Решение задач по теории вероятностей с помощью частотного метода

С.В. Дворянинов,
редакция журнала “Математика в школе” (Москва)
e-mail: dvoryan@yandex.ru

Г.И.Фалин,
МГУ им М.В.Ломоносова (Москва)
e-mail: g.falin@mail.ru

В статье предлагается решать задач по теории вероятностей в школе не формальным применением формул, связывающих вероятности различных событий, а с помощью интуитивно понятных рассуждений, основанных на понимании вероятности события как частоты наступления этого события в большой серии экспериментов. Этот подход позволяет использовать навыки решения простых задач на дроби и делает решение задач по теории вероятностей проще и понятнее.

Ключевые слова: задачи по теории вероятностей, формула полной вероятности, метод динамики средних

В пособии [1] для подготовке к ЕГЭ предлагается большое число задач на «простейшие правила и формулы вычисления вероятностей». Осмысленность условий этих задач и адекватность используемого языка стандартной терминологии теории вероятностей часто вызывают вопросы. Но самое важное то, что, как правило, решаются они формальным и бездумным применением формул, связывающих вероятности различных событий, или искусственных схем, заменяющих эти формулы. Всё это не только создаёт совершенно ложное представление о теории вероятностей, но и не позволяет школьнику научиться осмысленно решать несложные школьные задачи по теории вероятностей. В своей статье мы покажем, как можно решать такие задачи с помощью интуитивно понятных рассуждений, основанных на понимании вероятности события как частоты наступления этого события в большой серии экспериментов. Этот подход сводит решение несложных вероятностных задач к простым задачам на дроби, которые детально рассматриваются в школьном курсе.

Начнём со следующей задачи из диагностической работы 1 из пособия [1].

Задача Д1.17. Две фабрики одной фирмы выпускают одинаковые мобильные телефоны. Первая фабрика выпускает 30% всех телефонов этой марки, а вторая – остальные телефоны. Известно, что из всех телефонов, выпускаемых первой фабрикой, 1% имеют скрытые дефекты, а у выпускаемых второй фабрикой – 1,5%. Найдите вероятность того, что купленный в магазине телефон этой марки имеет скрытый дефект.

Решение. Прежде всего отметим неадекватность формулировок стандартной теорминологии теории вероятностей. В прикладной теории вероятностей допускается определённая вольность речи, своеобразный профессиональный жаргон. Специалистам он абсолютно понятен и они без труда могут переформулировать эту задачу на стандартном вероятностном языке, но вряд ли это смогут сделать учителя и, тем более, школьники. Поэтому начнём решение с того, что разберёмся с условием.

В этой задаче речь идёт о массовом однородном эксперименте – выпуске однотипной продукции. Для каждого телефона фиксируется, наступили (или не наступили) события: H_1=«телефон произведён на первой фабрике», H_2=«телефон произведён на второй фабрике», A=«телефон имеет скрытый дефект».

Фраза «первая фабрика выпускает 30% всех телефонов…» – это вольная формулировка точного утверждения о величине вероятности $P(H_1)$ события H_1:

$P(H_1) = 0,3$. Фраза «вторая – остальные телефоны» – это вольная формулировка точного утверждения «событие H_2 является дополнительным к событию H_1»: $H_2 = \bar{H}_1$. Применяя теорему о вероятности дополнительного события, мы имеем: $P(H_2) = 1 - P(H_1) = 0,7$. Фраза «из всех телефонов, выпускаемых первой фабрикой, 1% имеют скрытые дефекты» – это вольная формулировка точного утверждения о величине условной вероятности $P(A|H_1)$ события *A* при условии, что произошло событие H_1: $P(A|H_1) = 0,01$. Фраза «…у выпускаемых второй фабрикой – 1,5%» – это вольная формулировка точного утверждения о величине условной вероятности $P(A|H_2)$ события *A* при условии, что произошло событие H_2: $P(A|H_2) = 0,015$. В задаче требуется найти $P(A)$. При такой интерпретации условия задачи Д1.17 ясно, что решаться она должна с помощью формулы полной вероятности (полную систему несовместных событий образуют события H_1 и H_2):

$$P(A) = P(H_1)P(A\,|\,H_1) + P(H_2)P(A\,|\,H_2).$$

Подставляя известные нам числовые значения вероятностей, мы получим ответ:

