытием пространства X.

Теорема Александера о предбазе: Топологическое пространство компактно, тогда и только тогда, когда выделение конечного подпокрытия допускает каждое покрытие, составленное из элементов предбазы его топологии.

Доказательство. Необходимость в этом критерии компактности очевидна, так как все элементы предбазы - открытые множества.

Достаточность доказывается методом от противного. Пусть пространство X некомпактно, хотя всякое покрытие, составленное из элементов предбазы его топологии, допускает выделение конечного подпокрытия. Пусть $\mathfrak{B}$ — база топологии пространства X, образованная этой предбазой $\mathfrak{P}$. Каждый её элемент есть конечное пересечение элементов предбазы $\mathfrak{P}$.

Множество $\mathfrak{S}$ всех возможных $\mathfrak{B}$ - покрытий пространства X (то есть составленных из элементов базы $\mathfrak{B}$), не допускающих конечного подпокрытия, индуктивно упорядочено и непусто, следовательно, существует максимальное (нерасширяемое) такое покрытие $\mathfrak{S}_0$. Элементы предбазы $\mathfrak{P}$, содержащиеся в покрытии $\mathfrak{S}_0$, не образуют покрытия пространства X, так как в противном случае имелось бы по предположению конечное подпокрытие. Следовательно, какая-то точка $x \in X$ покрыта элементом $P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_n$ базы $\mathfrak{B}$, но само покрытие $\mathfrak{S}_0$ не содержит ни один из этих элементов $P_1, P_2, \ldots, P_n$ предбазы $\mathfrak{P}$.

Далее используется максимальность рассматриваемого покрытия $\mathfrak{S}_0$. Если мы добавим к покрытию $\mathfrak{S}_0$ множество P_i, $\mathfrak{S}_0 \cup \{P_i\}$, то из него уже можно выделить конечное подпокрытие, в которое должно входить множество P_i, т.е. конечное семейство $\{U_{i,1}, U_{i,2}, \ldots, U_{i,m_i}, P_i\}$ покрывает X. Объединяя все эти подпокрытия, выкидывая из них множества P_i и добавляя множество $P_1 \cap P_2 \cap \dots \cap P_n$, получается конечное покрытие пространства X, являющееся подпокрытием исходного покрытия $\mathfrak{S}_0$. Противоречие (конечных подпокрытий исходное покрытие не допускало) доказывает теорему.

Доказательство. [Короткое доказательство.] Рассмотрим тихоновсое произведение компактных пространств $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$. Точка $x \in X$ — это набор ее координат $x = \{x_i\}, \quad x_i \in X_i, \quad i \in I$.

Пусть $x_\alpha, \alpha \in A$ — некоторая универсальная направленность в пространстве X. Тогда каждая точка x_α задается своими координатами

$$x_\alpha = \{x^i_\alpha \in X_i\}.$$

При фиксированном номере $i \in I$ набор $x^i_\alpha, \quad \alpha \in A$ задает универсальную направленность в компактном пространстве X_i, и, значит, имеет предел, скажем скажем $y^i \in X_i$. Рассматривая точки $\{y^i,\ i \in I\}$ как координаты, получаем точку $y \in X$, $y = \{y^i,\ i \in I\}$. Покажем, что точка y является пределом для универсальной направленности $x_\alpha, \alpha \in A$. Для этого рассмотрим произвольную окрестность V точки y. Эта окрестность без ограничения общности может иметь вид

$$V = \prod_{k=1}^{N} U_{i_k} \times \prod_{j \neq i_1, \dots, i_N} X_j.$$

Имеются такие индексы α_k, что хвост лежит в окрестности: $T_{\alpha_k}(x^k_\alpha) \subset U_{i_k}$. Значит, имеется общий индекс $\alpha_0 \succeq \alpha_k, 0 \leq k \leq N$, т.е. $T_{\alpha_0}(x_\alpha) \subset V$, т.е. универсальная направленность $x_\alpha, \alpha \in A$ сходится к точке y.

0.0.1 Первая аксиома счетности

0.0.2 Вторая аксиома счетности

Теорема 7 *Если пространство удовлетворяет второй аксиоме счётности, то оно сепарабельно.*

Теорема 8 *Евклидовы пространства и любые их подпространства сепарабельны и удовлетворяет второй аксиоме счётности.*

Теорема 9 (Урысон) *Нормальное пространство со второй аксиомой счетности метризуемо.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — счетная база открытых множеств в топологическом пространстве X. Поскольку пространство X нормально, то для любой точки $x \in X$ и элемента базы $U_\alpha \ni x$ найдется другой элемент базы $U_\beta \ni x$, $\beta = \beta(\alpha)$ такой , что $x \in U_\beta \subset \overline{U_\beta} \subset U_\alpha$. Пара (α, β), для которой $U_\beta \subset \overline{U_\beta} \subset U_\alpha$ назовем допустимой парой. Для каждой допустимой пары

(α,β) по лемме Урысона построим непрерывную функцию $\varphi_{\alpha,\beta}: X \longrightarrow [0,1]$, для которой

$$\begin{array}{l} \varphi_{\alpha,\beta}(x) \equiv 1, \quad x \in U_\beta, \\ \varphi_{\alpha,\beta}(x) \equiv 0, \quad x \notin U_\alpha, \end{array}$$

Семейство допустимых пар счетно, значит их можно занумеровать натуральными числами, т.е. каждая пара имеет вид (α_n,β_n). Тогда положим $\varphi_n(x) = \varphi_{\alpha_n,\beta_n}(x)$

Рассмотрим пространство $\mathbb{Q} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} [1, \frac{1}{2^n}]$. Это пространство метризуемо, метрика задается формулой: пусть $x, y \in \mathbb{Q}$, $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$, $0 \le x_n \le \frac{1}{2^n}$, $0 \le y_n \le \frac{1}{2^n}$,

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}.$$

Построим отображение $f: X \longrightarrow \mathbb{Q}$ по формуле

$$f(x) = \left\{ \frac{\varphi_n(x)}{2^n} \right\} \in \mathbb{Q}.$$

Отображение f взаимно однозначно. Действительно, если $x \ne y$, то найдется такой номер n, что $x \in U_{\beta_n}$, $y \notin U_{\alpha_n}$, значит n–я координата у точек $f(x)$ и $f(y)$ различна, т.е. $f(x) \ne f(y)$.

Непрерывность отображения f в точке x: пусть дано $\varepsilon = \frac{1}{2^N} > 0$. Первые N координат $\left\{ \frac{\varphi_k(x)}{2^k} \right\}_{k=1}^{N}$ задают непрерывное отображение, значит найдется такая окрестность $U \ni x$, что при $y \in U$ получаем

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\varphi_k(x)}{2^k} - \frac{\varphi_k(y)}{2^k} \right)^2} < \varepsilon$$

или

$$\sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\varphi_k(x)}{2^k} - \frac{\varphi_k(y)}{2^k} \right)^2 < \varepsilon^2.$$

Локально компактные пространства

Паракомпактные пространства

Примеры

Предкомпактные подмножества

Критерий компактности подмножеств в конечномерном евклидовом пространстве