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,01 + 0,7 \cdot 0,015 = 0,0135.$$

Особо подчеркнём, что математически строгое и соответствующее содержанию теории вероятностей решение этой задачи невозможно без владения понятием условной вероятности, знания теоремы умножения для зависимых событий и формулы полной вероятности (для более сложных задач из [1] нужно знать и формулу Бейеса). Без знания того, что такое условная вероятность нельзя даже адекватно понять текст задачи. Чтобы обойти эти проблемы, в пособии [1] используется прибывший из англоязычной учебной литературы приём с «деревом вероятностей», который равносилен применению формулы полной вероятности (см., например, стр.19, где излагается решение задачи Д1.17). Хотя некоторые методисты полагают, что этот приём понятнее школьникам, на самом деле он замутняет суть дела. При этом подходе не используются даже те простейшие понятия и формулы теории вероятностей, которые изучаются в средней школе, так что естественно возникают вопросы, зачем же всю эту «теорию вероятностей» нужно было рассказывать, где тут «стохастическая линия»? Обычный ответ: «это нужно, чтобы сделать теорию вероятностей понятной даже слабым школьникам» – совершенно неудовлетворителен. Во-первых, «дерево вероятностей» позволяет только натаскать на решение однотипных задач, совершенно не затрагивая вероятностной сути задачи. Во-вторых, в прикладной теории вероятностей давно известно, как нужно решать подобные задачи, чтобы решения были понятны неспециалистам.

Этот метод упрощённого решения задач по теории вероятностей базируется на фундаментальной идее о том, что вероятность *P*(*A*) случайного события практически неотличима от частоты $\dfrac{m_n(A)}{n}$ его появления в большой серии однотипных экспериментов, проводимых в неизменных условиях (*n* – это число экспериментов, а $m_n(A)$ – число экспериментов, в которых наблюдалось событие *A*).

Создатель современной теории вероятностей А.Н.Колмогоров в своей основополагающей книге [2], стр.12-13, выразил эту мысль следующими словами:

«Применение теории вероятностей к действительному миру опыта происходит по следующей схеме.

1. Предполагают данным некоторый комплекс σ условий, допускающий неограниченное число повторений…

4. … некоторым событиям *A*, которые могут наступить или не наступить после осуществления условий σ, поставлены в соответствие определённые действительные числа P(*A*), обладающие следующими свойствами:

А. Можно практически быть уверенным, что если комплекс условий σ будет повторён большое число *n* раз и если при этом через *m* обозначено число случаев, при которых число A наступило, то отношение $\frac{m}{n}$ будет мало отличаться от P(A)…»

Придать точный смысл фразе «вероятность случайного события практически неотличима от частоты его появления» можно разными способами.

Первый способ. Можно считать, что вероятность случайного события – это предел частоты его появления при неограниченном росте числа экспериментов:

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m_n(A)}{n}. \tag{1}$$

В частотной теории немецкого математика Рихарда Мизеса равенство (1) принимается в качестве определения вероятности случайного события. В теории Колмогорова равенство (1) называется усиленным законом больших чисел и доказывается на основе системы аксиом как строгая математическая теорема (её точная формулировка содержит несколько нюансов).

Для любого фиксированного числа n экспериментов число $m_n(A)$ случаев появления события A является случайной величиной. Поэтому случайной величиной является и частота $\frac{m_n(A)}{n}$ появления события A, в то время как вероятность $P(A)$ события A – это обычное действительное число (из отрезка [0;1]). Закон больших чисел выражает в математической форме фундаментальную идею о том, что «…совместное действие случайных факторов приводит… к результату, почти не зависящему от случая» (см. статью [3] академика Ю.В.Прохорова из Математической энциклопедии). Он является простейшим примером предельных теорем теории вероятностей, в которых описываются более сложные закономерности, возникающие при совместном действии большого числа случайных факторов. Как отмечено в Математической энциклопедии, «…познавательная ценность теории вероятностей раскрывается только предельными теоремами», так что суть теории вероятностей вовсе не в расчёте вероятностей отдельных событий (см. статью [4] академиков Ю.В.Прохорова и Б.А.Севастьянова).

Последняя мысль настолько важна, что мы приведём более длинную цитату из [4]: «Утверждение о том, что какое-либо событие наступает с вероятностью, равной, например, 1/2, ещё не представляет само по себе окончательной ценности, т. к. мы стремимся к достоверному знанию. Окончательную познавательную ценность имеют те результаты теории вероятностей, которые позволяют утверждать, что вероятность наступления какого-либо события A весьма близка к единице или (что то же самое) вероятность ненаступления события A весьма мала… Имеющие научный и практический интерес выводы такого рода обычно основаны на допущении, что наступление или ненаступление события A зависит от большого числа случайных, мало связанных друг с другом факторов. Поэтому можно также сказать, что теория вероятностей есть математическая наука, выясняющая закономерности, которые возникают при взаимодействии большого числа случайных факторов.»

Смысл предельной теоремы (1) можно передать фразами: «при большом числе n испытаний частота $\frac{m_n(A)}{n}$ появления события A приближённо равна вероятности $P(A)$, причём по мере роста числа n приближённое равенство $\frac{m_n(A)}{n} \approx P(A)$ переходит в точное: $\frac{m_n(A)}{n} \to P(A)$» или «при большом числе n испытаний число $m_n(A)$ появления события A практически равно $n \cdot P(A)$».). На практике можно (как некоторый жаргон) говорить просто «число $m_n(A)$ появлений события A в серии из n независимых реализаций эксперимента равно $n \cdot P(A)$».

Второй способ. Если через $E\left(m_n(A)\right)$ обозначить среднее число появлений события A в серии из n независимых реализаций эксперимента, то

$$E\left(m_n(A)\right) = n \cdot P(A) \qquad (2)$$

и, соответственнно,

$$P(A) = \frac{E\left(m_n(A)\right)}{n}. \qquad (3)$$

Обратим внимание на то, что равенства (2) и (3) верны для любого конечного значения n.

Второй способ проще первого, если не вдаваться в точный смысл понятия «среднее число» (его строгое определение требует введения понятия случайной величины, которое не изучается в базовом школьном курсе[1]). На практике можно (как некоторый жаргон) опускать слово «среднее», что приводит к уже упоминавшейся формулировке: «число $m_n(A)$ появлений события A в серии из n независимых реализаций эксперимента равно $n \cdot P(A)$».

Любая из приведённых выше формулировок больше соответствует духу теории вероятностей, чем формальные схемы вроде «дерева вероятностей».

Очень часто для ещё большой наглядности в качестве «большого» числа экспериментов берут конкретное число. Например, в актуарной математике (это раздел теории страхования, посвящённый применению теории вероятностей и статистики для финансовых расчётов в условиях неопределённости наступления страховых случаев) принято брать $n = 100\ 000$.

Посмотрим, как выглядело бы решение задачи Д1.17 при таком подходе.

Предположим, что обе фабрики выпустили $n = 100\ 000$ телефонов. По условию, первая фабрика выпустила $n_1 = 0,3n = 30\ 000$ телефонов, а вторая – $n_2 = n - n_1 = 70\ 000$ телефонов. Из $n_1 = 30\ 000$ телефонов, выпущенных первой фабрикой, скрытые дефекты имеют $0,01n_1 = 300$ телефонов, а из $n_2 = 70\ 000$ телефонов, выпущенных второй фабрикой, скрытые дефекты имеют $0,015n_2 = 1050$ телефонов. Поэтому общее число бракованных телефонов равно $300 + 1050 = 1350$. По отношению к общему числу $n = 100\ 000$ телефонов, выпущенных двумя фабриками, это составляет $\frac{1350}{100000} = 0,0135 = 1,35\%$ – это и есть искомая вероятность.

Подобный подход позволяет и многие другие несложные задачи по теории вероятностей решать как арифметические или алгебраические задачи. Более того, в приложениях теории вероятностей к реальным предметным областям этот подход применяется, чтобы сделать расчёты понятными специалистам-нематематикам. Например, в актуарной математике он широко используется при расчёте премий, резервов, анализе прибыльности и т.д. под именем метод динамики средних активов (детали можно найти, например, в книге [5]).

Теперь разберём более сложные задачи из пособия [1].

Задача Т9.5. На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов.

Решение. Как и в задаче Д1.17, начать решение нужно с того, что понять условие в адекватных терминах.

---

[1] В [1] неоднократно употребляется выражение «в среднем…», например, «в среднем из 1000 аккумуляторов, поступивших в продажу, 6 неисправны…» (задача Д1.7). Следует подчеркнуть, что оно вовсе не означает, как мог бы подумать человек, знающий основы теории вероятностей, среднее значение соответствующей случайной величины (числа неисправных аккумуляторов в партии, поступившей в продажу). Из приведённых в [1] решений следует, что, например, задачу Д1.7 нужно понимать так: «В продажу поступило ровно 1000 аккумуляторов, из которых точно 6 неисправны…».

В этой задаче речь идёт о массовом однородном эксперименте – выпуске однотипной продукции (тарелок). Для каждой тарелки фиксируется, наступили (или не наступили) события: H_1=«тарелка имеет дефект», H_2=«тарелка не имеет дефектов», A= «тарелка поступила в продажу».

Фраза «10% произведённых тарелок имеют дефект» – это вольная формулировка точного утверждения о величине вероятности $P\left(H_1\right)$ события H_1=«тарелка имеет дефект»: $P\left(H_1\right)=0{,}1$. Фраза «при контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок» – это вольная формулировка точного утверждения о величине условной вероятности $P\left(\bar{A}\middle|H_1\right)$ события $\bar{A}$=«тарелка не поступила в продажу», дополнительное к событию *A*, при условии, что произошло событие H_1: $P\left(\bar{A}\middle|H_1\right)=0{,}8$. Искомая вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов – это условная вероятность $P\left(H_2 \mid A\right)$ события H_2=«тарелка не имеет дефектов» при условии, что произошло событие A=«тарелка поступила в продажу».

При такой интерпретации условия задачи Т9.5 ясно, что решать её нужно по формуле Бейеса:

$$P\left(H_2 \mid A\right)=\frac{P(H_2)\cdot P(A\mid H_2)}{P(H_1)\cdot P(A\mid H_1)+P(H_2)\cdot P(A\mid H_2)}.$$

Вероятность $P\left(H_1\right)=0{,}1$ нам дана по условию, вероятности $P\left(H_2\right)$ и $P\left(A\mid H_1\right)$ нужно найти по формуле для вероятности дополнительного события: $P\left(H_2\right)=1-P\left(H_1\right)=0.9$, $P\left(A\mid H_1\right)=1-P\left(\bar{A}\middle|H_1\right)=0{,}2$, а вероятность $P\left(A\mid H_2\right)$ по смыслу задачи равна 1 (если тарелка не имеет дефектов, то она наверняка поступает в продажу). Подставляя эти числовые значения вероятностей, мы получим ответ:

$$P\left(H_2 \mid A\right)=\frac{0{,}9\cdot 1}{0{,}1\cdot 0{,}2+0{,}9\cdot 1}=\frac{45}{46}.$$

Весьма сомнительно, чтобы школьник мог дать такое решение (единственно возможное в строгом математическом курсе теории вероятностей). Теперь решим эту же задачу нашим методом. Предположим, что фабрика произвела $n=100\ 000$ тарелок. Из них $n_1=0{,}1n=10\ 000$ тарелок имеют дефекты, а $n_2=n-n_1=90\ 000$ – нет. Из $n_1=10\ 000$ тарелок с дефектами будет забраковано $0{,}8n_1=8000$ тарелок, а $n_1-0{,}8n_1=2000$ тарелок с дефектами поступит в продажу. В продажу поступят и все $n_2=90\ 000$ тарелок без дефектов. В общей сложности в продажу поступит 92000 тарелок, из которых не имеют дефектов 90000, что составляет $\frac{90\ 000}{92\ 000}=\frac{45}{46}$ – это и есть искомая вероятность.

Задача Д1.18. *Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории, а из второго хозяйства – 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц из этих двух хозяйств. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.*

Решение. В этой задаче речь идёт о массовом однородном эксперименте – закупке яиц. Для каждого яйца фиксируется, наступили (или не наступили) события: H_1= «яйцо из первого хозяйства», H_2= «яйцо из второго хозяйства», A=«яйцо – высшей категории».

Фраза «40% яиц из первого хозяйства – яйца высшей категории» – это вольная формулировка точного утверждения о величине условной вероятности $P(A|H_1)$ события *A* при условии, что произошло событие H_1: $P(A|H_1)$= 0,4. Фраза «20% яиц из второго хозяйства – яйца высшей категории» – это вольная формулировка точного утверждения о величине условной вероятности $P(A|H_2)$ события A при условии, что произошло событие H_2: $P(A|H_2)=$ 0,4. Фраза «всего высшую категорию получает 35% яиц» – это вольная формулировка равенства $P(A)=0{,}35$. В задаче требуется найти $P(H_1)$. При такой интерпретации условия задачи Д1.18 ясно, что решаться она должна с помощью формулы полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)P(A\,|\,H_1)+P(H_2)P(A\,|\,H_2).$$

Подставляя известные нам числовые значения вероятностей, мы получим:

$$0{,}35=0{,}4\cdot P(H_1)+0{,}2\cdot P(H_2).$$

Поскольку событий H_1 и H_2 несовместны и в сумме дают достоверное событие, то $P(H_1)+P(H_2)=1$. Поэтому интересующая нас неизвестная $x=P(H_1)$ удовлетворяет уравнению:

$$0{,}35=0{,}4\cdot x+0{,}2\cdot(1-x),$$

откуда x=0.75.

Теперь решим эту задачу, рассматривая вероятность случайного события как частоту его наступления при большом числе экспериментов (мы немного модифицировали использовавшийся ранее язык, чтобы подчеркнуть тот факт, что частота наступления события – это случайная величина; с равным успехом можно было использовать и более простой подход, применённый для рашения задач Д1.17 и Т9.5).

Пусть x – искомая вероятность и агрофирма закупила n яиц. Тогда число яиц, закупленных в первом хозяйстве, при очень большом n практически равно xn. Соответственно, число яиц, закупленных во втором хозяйстве, практически равно $n-xn$. Из xn яиц из первого хозяйства число яиц высшего сорта практически равно $0,4xn$ (поскольку число xn очень большое, как и n). Из $(1-x)n$ яиц из второго хозяйства число яиц высшего сорта практически равно $0,2(1-x)n$. Поэтому общее число яиц высшего сорта практически равно $0,4xn+0,2(1-x)n=0,2n+0,2xn$. Соответственно, доля яиц высшего сорта (по отношению к общему числу яиц, закупленных в двух хозяйствах) равна (причём уже абсолютно точно) $0,2+0,2x$. По условию это число равно $0,35$. Следовательно, верно равенство $0,2+0,2x=0,35$, откуда мы немедленно находим интересующую нас величину: $x=0{,}75$.

Литература

1. Высоцкий И.Р., Ященко И.В. ЕГЭ 2013. Математика. Задача В10. Теория вероятностей. Рабочая тетрадь. – 2-е изд., доп. – М.: МЦНМО, 2013.- 48 с.

2. Колмогоров А.Н.. Основные понятия теории вероятностей. 1-е изд. 1933 (нем), 1936 (рус.), 2-е изд., 1974г., 3-е изд. М.:Фазис, 1998.

3. Прохоров Ю.В. Статья «Больших чисел закон». Математическая энциклопедия, Москва, Изд-во «Советская энциклопедия», 1982, том 1.

4. Прохоров Ю.В., Севастьянов Б.А. Статья «Вероятностей теория». Математическая энциклопедия. Москва, Изд-во «Советская энциклопедия», 1982, том 1.

5. Фалин Г.И.. «Математические основы теории страхования жизни и пенсионных схем», М., Анкил, 3-е изд, 2007.